УДК 517.5

В. И. Буслаев (Мат. ин-т РАН, Москва, Россия)

О ГАНКЕЛЕВЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ СВОИМ РАЗЛОЖЕНИЕМ В P-ДРОБЬ*

We obtain explicit formulas expressing the Hankel determinants of functions, which are given by their own expansion in a continuous P-fraction, in terms of parameters of the fraction. As corollaries, we establish an estimate from below for a set of singular points of functions of this sort, prove an analog of the Van Vliek theorem for P-fractions with ultimately periodic coefficients, present another proof of the Gonchar theorem on the Layton hypothesis, and obtain an estimate from above for a radius of meromorphy disk of a function given by C-fraction.

Одержано явні формули, що виражають ганкелеві визначники функцій, які задано своїм розвиненням у неперервний P-дріб, через параметри дробу. Як наслідок отримано оцінку знизу ємності множини особливих точок таких функцій, аналог теорем Ван Флека для P-дробів з граничними періодичними коефіцієнтами, інше доведення теореми Гончара про гіпотезу Лейтона, оцінку зверху радіуса кола мероморфності функції, що задана C-дробом.

1. Формулировка основной теоремы и ее доказательство. Напомним, что P-дробью называется непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1}{b_1(\xi)+\cfrac{a_2}{b_2(\xi)+\cfrac{a_3}{b_3(\xi)+\dots}}}, \qquad (1)$$

где $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b_k(\xi)$, $k = 1, 2, \dots$, — многочлены с единичным старшим коэффициентом.

Далее будем предполагать, что степени β_k многочленов $b_k(\xi)$ таковы, что $b_{k-1} + b_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta_0 = 0$. Тогда

$$n_k = n_{k-1} + \beta_k > n_{k-2}, \quad \text{где} \quad n_k = \beta_1 + \dots + \beta_k.$$

Из этого предположения и трехчленных рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} P_k(\xi) &= b_k(\xi)P_{k-1}(\xi) + a_k P_{k-2}(\xi), \\ Q_k(\xi) &= b_k(\xi)Q_{k-1}(\xi) + a_k Q_{k-2}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \qquad (2)$$

для числителей $\{P_k(\xi)\}_{k=1}^{\infty}$ и знаменателей $\{Q_k(\xi)\}_{k=1}^{\infty}$ подходящих дробей P-дроби (1) и начальных условий $P_{-1}(\xi) = 1$, $P_0(\xi) = 0$, $Q_{-1}(\xi) = 0$, $Q_0(\xi) = 1$ индукцией по $k = 1, 2, \dots$ получаем, что многочлен Q_k имеет степень n_k и единичный старший коэффициент.

Из известного равенства

$$\frac{P_k(\xi)}{Q_k(\xi)} - \frac{P_{k-1}(\xi)}{Q_{k-1}(\xi)} = \frac{A_k}{Q_{k-1}(\xi)Q_k(\xi)}, \qquad A_k = (-1)^{k-1}a_1\dots a_k$$

(являющегося простым следствием рекуррентных соотношений (2)), в окрестности точки $\xi = \infty$ получаем равенство

* Частично поддержана программой ОМН РАН „Современные проблемы теоретической математики" и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №08-01-00317 и №09-01-12160-офи-м).

$$\frac{P_k(\xi)}{Q_k(\xi)} - \frac{P_{k-1}(\xi)}{Q_{k-1}(\xi)} = A_k \xi^{-(n_{k-1}+n_k)} + \ldots . \tag{3}$$

Поскольку $n_{k-1} + n_k < n_k + n_{k+1}$, равенство (3) позволяет стандартным образом поставить в соответствие P-дроби (1) степенной ряд (возможно, формальный) $\sum_{p=1}^{\infty} f_p \xi^{-p}$ такой, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p \xi^{-p} - \frac{P_k(\xi)}{Q_k(\xi)} = A_{k+1} \xi^{-(n_k+n_{k+1})} + \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Легко видеть, что если P-дробь (1) сходится в окрестности точки $\xi = \infty$ к голоморфной функции f, то

$$f(\xi) = \frac{P_k(\xi)}{Q_k(\xi)} + \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{P_{j+1}(\xi)}{Q_{j+1}(\xi)} - \frac{P_j(\xi)}{Q_j(\xi)} \right) = \frac{P_k(\xi)}{Q_k(\xi)} + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{A_{j+1}}{Q_j(\xi) Q_{j+1}(\xi)}$$

и, следовательно, ряд, который ставится в соответствие P-дроби (1), является сходящимся степенным рядом, совпадающим с разложением в ряд предельной функции f в окрестности точки $\xi = \infty$.

