УДК 517.98

А. А. Юсенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧЕТВІРКИ ОРТОПРОЕКТОРІВ, ЩО ПОВ'ЯЗАНІ ЛІНІЙНИМ СПІВВІДНОШЕННЯМ

Exact formulas in the explicit form are obtained for all quadruples of orthoprojectors P_1, P_2, P_3, P_4, which are irreducible up to the unitary equivalence and are connected by the linear relation $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \lambda I$, where $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^+$.

Получены формулы в явном виде для всех неприводимых, с точностью до унитарной эквивалентности, четверок ортопроекторов P_1, P_2, P_3, P_4, связанных линейным соотношением $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \lambda I$, где $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^+$.

Вступ. Роботи [1, 2] присвячено вивченню лінійно пов'язаних наборів ортопроекторів у гільбертовому просторі. Зокрема, досліджувалось питання про існування наборів ортопроекторів $P_1, P_2, \ldots, P_n$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, для яких

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \lambda I,$$

де $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ — деякий фіксований вектор, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, а також властивості таких наборів (узагальнені розмірності, явні формули та ін.).

Для $n < 4$ опис множини параметрів, для яких існує розв'язок, та всіх зображень є відомим (відповідна класифікаційна задача має скінченний тип). У роботі [2] отримано опис множини можливих значень λ у випадку, коли $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$, та показано, що при $n > 4$ задача опису всіх зображень є дуже складною ($*$-дикою). У роботах [3, 4] досліджено задачу опису множини параметрів λ при $n = 4$.

Більш того, у випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ у [5] наведено явні формули для відповідних проекторів. У роботі [6] також отримано формули для випадку довільних $(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) \in \mathbb{R}_+^n$ і $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$.

Наша мета — побудувати всі, з точністю до унітарної еквівалентності, незвідні зображення у випадку, коли $n = 4$. У першому пункті описано всі можливі вектори узагальненої розмірності (у випадку, коли $\lambda \neq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$). У другому пункті для серій векторів узагальненої розмірності, описаних у першому пункті, побудовано явні формули для зображень.

1. Вектори узагальненої розмірності.

Означення 1. *Нехай P_i, $i = 1, \ldots, n$, — набір ортопроекторів у деякому скінченновимірному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Вектором узагальненої розмірності заданого набору ортопроекторів називатимемо вектор $d = (d_0; d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, компоненти якого визначаються таким чином*:

$$d_0 = \dim(\mathcal{H}), \quad d_i = \dim(P_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Опишемо множину векторів узагальненої розмірності для незвідного набору ортопроекторів $P_1, \ldots, P_4$, що задовольняють лінійне співвідношення

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_4 P_4 = \lambda I \qquad (1)$$

для довільного фіксованого вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$.

Усі незвідні зображення лінійно пов'язаних четвірок проекторів є скінченновимірними (див. [1]), до того ж для кожного вектора узагальненої розмірності, що відмінний від $(2; 1, 1, 1, 1)$, існує лише одне зображення з точністю до унітарної еквівалентності (див., наприклад, [3]), а для вектора $(2; 1, 1, 1, 1)$ існує неперервна серія зображень [6]. Незвідні набори з вектором розмірності, відмінним від $(2; 1, 1, 1, 1)$, отримують дією функтора Кокстера на деякий одновимірний набір [3]. Тому для опису всіх можливих векторів узагальненої розмірності достатньо вивчити динаміку дії функторів Кокстера на векторах узагальненої розмірності.

Для чотирьох проекторів дію функторів Кокстера на векторах узагальненої розмірності визначають таким чином:

$$\Phi^+(d_0) \;=\; 3d_0 - \sum_{j=1}^{4} d_j\,, \quad \Phi^+(d_i) = d_0 - d_i\,,$$

$$\Phi^-(d_0) \;=\; \sum_{j=1}^{4} d_j - d_0\,, \quad \Phi^-(d_i) = \sum_{j=1,\, j\neq 1}^{4} d_i - d_0\,.$$

