УДК 517.946

Г. М. Масмалиев (Бак. ун-т, Азербайджан),
Аг. Х. Ханмамедов (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

ОБ УСЛОВИЯХ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ С НУЛЕВОЙ ДИАГОНАЛЬЮ

Встановлено достатні умови дискретності спектра самоспряженого різницевого оператора другого порядку, що породжений напівнескінченною матрицею Якобі, головна діагональ якої складається з нулів.

Встановлено достатні умови дискретності спектра самоспряженого різницевого оператора другого порядку, що породжений напівнескінченною матрицею Якобі, головна діагональ якої складається з нулів.

Пусть α — некоторое целое число, а $\ell_2[\alpha,\infty)$ — гильбертово пространство последовательностей $y=\{y_n\}_\alpha^\infty$, такое, что $\sum_{n\geq\alpha}|y_n|^2<\infty$. Через L_α, $\tilde{L}_\alpha$ обозначим минимальные замкнутые операторы, порожденные в $\ell_2[\alpha,\infty)$ соответственно разностными выражениями

$$\begin{gathered}(l_\alpha y)_n=a_{n-1}y_{n-1}+a_ny_{n+1},\quad a_n>0,\quad n\geq\alpha,\\ \left(\tilde{l}_\alpha y\right)_n=a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1},\quad n\geq\alpha,\quad \bar{b}_n=b_n,\end{gathered}\tag{1}$$

и граничным условием

$$y_{\alpha-1}=0.\tag{2}$$

Будем предполагать операторы L_α, $\tilde{L}_\alpha$ неограниченными и самосопряженными. При этом область определения оператора $L_\alpha\big(\tilde{L}_\alpha\big)$ состоит [1] из тех $y\in\ell_2[\alpha,\infty)$, для которых $l_\alpha y\in\ell_2[\alpha,\infty)$ $\big(\tilde{l}_\alpha y\in\ell_2[\alpha,\infty)\big)$. Достаточное условие самосопряженности оператора $\tilde{L}_\alpha$, и тем самым оператора L_α, дает теорема Карлемана (см., например, [1]).

Теорема 1. *Если b_n произвольны, а a_n таковы, что $\sum_{n\geq\alpha}\dfrac{1}{a_n}=\infty$, то оператор $\tilde{L}_\alpha$ самосопряжен.*

В работе [2] (см. также [3]) на основании теоремы Реллиха [4] установлены условия дискретности спектра полуограниченного оператора $\tilde{L}_\alpha$: самосопряженный оператор $\tilde{L}_\alpha$ имеет чисто дискретный спектр, если выполняется одно из следующих условий:

1) $b_n-a_n-a_{n-1}\to+\infty$, $n\to\infty$;
2) $b_n-a_n^2\to+\infty$, $n\to\infty$.

Отметим также работу [5], в которой найдено достаточное условие дискретности спектра оператора $\tilde{L}_\alpha$ при $a_n\equiv1$.

Заметим, что установленные в работах [2 – 5] условия не позволяют исследовать дискретность спектра оператора L_α. Последний вопрос, насколько нам известно, остается малоисследованным.

В настоящей работе получены достаточные условия дискретности спектра оператора L_α. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $a_n\to+\infty$ при $n\to\infty$ и оператор L_α самосопряжен. Тогда спектр оператора L_α чисто дискретен, если выполняется одно из следующих условий*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{a_{\alpha+2n}}{a_{\alpha+1+2n}},\,\frac{a_{\alpha+2+2n}}{a_{\alpha+1+2n}}\right\}=q_{\alpha}^{+}<1, \tag{3}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{a_{\alpha+2n}}{a_{\alpha+1+2n}},\,\frac{a_{\alpha+2+2n}}{a_{\alpha+1+2n}}\right\}=q_{\alpha}^{-}>1. \tag{4}$$

В первом случае число 0 *является собственным значением оператора* L_α, *во втором — не является его собственным значением.*

Доказательство. Вначале будем считать, что вместо условий (3), (4) соответственно выполняются условия

$$\sup_{n\geq 0}\left\{\frac{a_{\alpha+2n}}{a_{\alpha+1+2n}},\,\frac{a_{\alpha+2+2n}}{a_{\alpha+1+2n}}\right\}=r_{\alpha}^{+}<1, \tag{3$'$}$$

$$\inf_{n\geq 0}\left\{\frac{a_{\alpha+2n}}{a_{\alpha+1+2n}},\,\frac{a_{\alpha+2+2n}}{a_{\alpha+1+2n}}\right\}=r_{\alpha}^{-}>1. \tag{4$'$}$$

Для определенности докажем теорему для оператора L_1. Обозначим через $\ell_2\left([0,\infty);C\right)$ гильбертово пространство вектор-последовательностей $y=\left\{y_{1,n},\right.$ $\left.y_{2,n}\right\}_0^\infty$ такое, что $\sum_{n\geq\alpha}\left\{\left|y_{1,n}\right|^2+\left|y_{2,n}\right|^2\right\}<\infty$, со скалярным произведением $\langle x,y\rangle=\sum_{n\geq\alpha}\left\{x_{1,n}\bar{y}_{1,n}+x_{2,n}\bar{y}_{2,n}\right\}$.