Непрерывная дробь

$$\cfrac{a_1 z^{\alpha_1}}{1 + \cfrac{a_2 z^{\alpha_2}}{1 + \cfrac{a_3 z^{\alpha_3}}{1 + \ldots}}}, \tag{5}$$

где $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$, называется C-дробью. Если $\alpha_k = 1$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, то C-дробь называется правильной. Если натуральные показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ удовлетворяют условию

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} - \alpha_{k-3} + \ldots + (-1)^{k-1} \alpha_1 \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

то C-дробь (5) можно представить в виде

$$\cfrac{a_1 z^{\beta_0+\beta_1}}{1 + \cfrac{a_2 z^{\beta_1+\beta_2}}{1 + \cfrac{a_3 z^{\beta_2+\beta_3}}{1 + \ldots}}}, \tag{7}$$

где

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_k = \alpha_k - \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} - \alpha_{k-3} + \ldots + (-1)^{k-1} \alpha_1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

и эквивалентным преобразованием непрерывных дробей привести к P-дроби

$$\cfrac{a_1}{\xi^{\beta_1} + \cfrac{a_2}{\xi^{\beta_2} + \cfrac{a_3}{\xi^{\beta_3} + \ldots}}}, \tag{9}$$

где $\xi = z^{-1}$. При этом $\beta_k \in \mathbb{Z}_+$ и $\beta_{k-1} + \beta_k = \alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. В частности, правильная C-дробь

$$\cfrac{a_1 z}{1+\cfrac{a_2 z}{1+\cfrac{a_3 z}{1+\dots}}} \tag{10}$$

эквивалентным преобразованием приводится к P-дроби

$$\cfrac{a_1}{\xi+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{\xi+\dots}}}. \tag{11}$$

В теории непрерывных дробей важную роль играют явные формулы, позволяющие выразить ганкелевы определители ряда, соответствующего непрерывной дроби, через параметры непрерывной дроби. В частности, в случае правильной C-дроби (10), которой соответствует степенной ряд $\sum_{p=1}^{\infty} f_p z^p$, имеют место следующие формулы:

$$\begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_k \\ \dots & \dots & \dots \\ f_k & \dots & f_{2k-1} \end{vmatrix} = a_1^k (a_2 a_3)^{k-1} \dots (a_{2k-4} a_{2k-3})^2 (a_{2k-2} a_{2k-1})^1 \tag{12}$$

(см. [1, с. 221], где эти формулы приведены в виде равенств, эквивалентных равенствам (12)).

В данной статье формулы (12), справедливые для правильной C-дроби (10) или, что то же самое, для P-дроби (11), распространяются на случай общих P-дробей (1). А именно, в статье доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть степенной ряд* $f(\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p \xi^{-p}$ *соответствует P-дроби (1), где* $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b_k(\xi)$ *— многочлены с единичными старшими коэффициентом и степенями* β_k *такими, что* $\beta_{k-1} + \beta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta_0 = 0$. *Тогда с точностью до знака имеет место равенство*

$$\Delta_{n_k}^f = \prod_{j=1}^{k} a_j^{n_k - n_{j-1}}, \tag{13}$$

где $\Delta_n^f = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n & \dots & f_{2n-1} \end{vmatrix}$, $n_k = \beta_1 + \dots + \beta_k$.

Заметим, что для P-дроби (11) $n_{2k-1} = n_{2k} = k$ и равенства (13) совпадают с равенствами (12).

Явное выражение для знака в равенстве (13) не приводится в силу его громоздкости и ненужности в приводимых ниже приложениях теоремы. Вместе с тем отметим, что знак в равенстве (13) можно проследить по ходу доказательства теоремы.

Доказательство теоремы. Из равенства (4) при $k = 1$ видно, что первые $n_1 + n_2 - 1 \ge 2n_1 - 1$ коэффициентов ряда $\sum_{p=1}^{\infty} f_p \xi^{-p}$ совпадают с соответствующими коэффициентами первой подходящей дроби

$$\frac{P_1(\xi)}{Q_1(\xi)} = \frac{a_1}{b_1(\xi)} = a_1\xi^{-n_1} + \ldots .$$

Поэтому $f_k = 0$ при $k = 1, \ldots, n_1 - 1$ и $f_{n_1} = a_1$. Следовательно,

$$\Delta^f_{n_1} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & \ldots & f_{2n_1-1} \end{vmatrix} = a_1^{n_1} \tag{14}$$