Твердження 1. *Для незвідних наборів ортопроекторів* $P_1, \ldots, P_4$, *які задовольняють* (1), *можливі вектори узагальненої розмірності є такими*:

$$\begin{aligned}
d^{(2k+1,0)} &= (2k+1;\, k,\, k,\, k,\, k)\,,\\
d^{(2k+1,1)} &= (2k+1;\, k+1,\, k,\, k,\, k)\,,\\
d^{(2k+1,2)} &= (2k+1;\, k,\, k+1,\, k,\, k)\,,\\
d^{(2k+1,3)} &= (2k+1;\, k,\, k,\, k+1,\, k)\,,\\
d^{(2k+1,4)} &= (2k+1;\, k,\, k,\, k,\, k+1)\,,
\end{aligned} \tag{2}$$

якщо розмірність простору $\dim(\mathcal{H}) = 2k+1$, *і*

$$\begin{aligned}
d^{(2k,1)} &= (2k;\, k-1,\, k,\, k,\, k)\,,\\
d^{(2k,2)} &= (2k;\, k,\, k,\, k,\, k-1)\,,\\
d^{(2k,3)} &= (2k;\, k,\, k-1,\, k,\, k)\,,\\
d^{(2k,4)} &= (2k;\, k,\, k,\, k-1,\, k)\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

якщо розмірність простору $\dim(\mathcal{H}) = 2k$.

Доведення. Оскільки всі незвідні (крім вектора $(2; 1, 1, 1, 1)$) зображення отримують з одновимірних, то розглядатимемо можливі одновимірні вектори узагальненої розмірності для заданого набору ортопроекторів, а саме: $(1; 0, 0, 0, 0)$, $(1; 1, 0, 0, 0)$, $(1; 0, 1, 0, 0)$, $(1; 0, 0, 1, 0)$, $(1; 0, 0, 0, 1)$, $(1; 1, 1, 1, 0)$, $(1; 1, 1, 0, 1)$, $(1; 1, 0, 1, 1)$, $(1; 0, 1, 1, 1)$ (вектори типу $(1; 1, 1, 0, 0)$ не розглядаємо, тому що вони інваріантні відносно дії функторів Кокстера).

Доведемо за індукцією, що вектор $(1; 0, 0, 0, 0)$ під дією функтора Кокстера Φ^+ k разів ($k \in \mathbb{N}$) матиме вигляд $d^{(2k+1,0)} = (2k+1;\, k,\, k,\, k,\, k)$. Якщо $n = 1$, то $d^{(1,0)} = (1; 0, 0, 0, 0)$. Припустимо, що при $n = k-1$ $d^{(2k-1,0)} = (2k-1;\, k-1,\, k-1,\, k-1,\, k-1)$. Доведемо правильність формули при $n = k$. Дійсно, використовуючи функтори Кокстера на векторах узагальненої розмірності, маємо

$$d_0^{(2k,0)} = 3d_0^{(2k-1,0)} - \sum_{j=1}^{4} d_j^{(2k-1,0)} = 6k - 3 - 4k + 4 = 2k + 1,$$

$$d_i^{(2k,0)} = d_0^{(2k-1,0)} - d_i^{(2k-1,0)} = 2k - 1 - k + 1 = k.$$

Для інших векторів узагальненої розмірності доведення проводиться аналогічно.

Твердження доведено.

Зауважимо, що для фіксованого вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) \in \mathbb{R}_+^4$ не всі описані вектори (2), (3) є векторами узагальненої розмірності.

2. Незвідні зображення чотирьох лінійно пов'язаних ортопроекторів. У випадку вектора узагальненої розмірності (2; 1, 1, 1, 1) зображення чотирьох проекторів, що задовольняють співвідношення

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_4 P_4 = \lambda I,$$

де $0 \le \alpha_i \le 1$, $i = 1, \ldots, 4$, було побудовано у роботі [6]. Побудуємо зображення для всіх інших векторів узагальненої розмірності.

Оскільки відомо [3], що для кожної узагальненої розмірності існує не більш ніж одне незвідне зображення, то для одержання опису нам достатньо навести довільний набір проекторів з заданою узагальненою розмірністю.

