УДК 517.9

О. В. Лопотко (Нац. лісотехн. ун-т України, Львів)

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРНИХ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

We obtain the integral representation of even positive definite functions of one variable such that the kernel $[k_1(x+y)+k_2(x-y)]$ is positively defined.

Получено интегральное представление четных положительно определенных функций одной переменной, для которых ядро $[k_1(x+y)+k_2(x-y)]$ положительно определено.

У праці [1] М. Г. Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер $K(x, y)$, $x, y \in R^1$. Ю. М. Березанський [2] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x, y)$, $x, y \in R^1$, за допомогою власних функцій диференціальних операторів. Цей метод полягає у введенні за ядром $K(x, y)$, $x, y \in R^1$, гільбертового простору і побудові розвинення за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів, які розглядаються у цьому просторі; відповідна рівність Парсеваля дає потрібне зображення. У даній роботі побудовано інтегральне зображення для парних додатно визначених функцій однієї змінної. Доведена теорема є узагальненням теорем 3.18, 3.19 [3, с. 697 – 699].

Означення. *Пару парних дійсних неперервних функцій* $k_1(x)$, $k_2(x)$, $x \in R^1$, *будемо називати парно додатно визначеними* (*п. д. в.*), *якщо для довільної фінітної функції* $u(x) \in C_0^\infty\left(R^1\right)$ *виконується нерівність*

$$\int_{R^1}\int_{R^1}\left[k_1(x+y)+k_2(x-y)\right]u(y)\,\overline{u(x)}\,dxdy \ \geq\ 0. \tag{1}$$

Тобто неперервне ядро $K(x, y) = \left[k_1(x+y)+k_2(x-y)\right]$ має бути додатно визначеним.

Теорема. *Кожна пара п. д. в. функцій* $k_1(x)$, $k_2(x)$, $x \in R^1$, *допускає зображення*

$$k_1(x)+k_2(0) = \int_{R^1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda}\,x}{2}\,d\rho_1(\lambda) + \int_{R^1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{2\lambda}\,d\rho_2(\lambda), \tag{2}$$

$$k_1(0)+k_2(x) = \int_{R^1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda}\,x}{2}\,d\rho_1(\lambda) - \int_{R^1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,x}{2\lambda}\,d\rho_2(\lambda), \tag{3}$$

де $d\rho_1(\lambda)$, $d\rho_2(\lambda)$ *— борелівські невід'ємні міри; якщо* $|k_1(x)| \leq ce^{Nx^2}$ *і* $|k_2(x)| \leq ce^{Nx^2}$, $c, N > 0$ *для всіх* $x \in R^1$, *то міри у* (2) *і* (3) *визначаються однозначно. Навпаки, функції вигляду* (2), (3) *є парою п. д. в. функцій.*

Доведення. За функціями $k_1(x)$, $k_2(x)$ введемо квазіскалярний добуток у просторі $L_2\left(R^1, dx\right)$:

© О. В. ЛОПОТКО, 2010

$$\langle u, v\rangle_{H_k} = \int_{R^1}\int_{R^1} K(x, y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy, \quad u, v \in C_0^\infty\big(R^1\big).$$

Після проведення факторизації й поповнення одержимо гільбертовий простір H_k.

Нехай тепер у просторі $L_2\big(R^1, dx\big)$ діє мінімальний оператор A, який відповідає виразу $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$. Цей оператор допускає продовження оснащення — в якості $Д$ можна взяти простір $C_0^\infty\big(R^1\big)$, топологізований належним чином. Звуження A^* на $Д$ збігається з відображенням $u \to L^+u$, $u \in C_0^\infty\big(R^1\big)$. Тоді умова комутування $k(x, y)$ і A еквівалентна ермітовості звуження A^* на $Д$ у просторі H_k, тобто рівності

$$\big\langle L^+u, v\big\rangle = \big\langle u, L^+v\big\rangle, \quad u, v \in C_0^\infty\big(R^1\big). \tag{4}$$

Для гладкого додатно визначеного ядра $k(x, y)$ рівність (4) виконується. Для довільного додатно визначеного ядра $k(x, y)$ рівність (4) також виконується. Дійсно,

$$\big\langle L^+u, v\big\rangle = \int_{R^1}\int_{R^1} [\, k_1(x+y) + k_2(x-y)\,] \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy =$$

$$= \int_{R^1}\int_{R^1} k_1(x+y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy + \int_{R^1}\int_{R^1} k_2(x-y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dx dy =$$

$$= \int_{R^1}\left(\int_{R^1} k_1(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(y-x)\, dy\right) \overline{v(x)}\, dx +$$

$$+ \int_{R^1}\left(\int_{R^1} k_2(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(y+x)\, dy\right) \overline{v(x)}\, dx =$$

$$= \int_{R^1}\left(\int_{R^1} k_1(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(y-x)\, dy\right) \overline{v(x)}\, dx +$$

$$+ \int_{R^1}\left(\int_{R^1} k_2(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(y+x)\, dy\right) \overline{v(x)}\, dx =$$

$$= \int_{R^1} k_1(y)\left(\int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(y-x)\, \overline{v(x)}\, dx\right) dy +$$

$$+ \int_{R^1} k_2(y)\left(\int_{R^1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(y+x)\, \overline{v(x)}\, dx\right) dy =$$

$$= \int_{R^1} k_1(y)\left(\int_{R^1} u(y-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{v(x)}\,dx\right)dy + \int_{R^1} k_2(y)\int_{R^1} u(y+x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{v(x)}\,dxdy =$$

$$= \int_{R^1}\int_{R^1}\left[k_1(x+y)+k_2(x-y)\right]u(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{v(x)}\,dxdy = \left\langle u, L^+v\right\rangle.$$

Таким чином, $K(x, y)$ комутує з $-\dfrac{d^2}{dx^2}$.