(с точностью до знака). Покажем, что при всех $j = 1, 2, \ldots$ с точностью до знака имеют место равенства

$$\Delta^f_{n_{j+1}} = (a_1 \ldots a_{j+1})^{n_{j+1}-n_j} \Delta^f_{n_j}. \tag{15}$$

Действительно, если $n_{j+1} = n_j$, то равенство (15) тривиально. Поэтому будем предполагать, что $n_{j+1} > n_j$. Умножая равенство (4) при $k = j$ на

$$Q_j(\xi) = \xi^{n_j} + q_{j,1}\xi^{n_j-1} + \ldots + q_{j,n_j},$$

в окрестности точки $\xi = \infty$ получаем равенство

$$(q_{j,n_j} + \ldots + q_{j,1}\xi^{n_j-1} + \xi^{n_j}) \sum_{p=1}^{\infty} f_p \xi^{-p} - P_j(\xi) = A_{j+1}\xi^{-n_{j+1}} + \ldots . \tag{16}$$

Приравнивая между собой коэффициенты при $\xi^{-1}, \ldots, \xi^{-n_{j+1}}$ в левой и правой частях равенства (16), получаем систему равенств

$$\begin{gathered} q_{j,n_j} f_1 + \ldots + q_{j,1} f_{n_j} + f_{n_j+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{j,n_j} f_{n_{j+1}-1} + \ldots + q_{j,1} f_{n_{j+1}+n_j-2} + f_{n_{j+1}+n_j-1} = 0, \\ q_{j,n_j} f_{n_{j+1}} + \ldots + q_{j,1} f_{n_{j+1}+n_j-1} + f_{n_{j+1}+n_j} = A_{j+1}. \end{gathered} \tag{17}$$

Не меняя значения определителя

$$\Delta^f_{n_{j+1}} = \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_{n_j} & f_{n_j+1} & \ldots & f_{n_{j+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n_j} & \ldots & f_{2n_j-1} & f_{2n_j} & \ldots & f_{n_j+n_{j+1}-1} \\ f_{n_j+1} & \ldots & f_{2n_j} & f_{2n_j+1} & \ldots & f_{n_j+n_{j+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n_{j+1}} & \ldots & f_{n_{j+1}+n_j-1} & f_{n_j+n_{j+1}} & \ldots & f_{2n_{j+1}-1} \end{vmatrix},$$

добавим к его последнему, n_{j+1}-му, столбцу линейную комбинацию предыдущих n_j столбцов с коэффициентами $q_{j,1}, \ldots, q_{j,n_j}$. Затем сделаем то же самое с предпоследним, $(n_{j+1}-1)$-м, столбцом и т. д. до (n_j+1)-го столбца включительно. Тогда первые n_j столбцов определителя $\Delta^f_{n_{j+1}}$ не изменятся, в силу равенств (17) $(n_{j+1}-p+1)$-й элемент (при нумерации сверху вниз) (n_j+p)-го столбца будет равен A_{j+1}, а все элементы выше в этом столбце будут равны нулю $(p=1,\dots,n_{j+1}-n_j)$. Отсюда получаем (с точностью до знака) равенство $\Delta^f_{n_{j+1}} = \Delta^f_{n_j} A_{j+1}^{n_{j+1}-n_j}$, совпадающее с учетом определения чисел $A_{j+1} = (-1)^j a_1\dots a_{j+1}$ с равенством (15) (с точностью до знака).

Последовательно используя равенства (15) при $j = k-1,\dots,1$ и учитывая равенство (14), получаем равенство

$$\Delta^f_{n_k} = \prod_{j=1}^{k} (a_1\dots a_j)^{n_j-n_{j-1}}$$

(с точностью до знака), совпадающее с равенством (13).

Теорема доказана.

Известная теорема Полиа [2] утверждает, что если K — компакт комплексной плоскости и f — функция, голоморфная в точке $\xi=\infty$ и допускающая мероморфное продолжение в $\mathbb{C}/K$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\Delta_n^f\right|^{1/n^2} \le \operatorname{cap}(K), \qquad (18)$$

где Δ^f_n — определенные выше ганкелевы определители функции $f(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p\xi^{-p}$, $\operatorname{cap}(K)$ — (логарифмическая) емкость компакта K. Поэтому как следствие доказанной теоремы и теоремы Полиа получаем два следующих утверждения.