Як було зазначено, всі зображення четвірок проекторів, що задовольняють лінійне співвідношення, є скінченновимірними. У випадку, коли розмірність простору зображення $\dim(\mathcal{H}) = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, шукатимемо проектори у вигляді

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_{\gamma_1} \oplus Q_{\gamma_2} \oplus \ldots \oplus Q_{\gamma_n} \oplus \varepsilon_1, \\ P_2 &= \varepsilon_2 \oplus Q_{\beta_1} \oplus Q_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus Q_{\beta_n}, \\ P_3 &= \varepsilon_3 \oplus R_{\beta'_1} \oplus R_{\beta'_2} \oplus \ldots \oplus R_{\beta'_n}, \\ P_4 &= R_{\gamma'_1} \oplus R_{\gamma'_2} \oplus \ldots \oplus R_{\gamma'_n} \oplus \varepsilon_4. \end{aligned} \tag{4}$$

У випадку парної розмірності ($\dim(\mathcal{H}) = 2k$) проектори мають вигляд

$$\begin{aligned} P_1 &= \varepsilon_1 \oplus Q_{\gamma_1} \oplus Q_{\gamma_2} \oplus \ldots \oplus Q_{\gamma_{n-1}} \oplus \varepsilon_2, \\ P_4 &= \varepsilon_3 \oplus R_{\gamma'_1} \oplus R_{\gamma'_2} \oplus \ldots \oplus R_{\gamma'_{n-1}} \oplus \varepsilon_4, \\ P_2 &= Q_{\beta_1} \oplus Q_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus Q_{\beta_n}, \\ P_3 &= R_{\beta'_1} \oplus R_{\beta'_2} \oplus \ldots \oplus R_{\beta'_n}, \end{aligned} \tag{5}$$

де ε_i — одновимірні проектори ($\varepsilon_i = 0$ або $\varepsilon_i = 1$), а Q_k та R_k — двовимірні проектори, матричний запис яких є таким:

$$\begin{aligned} Q_k &= \begin{pmatrix} k & \sqrt{k(1-k)} \\ \sqrt{k(1-k)} & 1-k \end{pmatrix}, \\ R_k &= \begin{pmatrix} k & -\sqrt{k(1-k)} \\ -\sqrt{k(1-k)} & 1-k \end{pmatrix}, \\ & 0 < k < 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Для будь-якого вектора* $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}_+^4$ *існує незвідне зображення набору ортопроекторів* $P_1, \ldots, P_4$, *що задовольняє* (1), *яке задається, з точністю до унітарної еквівалентності, рівностями* (4), (5) *з деякими параметрами* ε_i, γ_i, γ_i', β_i, β_i', *єдиними для кожного вектора* $\vec{\alpha}$.

Доведення. Відомо [3], що для кожного вектора узагальненої розмірності, крім вектора (2; 1, 1, 1, 1), існує лише одне незвідне, з точністю до унітарної еквівалентності, зображення, тому достатньо побудувати для кожного вектора хоча б одне і показати, що воно задовольняє всі можливі значення вектора $\vec{\alpha}$.

Будемо будувати набір проекторів у вигляді (4), (5). Накладемо на проектори додаткові умови: суми $\alpha_1 P_1 + \alpha_4 P_4$ та $\alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$ — діагональні оператори. Отримаємо співвідношення між коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \alpha_1 \sqrt{\gamma_j(1-\gamma_j)} &= \alpha_4 \sqrt{\gamma_j'(1-\gamma_j')}, \\ \alpha_2 \sqrt{\beta_j(1-\beta_j)} &= \alpha_3 \sqrt{\beta_j'(1-\beta_j')}. \end{aligned} \tag{7}$$