Тепер для ядра $K(x, y)$ можна застосувати теорему 3.9 [3, с. 669], якщо за фундаментальну систему розв'язків рівняння $-\dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$ взяти $\chi_0(x;\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x$; $\chi_1(x;\lambda) = \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}$, і одержати таке зображення:

$$\left[k_1(x+y)+k_2(x-y)\right] = \int_{R^1}\cos\sqrt{\lambda}x\,\cos\sqrt{\lambda}y\,d\sigma_{00}(\lambda) +$$
$$+ \int_{R^1}\cos\sqrt{\lambda}x\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}}\,d\sigma_{01}(\lambda) + \int_{R^1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}\,y\,d\sigma_{10}(\lambda) +$$
$$+ \int_{R^1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\,\sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda}\,d\sigma_{11}(\lambda). \tag{5}$$

Виконавши у (5) заміну x на $-x$, y на $-y$, одержимо зображення

$$\left[k_1(x+y)+k_2(x-y)\right] = \int_{R^1}\cos\sqrt{\lambda}x\,\cos\sqrt{\lambda}y\,d\sigma_{00}(\lambda) +$$
$$+ \int_{R^1}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x\,\sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda}\,d\sigma_{11}(\lambda). \tag{6}$$

Далі, поклавши у (6) $y = x$, знайдемо

$$\left[k(2x)+k(0)\right] = \int_{R^1}\cos^2\sqrt{\lambda}x\,d\sigma_{00}(\lambda) + \int_{R^1}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}x}{\lambda}\,d\sigma_{11}(\lambda),$$

або

$$k_1(x)+k_2(0) = \int_{R^1}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda}x}{2}\,d\rho_1(\lambda) + \int_{R^1}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}x}{2\lambda}\,d\rho_2(\lambda),$$

тобто зображення (2).

Якщо у (6) покладемо $y = -x$, то отримаємо

$$k_1(0)+k_2(2x) = \int_{R^1}\cos^2\sqrt{\lambda}x\,d\sigma_{00}(\lambda) - \int_{R^1}\frac{\sin^2\sqrt{\lambda}x}{\lambda}\,d\sigma_{11}(\lambda),$$

або

$$k_1(0) + k_2(x) = \int_{R^1} \frac{1 + \cos\sqrt{\lambda}x}{2} d\rho_1(\lambda) - \int_{R^1} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}x}{2\lambda} d\rho_2(\lambda),$$

тобто зображення (3).

Однозначність міри у (2), (3) випливає із теореми 4.3 [2, c. 708 – 710].

Останнє твердження теореми доводиться таким чином. Із (2) знаходимо

$$k_1(x + y) + k_2(0) = \int_{R^1} \frac{1 + \cos\sqrt{\lambda}(x + y)}{2} d\rho_1(\lambda) + \int_{R^1} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}(x + y)}{2\lambda} d\rho_2(\lambda). \quad (7)$$

Із (3) маємо

$$k_1(0) + k_2(x - y) = \int_{R^1} \frac{1 + \cos\sqrt{\lambda}(x - y)}{2} d\rho_1(\lambda) - \int_{R^1} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}(x - y)}{2\lambda} d\rho_2(\lambda). \quad (8)$$

Оскільки з (6) випливає рівність

$$k_1(0) + k_2(0) = \int_{R^1} d\rho_1(\lambda),$$

то, додавши (7) до (8), одержимо

$$k_1(x + y) + k_2(x - y) = \int_{R^1} \cos\sqrt{\lambda}x \cos\sqrt{\lambda}y \, d\rho_1(\lambda) + \int_{R^1} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \sin\sqrt{\lambda}y}{\lambda} d\rho_2(\lambda). \quad (9)$$

За допомогою рівності (9) перевіряємо умову (1).

Теорему доведено.

У випадку, коли у нерівності (1) $k_1(x) = 0$, одержимо зображення з теореми 3.11 [3] для парних функцій.

У випадку, коли $k_2(x) = 0$, одержимо зображення з теореми 3.17 [3] для парних функцій.

***Зауваження.* 1**. Якщо $k_1(x) = k_2(x) = (1/2)\,k(x)$, то одержимо зображення (3.87) із [3, c. 697].

2. Якщо $k_1(x) = (1/2)\,k(x)$, $k_2(x) = (-1/2)\,k(x)$ та $k(0) = 0$, то будемо мати зображення (3.92) із [3, c. 699].

1. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Докл. АН СССР. – 1946. – **53**, № 1. – С. 3 – 6.
2. *Березанский Ю. М.* Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // Там же. – 1956. – **108**, № 3. – С. 893 – 896.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.

Одержано 01.07.08,
після доопрацювання — 09.10.09