Следствие 1. *Пусть P-дроби (1), где $a_k \in \mathbb{C}/\{0\}$, $b_k(\xi)$ — многочлены с единичным старшим коэффициентом и степенями β_k такими, что $\beta_{k-1}+\beta_k>0$, $k=1,2,\dots$, $\beta_0=0$, соответствует неформальный степенной ряд, сходящийся в окрестности точки $\xi=\infty$ к функции, допускающей мероморфное продолжение в некоторую область $G\ni\infty$. Тогда*

$$\operatorname{cap}(\mathbb{C}/G) \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\prod_{j=1}^{k} a_j^{n_k-n_{j-1}}\right|^{1/n_k^2} \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \left|a_1a_2\dots a_k\right|^{1/(n_{k-1}+n_k)}, \qquad (19)$$

где $n_k=\beta_1+\dots+\beta_k$.

Действительно, первое неравенство в (19) следует из (18) и (13). Чтобы убедиться в справедливости второго неравенства в (19), положим $A = \overline{\lim}_{k\to\infty}\left|a_1a_2\dots a_k\right|^{1/(n_{k-1}+n_k)}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ при всех $j\ge j_0$ выполняется неравенство

$$\left|a_1\dots a_j\right|^{n_j-n_{j-1}} \le (A-\varepsilon)^{n_j^2-n_{j-1}^2}.$$

Следовательно,

$$\left|\prod_{j=1}^{k} a_j^{n_k-n_{j-1}}\right| = \left|\prod_{j=1}^{k}(a_1\dots a_j)^{n_j-n_{j-1}}\right| \ge$$

$$\ge \left|\prod_{j=1}^{j_0-1}(a_1\dots a_j)^{n_j-n_{j-1}}\right|(A-\varepsilon)^{\sum_{j=j_0}^{k}(n_j^2-n_{j-1}^2)} \ge C(A-\varepsilon)^{n_k^2},$$

где C не зависит от n_k. В силу произвольности числа ε отсюда следует, что

$$A \le \varliminf_{k\to\infty}\left|\prod_{j=1}^{k} a_j^{n_k-n_{j-1}}\right|^{1/n_k^2} \le \varlimsup_{k\to\infty}\left|\prod_{j=1}^{k} a_j^{n_k-n_{j-1}}\right|^{1/n_k^2}.$$

Следствие 1 доказано.

Sleds t vye 2. *Пусть P-дроби (1), где $a_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $b_k(\xi)$ — многочлены с единичным старшим коэффициентом и степенями β_k такими, что $\beta_{k-1}+\beta_k>0$, $k=1,2,\dots$, $\beta_0=0$, соответствует неформальный степенной ряд, сходящийся в окрестности точки $\xi=\infty$ к функции f, допускающей мероморфное продолжение в некоторую область $G\ni\infty$, границей которой является кривая J такая, что*

$$\operatorname{cap}(J) = \varliminf_{k\to\infty}|a_1a_2\dots a_k|^{1/(n_{k-1}+n_k)}. \qquad (20)$$

Тогда функция f не может быть мероморфной функцией ни в какой области $G^* = G\cup\{|z-z_0|<\varepsilon\}$, где $z_0\in J$, $\varepsilon>0$.

Действительно, заметим, что имеет место строгое неравенство

$$\operatorname{cap}(\mathbb{C}\setminus G^*) < \operatorname{cap}(J).$$

Поэтому, предполагая, что функция f мероморфна в области G^*, используя неравенство (19), в котором компакт $\mathbb{C}\setminus G$ заменяется компактом $\mathbb{C}\setminus G^*$, и учитывая равенство (20), получаем противоречие

$$\operatorname{cap}(J) > \operatorname{cap}(\mathbb{C}\setminus G^*) \ge \varliminf_{k\to\infty}|a_1a_2\dots a_k|^{1/(n_{k-1}+n_k)} = \operatorname{cap}(J),$$

что и завершает доказательство следствия 2.

Если кривая J является замкнутой жордановой кривой, то в этом случае следствие 2 можно сформулировать следующим образом: *все точки кривой J являются особыми точками мероморфной функции f (а область G — естественной областью существования этой функции).*

В следующем пункте будет доказано, что применительно к P-дробям, эквивалентным C-дробям, следствие 2 влечет за собой теорему Гончара [3] о положительном ответе на гипотезу Лейтона для неубывающей последовательности показателей C-дроби.

2. Другое доказательство теоремы Гончара о гипотезе Лейтона. В монографии Уолла [4] отмечено, что из результатов Рамануджана следует, что функция, заданная непрерывной дробью Рамануджана

$$1+\cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{1+\dots}},$$

мероморфна в круге $|z|<1$ и не имеет мероморфного продолжения за пределы этого круга.