Побудовані проектори повинні задати зображення, тобто виконується рівність $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \lambda I.$ Прирівнявши відповідні коефіцієнти в матричних зображеннях ортопроекторів, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha_1\gamma_1 + \alpha_4\gamma_1' + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 = \lambda, \\ &\alpha_1 + \alpha_4 - (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_4\gamma_1') + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1' = \lambda, \\ &\alpha_2 + \alpha_3 - (\alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1') + \alpha_1\gamma_2 + \alpha_4\gamma_2' = \lambda, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1\gamma_j + \alpha_4\gamma_j' + \alpha_2 + \alpha_3 - (\alpha_2\beta_{j-1} + \alpha_3\beta_{j-1}') = \lambda, \\ &\alpha_1 + \alpha_4 - (\alpha_1\gamma_j + \alpha_4\gamma_j') + \alpha_2\beta_j + \alpha_3\beta_j' = \lambda, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_2 + \alpha_3 - (\alpha_2\beta_n + \alpha_3\beta_n') + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_4\varepsilon_4 = \lambda, \\ &\qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

Виконавши перетворення, будемо мати

$$\begin{aligned} \alpha_1\gamma_1 + \alpha_4\gamma_1' &= \lambda - (\alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3), \\ \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1' &= 2\lambda - (\alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3) - (\alpha_1 + \alpha_4), \\ \alpha_1\gamma_2 + \alpha_4\gamma_2' &= 3\lambda - (\alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3) - \alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\gamma_j + \alpha_4\gamma_j' &= (2j-1)\lambda - (\alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3) - (j-1)\alpha, \\ \alpha_2\beta_j + \alpha_3\beta_j' &= 2j\lambda - (\alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3) - (j-1)\alpha - (\alpha_1 + \alpha_4), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha/2 - (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \alpha_4\varepsilon_4)}{2n+1}, \end{aligned}$$

де $j = 1, 2, \ldots, k,$ $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_4$.

Позначимо

$$B_j = \alpha_1\gamma_j + \alpha_4\gamma'_j, \qquad C_j = \alpha_2\beta_j + \alpha_3\beta'_j. \tag{8}$$

Розв'язавши систему рівнянь (7), (8), одержимо

$$\gamma_j = \frac{B_j(B_j - \alpha_4)}{\alpha_1\big(2B_j - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{B_j(B_j - \alpha_1)}{\alpha_4\big(2B_j - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{C_j(C_j - \alpha_3)}{\alpha_2\big(2C_j - (\alpha_2 + \alpha_3)\big)},$$

$$\beta'_j = \frac{C_j(C_j - \alpha_2)}{\alpha_3\big(2C_j - (\alpha_2 + \alpha_3)\big)},$$

а з умов (6) на коефіцієнти матриць знайдемо

$$\beta_j \in \begin{cases} (0;\, \alpha_1] \cup [\alpha_4;\, \alpha_1 + \alpha_4), & \alpha_1 < \alpha_4, \\ (0;\, \alpha_4] \cup [\alpha_1;\, \alpha_1 + \alpha_4), & \alpha_1 \geq \alpha_4, \end{cases}$$

$$C_j \in \begin{cases} (0;\, \alpha_2] \cup [\alpha_3;\, \alpha_2 + \alpha_3), & \alpha_2 < \alpha_3, \\ (0;\, \alpha_3] \cup [\alpha_2;\, \alpha_2 + \alpha_3), & \alpha_2 \geq \alpha_3. \end{cases}$$

Таким чином, використовуючи побудовану схему задання проекторів, можна задавати незвідні зображення чотирьох проекторів, що задовольняють лінійне співвідношення у скінченновимірному просторі непарної розмірності.

Аналогічним чином будуються чотири проектори у скінченновимірному просторі $\mathcal{H}$ парної розмірності.

Для фіксованого вектора узагальненої розмірності, відмінного від $(2;\, 1,\, 1,\, 1,\, 1)$, будуємо зображення таким чином:

1) використовуючи рівність сліду, знаходимо значення λ;

2) підставляємо значення λ в отримані системи та перевіряємо обмеження на B_j, C_j (якщо система не має розв'язку чи обмеження не виконується, то для даного вектора зображення немає).

Застосовуючи цю схему, можна отримати явні формули незвідних зображень ортопроекторів для різних векторів узагальненої розмірності.