Рассмотрим оператор L_0. Положим

$$\begin{aligned} a_{1,n}&=a_{2n}, \quad n=0,1,\ldots,\\ a_{2,n}&=a_{2n+1}, \quad n=-1,0,\ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

и введем минимальный замкнутый оператор L_0', действующий в $\ell_2\left([0,\infty);C\right)$ по формуле

$$\left(L_0'y\right)_{1,n}=a_{1,n}y_{2,n}+a_{2,n-1}y_{2,n-1},$$

$$\left(L_0'y\right)_{2,n}=a_{1,n}y_{1,n}+a_{2,n}y_{1,n+1}, \quad n=0,1,\ldots,$$

причем при подсчете $\left(L_0'y\right)_{1,0}$ полагаем, что $y_{2,-1}=0$. В силу самосопряженности оператора L_0 и формул (5) оператор L_0' является самосопряженным и его область определения состоит из тех $y=\left\{y_{1,n},y_{2,n}\right\}_0^\infty\in\ell_2\left([0,\infty);C\right)$, для которых $\left\{\left(L_0'y\right)_{1,n},\left(L_0'y\right)_{2,n}\right\}_0^\infty\in\ell_2\left([0,\infty);C\right)$.

Пусть унитарный оператор U из $\ell_2\left[0,\infty\right)$ в $\ell_2\left([0,\infty);C\right)$ действует по формуле

$$U\left\{y_n\right\}_0^\infty=\left\{y_{2n},y_{2n+1}\right\}_0^\infty.$$

Легко видеть, что имеет место равенство $L_0'=UL_0U^{-1}$, согласно которому оператор L_0' унитарно эквивалентен L_0.

Введем теперь максимальные операторы A и B в $\ell_2\left([0,\infty);C\right)$ по формулам

$$\left(A\,y\right)_{1,n}=a_{1,n}y_{2,n}, \qquad \left(A\,y\right)_{2,n}=a_{1,n}y_{1,n},$$

$$\left(B\,y\right)_{1,n}=a_{2,n-1}y_{2,n-1}, \qquad \left(B\,y\right)_{2,n}=a_{2,n}y_{1,n+1}, \quad n=0,1,\ldots,$$

причем при подсчете $(By)_{1,0}$ полагаем, что $y_{2,-1} = 0$. Области определения операторов A и B состоят из тех $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_0^\infty \in \ell_2\left([0,\infty);C\right)$, для которых

$$\left\{(Ay)_{1,n}, (Ay)_{2,n}\right\}_0^\infty \in \ell_2\left([0,\infty);C\right)$$

и

$$\left\{(By)_{1,n}, (By)_{2,n}\right\}_0^\infty \in \ell_2\left([0,\infty);C\right)$$

соответственно. Заметим, что оператор A обратим, причем

$$\left(A^{-1}y\right)_{1,n} = a_{1,n}^{-1} y_{2,n}, \qquad \left(A^{-1}y\right)_{2,n} = a_{1,n}^{-1} y_{1,n}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Поскольку $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, из формул (5) следует, что оператор A^{-1} является вполне непрерывным.

С другой стороны,

$$\left(A^{-1}By\right)_{1,n} = \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} y_{1,n+1},$$

$$\left(A^{-1}By\right)_{1,n} = \frac{a_{2,n-1}}{a_{1,n}} y_{2,n-1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_{2,-1} = 0.$$

Теперь предположим, что неравенство $(4')$ выполняется при $\alpha = 0$. Тогда оператор $A^{-1}B$ является ограниченным, причем

$$\left\|A^{-1}B\right\| = \sup_{n \ge 0} \left\{\frac{a_{2,n}}{a_{1,n}}, \frac{a_{2,n}}{a_{2,n+1}}\right\} < 1. \tag{6}$$

Более того, оператор L_0' представим в виде

$$L_0' = A\left(E + A^{-1}B\right), \tag{7}$$

где E — единичный оператор. В силу (6), (7) и обратимости оператора A оператор L_0' имеет ограниченный обратный $\left(L_0'\right)^{-1} = \left(E + A^{-1}B\right)^{-1} A^{-1}$. Поскольку оператор A^{-1} вполне непрерывен, последнее равенство влечет вполне непрерывность оператора $\left(L_0'\right)^{-1}$. Отсюда следует, что спектр оператора L_0' дискретен и не содержит точку $\lambda = 0$. В силу унитарной эквивалентности L_0 и L_0' последнее свойство имеет также оператор L_0.