В 1940 г. Лейтон высказал гипотезу, что аналогичное утверждение справедливо для функций, заданных непрерывными C-дробями (5) такими, что

$$\alpha_k \in N,\quad \lim_{k\to\infty}\alpha_k = \infty,\quad a_k\in\mathbb{C}/\{0\},\quad \lim_{k\to\infty}|a_k|^{1/\alpha_k} = 1. \qquad (21)$$

Равномерная сходимость C-дроби (5) с наложенными на ее параметры условиями (21) в сферической метрике внутри (на компактных подмножествах) круга $|z|<1$ следует, например, из известного критерия Ворпицкого [5] сходимости непрерывных дробей.

Критерий Ворпицкого. *Непрерывная дробь* $\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1+\ldots}}}$ *сходится, если* $|a_n|\le 1/4$ *при всех достаточно больших* n.

Таким образом, основное содержание гипотезы Лейтона сосредоточено в утверждении о невозможности мероморфного продолжения функции, заданной C-дробью (5) с условиями (21), за пределы круга $|z|<1$.

Для неубывающей последовательности показателей $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ гипотеза Лейтона доказана А. Гончаром [3].

Теорема (Гончар). *Круг $|z|<1$ является естественной областью существования мероморфной функции, заданной C-дробью (5) с условиями (21) и*

$$\alpha_k-\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}-\alpha_{k-3}+\ldots+(-1)^{k-1}\alpha_1>0,\quad k=1,2,\ldots. \qquad (22)$$

Очевидно, что любая неубывающая последовательность показателей в совокупности с ни на что не влияющим предположением $\alpha_2>\alpha_1$ удовлетворяет условию (22). Поэтому теорема Гончара дает положительный ответ на гипотезу Лейтона для неубывающей последовательности показателей $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$.

Ранее Скотт и Уолл [6] доказали гипотезу Лейтона для весьма специального случая $\alpha_k=m^k$ и $a_k=a$, $k=1,2,\ldots$, где либо $a\in\mathbb{R}/0$, m — нечетное целое, большее или равное 3, либо $a<0$, m — целое, большее или равное 2.

Трон [7] доказал гипотезу Лейтона для неубывающей последовательности показателей $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ при сильном дополнительном предположении существования последовательности $\{\mu_k\}$ натуральных чисел такой, что $\lim_{k\to\infty}\mu_k = \infty$ и μ_k делит α_n при всех $n\ge n(k)$.

Заметим, что теорема Гончара является частным случаем сформулированного в предыдущем пункте следствия 2 теоремы, причем строгие неравенства (22) в теореме Гончара можно заменить нестрогими неравенствами (6). Действительно, как отмечалось в первом пункте, C-дробь (5) с показателями, удовлетворяющими условию (6), эквивалентна P-дроби (9), где $\beta_k\in\mathbb{Z}_+$ и $\beta_{k-1}+\beta_k=\alpha_k>0$, $k=1,2,\ldots$.

Поскольку P-дробь (9) эквивалентна C-дроби (5), к которой можно применить в силу условий (21) критерий Ворпицкого, P-дробь (9) сходится равномерно в сферической метрике на компактах вне единичного круга к мероморфной функции.

Так как емкость окружности $J = \{|z| = 1\}$ равна 1 (см., например, [8]), то условие $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/\alpha_k} = 1$ (см. (21)) влечет за собой равенство

$$\mathrm{cap}(J) = 1 = \lim_{k\to\infty}|a_k|^{1/\alpha_k} = \lim_{k\to\infty}|a_1\dots a_k|^{1/(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}.$$

Учитывая, что

$$n_{k-1}+n_k = (\beta_1+\dots+\beta_{k-1}) + (\beta_1+\dots+\beta_k) = \alpha_1+\dots+\alpha_k, \qquad (23)$$

последнее равенство можно записать в виде равенства

$$\mathrm{cap}(J) = \lim_{k\to\infty}|a_1\dots a_k|^{1/(n_{k-1}+n_k)},$$

которое влечет за собой равенство (20).

Таким образом, теорема Гончара является частным случаем следствия 2 доказанной теоремы.

3. Оценка сверху радиуса круга мероморфности функции, заданной C-дробью. Пусть F — функция, голоморфная в точке $z = 0$. Обозначим через $R(F)$ радиус круга мероморфности функции F, т.е. максимального круга с центром в точке $z = 0$, в который функция F может быть мероморфно продолжена.

В 1967 г. Трон и Каллас [9] получили оценку сверху радиуса круга мероморфности функции, заданной правильной C-дробью (10).

Теорема (Трон, Каллас). *Пусть функция F задается правильной C-дробью (10) с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ такими, что существует отличный от нуля предел $\lim_{k\to\infty}|a_k|$. Тогда*

$$R(F) \le 2\left(\lim_{k\to\infty}|a_k|\right)^{-1}. \qquad (24)$$

Эта теорема является следствием их более общей теоремы.