Лема 1. *Наведені нижче явні формули четвірки ортопроекторів* $P_1, \ldots, P_4$, *що задовольняють лінійне співвідношення* (1), *з точністю до унітарної еквівалентності, вичерпують всю множину можливих зображень.*

Доведення. Для векторів узагальненої розмірності, описаних у першому пункті, запишемо явні формули зображень ортопроекторів:

1. Для серії векторів узагальненої розмірності $d^{(2k+1,1)} = (2k+1;\, k+1,\, k,\, k,\, k)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \left\{\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha - 2\alpha_1}{2(2k+1)}\right\}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_4\big)}{\alpha_1\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha\big)\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_1\big)}{\alpha_4\big(2\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha\big)-(\alpha_1+\alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{(2j\lambda-\alpha j+(\alpha_2+\alpha_3))(2j\lambda-\alpha j+\alpha_2)}{\alpha_2(4j\lambda-2\alpha j+\alpha_2+\alpha_3)},$$

$$\beta'_j = \frac{(2j\lambda-\alpha j+(\alpha_2+\alpha_3))(2j\lambda-\alpha j+\alpha_3)}{\alpha_3(4j\lambda-2\alpha j+\alpha_2+\alpha_3)}$$

та обмеження на k:

$$k < \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2(\alpha_4-\alpha_1)}, \qquad k < \frac{\alpha_2}{\alpha-2(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

2. Для серії $d^{(2k+1,2)} = (2k+1; k, k+1, k, k)$:

$$\varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha-2\alpha_2}{2(2k+1)}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_2\big)\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-(\alpha_2+\alpha_4)\big)}{\alpha_1\big(2\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_2\big)-(\alpha_1+\alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_2\big)\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-(\alpha_2+\alpha_1)\big)}{\alpha_4\big(2\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_2\big)-(\alpha_1+\alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{(2j\lambda-j\alpha+\alpha_3)(2j\lambda-j\alpha)}{\alpha_2(4j\lambda-2j\alpha+\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$\beta'_j = \frac{(2j\lambda-j\alpha+\alpha_3)(2j\lambda-j\alpha+\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_3(4j\lambda-2j\alpha+\alpha_3-\alpha_2)}$$

та обмеження на k:

$$k < \frac{\alpha-\alpha_2-\alpha_3}{2(\alpha_3-\alpha_2)}, \qquad k < \frac{\alpha_1}{\alpha-2(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

3. Для серії $d^{(2k+1,3)} = (2k+1; k, k, k+1, k)$:

$$\varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha-2\alpha_3}{2(2n+1)}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_3\big)\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-(\alpha_3+\alpha_4)\big)}{\alpha_1\big(2\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_3\big)-(\alpha_1+\alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_3\big)\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-(\alpha_3+\alpha_1)\big)}{\alpha_4\big(2\big((2j-1)\lambda-(j-1)\alpha-\alpha_3\big)-(\alpha_1+\alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{(2j\lambda-j\alpha+\alpha_2)(2j\lambda-j\alpha+\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_2(4j\lambda-2j\alpha+\alpha_2-\alpha_3)},$$

$$\beta'_j = \frac{(2j\lambda - j\alpha + \alpha_2)(2j\lambda - j\alpha)}{\alpha_3(4j\lambda - 2j\alpha + \alpha_2 - \alpha_3)}$$

та обмеження на k:

$$k < \frac{\alpha_1}{\alpha - 2(\alpha_1 + \alpha_3)}.$$

4. Для серії $d^{(2k+1,4)} = (2k+1; k, k, k, k+1)$:

$$\varepsilon_4 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha - 2\alpha_4}{2(2n+1)}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_4\big)}{\alpha_1\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_1\big)}{\alpha_4\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{\big(2j\lambda - \alpha j + (\alpha_2 + \alpha_3)\big)(2j\lambda - \alpha j + \alpha_2)}{\alpha_2(4j\lambda - 2j\alpha + \alpha_2 + \alpha_3)},$$

$$\beta'_j = \frac{\big(2j\lambda - \alpha j + (\alpha_2 + \alpha_3)\big)(2j\lambda - \alpha j + \alpha_3)}{\alpha_3(4j\lambda - 2j\alpha + \alpha_2 + \alpha_3)}$$

та обмеження на k:

якщо $\alpha_2 + \alpha_3 > \alpha_1 + \alpha_4$, то $k < \dfrac{\alpha_1}{\alpha - 2(\alpha_1 + \alpha_4)}$; якщо ж $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \leq \alpha_1 + \alpha_4$, то $k \in \mathbb{N}$.