Пусть $R_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L_0. Следуя [1], вводим функцию Вейля $m_0(\lambda) = \langle R_\lambda \delta_0, \delta_0 \rangle$ оператора L_0, где $\delta_0 = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell_2[0,\infty)$. Поскольку оператор L_0 имеет чисто дискретный спектр, функция $m_0(\lambda)$ является [2] мероморфной, причем ее полюсы совпадают с собственными значениями оператора L_0 и $m_0(0) = 0$.

Обозначим через $m_1(\lambda)$ функцию Вейля оператора L_1. Известно [2], что имеет мест равенство

$$m_1(\lambda) = a_0^{-2}\left(\lambda + m_0^{-1}(\lambda)\right),$$

согласно которому $m_1(\lambda)$ тоже является мероморфной функцией, имеющей простой полюс в точке $\lambda = 0$. Следовательно, спектр оператора L_1 чисто дискретен и содержит точку $\lambda = 0$.

Таким образом, если справедливо $(4')$ при $\alpha = 0$, то оператор L_1 имеет чисто дискретный спектр, содержащий точку $\lambda = 0$. Однако оператор L_1 не зависит от a_0, и поэтому он заведомо имеет чисто дискретный спектр, содержащий точку $\lambda = 0$, если выполняется $(3')$ при $\alpha = 1$.

Пусть теперь выполняется условие $(4')$ при $\alpha = 1$. Последнее равносильно неравенству

$$\sup_{n \geq 0} \left\{ \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}}, \frac{a_{2,n}}{a_{2,n+1}} \right\} < 1.$$

Используя замены $a_{1,n} = a_{2n}$, $a_{2,n} = a_{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и унитарный оператор U' из $\ell_2 \left[1, \infty\right)$ в $\ell_2 \left(\left[1, \infty\right); C\right)$, действующий по формуле

$$U' \left\{y_n\right\}_1^\infty = \left\{y_{2n}, y_{2n-1}\right\}_1^\infty,$$

можем построить оператор $L_1' = U' L_1 \left(U'\right)^{-1}$. Проводя те же рассуждения, что и для оператора L_0', устанавливаем вполне непрерывность оператора $\left(L_1'\right)^{-1}$. Отсюда следует, что при выполнении неравенства $(4')$ при $\alpha = 1$ оператор L_1 имеет чисто дискретный спектр. Однако в этом случае число 0 не является собственным значением оператора L_1.

Наконец, предположим, что выполняется одно из условий (3) или (4). Тогда оператор L_α отличается от удовлетворяющего условию $(3')$ или $(4')$ оператора лишь конечномерным возмущением. Поэтому два последних оператора имеют [6] одинаковый существенный спектр, который является пустым множеством. Отсюда следует справедливость теоремы 2.

Замечание. При нарушении условий (3) и (4) теорема 2, вообще говоря, не является правильной. Например, для оператора L_0 с коэффициентом $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$, $n = 0, 1, \ldots$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}, \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \right\} = 1.$$

Однако такой оператор, как показано в [7], имеет непрерывный спектр, заполняющий всю действительную ось.

С другой стороны, если $a_n = n^\beta \left(1 + \dfrac{c_n}{n}\right)$, где $c_{n+2} = c_n$ и $|c_1 - c_2| \geq \beta - 1 > 0$, то снова получим $q_\alpha^+ = q_\alpha^- = 1$. Тем не менее, как следует из [8, 9], в этом случае оператор L_α самосопряжен и его спектр чисто дискретен.

1. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965.
2. *Гусейнов Г. Ш.* Определение бесконечной матрицы Якоби по двум спектрам // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 5. – P. 709 – 720.
3. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968.
4. *Молчанов А. М.* Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1953. – **2**. – С. 169 – 200.
5. *Кирш В., Молчанов С. А., Пастур Л. А.* Одномерный оператор Шредингера с неограниченным потенциалом: чисто точечный спектр // Функцион. анализ и его прил. – 1990. – **24**, № 3. – С. 14 – 25.
6. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Springer-Verlag, 1966.
7. *Березанский Ю. М.* Одно замечание относительно нагруженной цепочки Тоды // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 3. – С. 352 – 355.
8. *Костюченко А. Г., Мирзоев К. А.* Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. – 1999. – **33**, № 1. – С. 30 – 45.
9. *Сильва П. Октавио.* Асимптотические методы спектрального анализа эрмитовых матриц Якоби: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Санкт-Петербург, 2003.

Получено 01.07.09