Теорема (Трон, Каллас). *Пусть функция F задается правильной C-дробью (10) с ограниченными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Тогда*

$$R(F) \le \inf_{m>0}\frac{1+q}{mq^2}, \quad \text{где} \quad q = \varlimsup_{\mu\to\infty}\left|\prod_{\substack{v=1\\ |a_v|\le m}}^{2\mu+1}\frac{|a_v|}{m}\right|^{1/2\mu}.$$

А. Гончар показал (без последующей публикации), что оценку (24) можно улучшить в два раза, а именно, в предположениях первой из теорем Трона – Калласа имеет место неравенство

$$R(F) \le \left(\lim_{k\to\infty}|a_k|\right)^{-1}. \qquad (25)$$

Как следствие доказанной в первом пункте теоремы справедливо следующее утверждение.

Sleds t vye 3. *Пусть функция $f(\xi)$ задается P-дробью (1) с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и многочленами $b_k(\xi)$ с единичными старшими коэффициентом и степенями β_k такими, что $\beta_{k-1}+\beta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta_0 = 0$, и пусть $F(z) = f(z^{-1})$. Тогда*

$$R(F) \;\le\; \left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|a_1\dots a_k\right|^{1/(n_{k-1}+n_k)}\right)^{-1}, \tag{26}$$

где $n_k = \beta_1+\ldots+\beta_k$.

Действительно, функция f мероморфна в области $G = \left\{|\xi| > R^{-1}(F)\right\}$. Учитывая, что емкость круга равна его радиусу, из неравенства (19) получаем неравенство

$$R(F) = \operatorname{cap}(\mathbb{C}/G)^{-1} \le \left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|a_1\dots a_k\right|^{1/(n_{k-1}+n_k)}\right)^{-1},$$

совпадающее с неравенством (26).

Поскольку правильная C-дробь (10) эквивалентна P-дроби (11), для которой $\beta_{2k-1} = 1$, $\beta_{2k} = 0$, $n_{k-1}+n_k = k$, $k = 1, 2, \ldots$, из неравенства (26) получаем следующую оценку радиуса мероморфности функции F, заданной правильной C-дробью (10):

$$R(F) \;\le\; \left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|a_1\dots a_k\right|^{1/k}\right)^{-1}, \tag{27}$$

дающую, в частности, оценку Гончара (25).

Заметим, что оценка (27) является точной. Действительно, в работе автора [10] показано, что при всех $q = \exp(2\pi i\tau)$, где τ — вещественное иррациональное число, непрерывная дробь Роджерса – Рамануджана

$$1+\cfrac{qz}{1+\cfrac{q^2z}{1+\ldots}}$$

сходится равномерно в сферической метрике к мероморфной функции $F_q(z)$ на компактах, лежащих в единичном круге $\left\{|z|<1\right\}$. Поэтому

$$R(F_q) \;\ge\; 1 = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|q^1\dots q^k\right|^{1/k}\right)^{-1} = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|a_1\dots a_k\right|^{1/k}\right)^{-1}.$$

Следовательно, оценку (27) улучшить нельзя.

4. Сходимость предельно периодических P-дробей. Еще одно следствие теоремы связано с известной теоремой Ван Флека [11].

Теорема (Ван Флек). *Пусть коэффициенты правильной C-дроби (10) имеют предел $\lim_{k\to\infty} a_k = a \ne 0$. Тогда C-дробь (10) сходится равномерно в сферической метрике к мероморфной функции F на компактах, лежащих в области $\mathbb{C}/J$, где $J = \left\{z = -t/4a,\ t \ge 1\right\}$.*

А. Гончар дополнил (в устном виде) теорему Ван Флека следующим важным замечанием, показывающим, что предельная функция не может иметь мероморфного продолжения ни через какой интервал разреза J.

Дополнение Гончара к теореме Ван Флека. *В предположениях и обозначениях теоремы Ван Флека функция F не может быть мероморфной функцией ни в какой области $(\mathbb{C}/J)\cup\left\{|z-z_0|<\varepsilon\right\}$, где $z_0 \in J$, $\varepsilon > 0$.*