5. Для серії $d^{(2k+1,5)} = (2k+1; k, k, k, k)$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2(2k+1)}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_4\big)}{\alpha_1\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_1\big)}{\alpha_4\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{\big(2j\lambda - \alpha j + (\alpha_2 + \alpha_3)\big)(2j\lambda - \alpha j + \alpha_2)}{\alpha_2(4j\lambda - 2\alpha j + \alpha_2 + \alpha_3)},$$

$$\beta'_j = \frac{\big(2j\lambda - \alpha j + (\alpha_2 + \alpha_3)\big)(2j\lambda - \alpha j + \alpha_3)}{\alpha_3(4j\lambda - 2\alpha j + \alpha_2 + \alpha_3)}$$

та обмеження на k:

для $\lambda = \left\{\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\alpha}{2(4k-1)}\right\}$ $k < \dfrac{\alpha_4}{4\alpha_4 - \alpha}$;

для $\lambda = \left\{\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\alpha}{2(4k+1)}\right\}$, якщо $\alpha_2 + \alpha_3 > \alpha_1 + \alpha_4$, то $k < \dfrac{\alpha_1 + \alpha_4}{2\alpha - 4(\alpha_1 + \alpha_4)}$, $k < \dfrac{\alpha - \alpha_4}{4\alpha_4 - \alpha}$, $k < \dfrac{\alpha_2}{\alpha - 4\alpha_2}$, якщо $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_4$, то $k < \dfrac{\alpha - \alpha_4}{4\alpha_4 - \alpha}$, $k < \dfrac{\alpha_2}{\alpha - 4\alpha_2}$.

6. Для серії $d^{(2k,1)} = (2k, k, k, k, k-1)$:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_4}{2n}.$$

Відповідно

$$\gamma_i = \frac{(2i\lambda - i\alpha + \alpha_4)(2i\lambda - i\alpha)}{\alpha_1(4i\lambda - 2i\alpha + \alpha_4 - \alpha_1)},$$

$$\gamma_i' = \frac{(2i\lambda - i\alpha + \alpha_4)(2i\lambda - i\alpha + \alpha_4 - \alpha_1)}{\alpha_4(4i\lambda - 2i\alpha + \alpha_4 - \alpha_1)},$$

$$\beta_i = \frac{\big((2i-1)\lambda - (i-1)\alpha - \alpha_1\big)\big((2i-1)\lambda - (i-1)\alpha - \alpha_1 - \alpha_3\big)}{\alpha_2\big(2\big((2i-1)\lambda - (i-1)\alpha - \alpha_1\big) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)},$$

$$\beta_i' = \frac{\big((2i-1)\lambda - (i-1)\alpha - \alpha_1\big)\big((2i-1)\lambda - (i-1)\alpha - \alpha_1 - \alpha_2\big)}{\alpha_3\big(2\big((2i-1)\lambda - (i-1)\alpha - \alpha_1\big) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)}$$

та обмеження на k:

$$k < \frac{\alpha_4}{\alpha_4 - \alpha_1}, \quad k < \frac{\alpha_4}{\alpha - 2(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

7. Для серії $d^{(2k,2)} = (2k, k-1, k, k, k)$:

$$\varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_1}{2n}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big(2j\lambda - (j-1)\alpha + \alpha_1\big)\big(2j\lambda - (j-1)\alpha + \alpha_1 - \alpha_4\big)}{\alpha_1\big(2\big(2j\lambda - (j-1)\alpha + \alpha_1\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\gamma_j' = \frac{\big(2j\lambda - (j-1)\alpha + \alpha_1\big)\big(2j\lambda - (j-1)\alpha\big)}{\alpha_4\big(2\big(2j\lambda - (j-1)\alpha + \alpha_1\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_4\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - (\alpha_4 + \alpha_3)\big)}{\alpha_2\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_4\big) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)},$$

$$\beta_j' = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_4\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - (\alpha_4 + \alpha_2)\big)}{\alpha_3\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_4\big) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)}$$

та обмеження на k:

якщо $\alpha_1 + \alpha_4 > \alpha_2 + \alpha_3$, то $k < \dfrac{\alpha_1}{2(\alpha_4 + \alpha_1) - \alpha}$, якщо ж $\alpha_1 + \alpha_4 \leq$ $\leq \alpha_2 + \alpha_3$, то $k \in \mathbb{N}$.