В работе [12] автор распространил теорему Ван Флека и дополнение Гончара к ней на случай правильных C-дробей с предельно периодическими коэффициентами. В этом пункте теорема Ван Флека и дополнение Гончара к ней распространяются на случай предельно периодических P-дробей. А именно, имеет место следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* P-*дробь* (1), *где* $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b_k(\xi)$ — *многочлены с единичным старшим коэффициентом и степенями* β_k *такими, что* $\beta_{k-1} + \beta_k \geq 1$, $k = 1, 2, \ldots$, $\beta_0 = 0$, *имеет периодические пределы*

$$\lim_{k\to\infty} a_{km+l} = a_l^* \neq 0, \quad \lim_{k\to\infty} b_{km+l}(\xi) = b_l^*(\xi), \quad l = 1, \ldots, m. \tag{28}$$

Тогда P-*дробь* (1) *равномерно сходится в сферической метрике к мероморфной функции* f *на компактах, лежащих в области* $G = \mathbb{C} \setminus (J \cup J^*)$, *где* J^* — *некоторое конечное множество,*

$$J = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : I(\xi)^2 \in \left[0, 4(-1)^m a_1^* \ldots a_m^* \right] \right\}, \tag{29}$$

$$I(\xi) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & a_1^* \\ 1 & b_1^*(\xi) \end{pmatrix} \times \ldots \times \begin{pmatrix} 0 & a_m^* \\ 1 & b_m^*(\xi) \end{pmatrix} \right).$$

При этом

$$\mathrm{cap}(J) = \left| a_1^* \ldots a_m^* \right|^{1/2(\deg b_1^* + \ldots + \deg b_m^*)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \Delta_n^f \right|^{1/n^2}, \tag{30}$$

функция f *допускает мероморфное продолжение в точки множества* J^* *и не может быть мероморфной функцией ни в какой области* $G^* = (\mathbb{C} \setminus J) \cup \cup \left\{ |\xi - \xi_0| < \varepsilon \right\}$, $\xi_0 \in J$, $\varepsilon > 0$.

Действительно, сходимость P-дроби (1) вне множества $J \cup J^*$ и мероморфное продолжение функции f в точки конечного множества J^* (которое можно определить явным образом) доказаны в работе автора [12].

Для получения утверждения о невозможности функции f быть мероморфной функцией в окрестности любой точки $\xi_0 \in J$ заметим, что, используя рекуррентные соотношения (2), примененные к числителям $P_k^*(\xi)$ и знаменателям $Q_k^*(\xi)$, $k = 1, 2, \ldots$, k-й подходящей дроби периодической P-дроби

$$\cfrac{a_1^*}{b_1^*(\xi) + \cfrac{a_2^*}{b_2^*(\xi) + \ldots \cfrac{a_m^*}{b_m^*(\xi) + \cfrac{a_1^*}{b_1^*(\xi) + \ldots}}}}, \tag{31}$$

индуктивным рассуждением можно показать, что

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1^* \\ 1 & b_1^*(\xi) \end{pmatrix} \times \ldots \times \begin{pmatrix} 0 & a_m^* \\ 1 & b_m^*(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{m-1}^*(\xi) & P_m^*(\xi) \\ Q_{m-1}^*(\xi) & Q_m^*(\xi) \end{pmatrix},$$

$$\deg Q_m^* = \deg b_1^* + \ldots + \deg b_m^*, \qquad \deg P_{m-1}^* \leq \deg b_2^* + \ldots + \deg b_{m-1}^*.$$

Поскольку

$$\deg b_2^* + \ldots + \deg b_{m-1}^* \;<\; \deg b_1^* + \ldots + \deg b_m^*,$$

отсюда имеем неравенство $\deg P_{m-1}^* < \deg Q_m^*$ и равенство

$$\deg I \;=\; \deg\left(P_{m-1}^* + Q_m^*\right) \;=\; \deg Q_m^* \;=\; \deg b_1^* + \ldots + \deg b_m^*.$$

Из определения (29) множества J и известных свойств емкости множеств (см., например, [8]) следует, что

$$\operatorname{cap}(J) \;=\; \operatorname{cap}\left(\left[\,0,\ 4(-1)^m a_1^* \ldots a_m^*\,\right]\right)^{1/2\deg I} \;=\; \left|a_1^* \ldots a_m^*\right|^{1/2(\deg b_1^* + \ldots + \deg b_m^*)}.$$

Таким образом, первое из равенств (30) доказано. С учетом равенства (23) отсюда в силу предельной периодичности P-дроби (1) (см. равенства (28)) получаем также и равенство

$$\operatorname{cap}(J) \;=\; \lim_{k\to\infty} \left|a_1 \ldots a_k\right|^{1/(n_{k-1}+n_k)}. \tag{32}$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (20), согласно следствию 2 получаем, что функция f не может быть мероморфной функцией ни в какой области, указанной в следствии 4.

Рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (19), показывают, что

$$\lim_{k\to\infty} \left|a_1 \ldots a_k\right|^{1/(n_{k-1}+n_k)} \;=\; \lim_{k\to\infty} \left|\prod_{j=1}^{k} a_j^{n_k - n_{j-1}}\right|^{1/n_k^2}.$$

Поэтому из равенств (32), (13) и (18) имеем цепочку неравенств

$$\operatorname{cap}(J) \;=\; \lim_{k\to\infty} \left|\prod_{j=1}^{k} a_j^{n_k - n_{j-1}}\right|^{1/n_k^2} \;=\; \lim_{k\to\infty} \left|\Delta_{n_k}^f\right|^{1/n_k^2} \;\le\; \varlimsup_{n\to\infty} \left|\Delta_n^f\right|^{1/n^2} \;\le\; \operatorname{cap}(J).$$

Так как левая и правая части в этой цепочке неравенств совпадают, все неравенства в цепочке можно заменить на точные равенства. Следовательно, $\operatorname{cap}(J) =$ $= \varlimsup_{n\to\infty} \left|\Delta_n^f\right|^{1/n^2}$. Таким образом, равенства (30) доказаны.

Замечание **1.** Обозначим через f^* функцию, к которой сходится периодическая P-дробь (31). Легко видеть, что функция $f^*(\xi)$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$f^*(\xi) \;=\; \cfrac{a_1^*}{b_1^*(\xi) + \cfrac{a_2^*}{b_2^*(\xi) + \ldots \cfrac{a_m^*}{b_m^*(\xi) + f^*(\xi)}}}$$

с полиномиальными коэффициентами. По следствию 4, примененному к периодической P-дроби (31), гиперэллиптическая функция f^* является однозначной мероморфной функцией в области $\mathbb{C} \setminus J$. Как и в работе Г. Шталя [13], обозначим через $\tilde{J}$ какой-либо разрез комплексной плоскости, обладающий этим же свойством: функция f^* является однозначной мероморфной функцией в области $\mathbb{C} \setminus \tilde{J}$. Согласно теореме Полиа

$$\mathrm{cap}(\tilde{J}) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\Delta_n^f\right|^{1/n^2},$$

а согласно равенству (30)

$$\mathrm{cap}(J) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\Delta_n^f\right|^{1/n^2}.$$

Поэтому разрез J, определенный равенством (29), можно охарактеризовать следующим образом. *Разрез J — это разрез минимальной емкости среди всех разрезов комплексной плоскости, превращающих гиперэллиптическую функцию f^* в однозначную мероморфную функцию.*

Замечание 2. В силу эквивалентности P-дроби (9) и C-дроби (7) утверждение, аналогичное следствию 4, можно сформулировать для предельно периодических C-дробей (5) с показателями, удовлетворяющими условию (6).

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. – М.: Мир, 1985.
2. *Polya G.* Über gewisse notwendige Determinantkriterien für die Forsetzbarkeit einer Potenzreihe // Math. Ann. – 1928. – **99**. – S. 687 – 706.
3. *Гончар А. А.* Об особых точках мероморфных функций, заданных своим разложением в C-дробь // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 10. – С. 3 – 14.
4. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948.
5. *Worpitsky J.* Untersuchungen über die Entwickelung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbruche // Friedrichs–Gymnasium rund Realschule Jahresbericht. – Berlin, 1865. – S. 3 – 39.
6. *Scott W. T., Wall H. S.* Continued fraction expansions for arbitrary power series // Ann. Math. – 1940. – **41**, № 2. – P. 328 – 349.
7. *Thron W. J.* Twin convergence regions for continued fractions $b_0 + \mathbf{K}(1, b_n)$, II // Amer. J. Math. – 1949. – **71**. – P. 112 – 120.
8. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.
9. *Callas N. P., Thron W. J.* Singularities of meromorphic functions represented by regular C-fractions // Kgl. norske vid. selsk. skr. (Trondheim). – 1967. – № 6. – P. 11.
10. *Буслаев В. И.* О сходимости непрерывной дроби Роджерса – Рамануджана // Мат. сб. – 2003. – **194**, № 6. – С. 43 – 66.
11. *Van Vleck E. V.* On the convergence of algebraic continued functions whose coefficients have limiting values // Trans. Amer. Math. Soc. – 1904. – **5**, № 5. – P. 253 – 262.
12. *Буслаев В. И.* О теореме Ван Флека для правильных C-дробей с предельно периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат. – 2001. – **65**, № 4. – С. 35 – 48.
13. *Stahl H.* Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I, II // Constr. Approxim. – 1986. – **2**. – P. 225 – 251.

Получено 28.12.09