8. Для серії $d^{(2k,3)} = (2k, k, k-1, k, k)$:

$$\varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_2}{2n}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_3\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_3 - \alpha_4\big)}{\alpha_1\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_3\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_3\big)\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_3 - \alpha_1\big)}{\alpha_4\big(2\big((2j-1)\lambda - (j-1)\alpha - \alpha_3\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{\big(2j\lambda - j\alpha + \alpha_2\big)(2j\lambda - j\alpha + \alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_2\big(2(2j\lambda - j\alpha + \alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)},$$

$$\beta'_j = \frac{\big(2j\lambda - j\alpha + \alpha_2\big)(2j\lambda - j\alpha)}{\alpha_3\big(2(2j\lambda - j\alpha + \alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)}$$

та обмеження на k:

$$k < \frac{\alpha_2}{\alpha - 2(\alpha_1 + \alpha_3)}.$$

9. Для серії $d^{(2k,4)} = (2k, k, k, k-1, k)$:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_3}{2n}.$$

Відповідно

$$\gamma_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (n-1)\alpha - \alpha_2\big)\big((2j-1)\lambda - (n-1)\alpha - (\alpha_2 + \alpha_4)\big)}{\alpha_1\big(2\big((2j-1)\lambda - (n-1)\alpha - \alpha_2\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\gamma'_j = \frac{\big((2j-1)\lambda - (n-1)\alpha - \alpha_2\big)\big((2j-1)\lambda - (n-1)\alpha - (\alpha_2 + \alpha_1)\big)}{\alpha_4\big(2\big((2j-1)\lambda - (n-1)\alpha - \alpha_2\big) - (\alpha_1 + \alpha_4)\big)},$$

$$\beta_j = \frac{\big(2j\lambda - j\alpha + \alpha_3\big)(2j\lambda - j\alpha)}{\alpha_2\big(2(2j\lambda - j\alpha + \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)},$$

$$\beta'_j = \frac{\big(2j\lambda - j\alpha + \alpha_3\big)(2j\lambda - j\alpha + \alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_3\big(2(2j\lambda - j\alpha + \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_2)\big)}$$

та обмеження на k:

$$k < \frac{\alpha_3}{\alpha - 2(\alpha_1 + \alpha_3)}, \quad k < \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2}.$$

Таким чином ми побудували зображення для всіх можливих векторів узагальненої розмірності. Оскільки множина значень λ та обмеження на розмірності зображень збігаються з відповідними значеннями, описаними в роботі [3], то побудовані зображення для четвірки ортопроекторів $P_1, \ldots, P_4$, що задовольняють лінійне співвідношення (1), з точністю до унітарної еквівалентності, вичерпують всю множину можливих зображень.

Лему доведено.

Наведені явні формули для наборів ортопроекторів та лема 1 доводять теорему 1.

1. *Albeverio S., Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras // J. Algebra. – 2007. – **308**. – P. 567 – 582.
2. *Кругляк С. А., Рабанович В.И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20 – 35.
3. *Юсенко К. А.* Про четвірки проекторів, пов'язаних лінійним співвідношенням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1289 – 1295.
4. *Кириченко А. А.* Про лінійні комбінації ортопроекторів // Учен. зап. Тавр. нац. ун-та. – 2002. – **54**, № 2. – С. 31 – 39.
5. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. 1. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – Amsterdam: Harwood Acad. Publ., 1999. – **11**, Pt. 1. – 261 p.
6. *Kruglyak S. A., Nazarova L. A., Roiter A. V.* On regular locally scalar representations of the graph 4 in Hilbert spaces // arXiv: math. RT/0610931.

Одержано 21.09.09