УДК 517.5

В. П. Моторный (Днепропетр. нац. ун-т),
О. В. Моторная (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
П. К. Нитиема (Ун-т Уагадугу, Буркина-Фасо)

ОБ ОДНОСТОРОННЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ СТУПЕНЬКИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В СРЕДНЕМ

An asymptotically sharp estimate is obtained for the best one-sided approximation of a step-like data by algebraic polynomials in the space L_1.

Одержано асимптотично точну оцінку найкращого одностороннього наближення сходинки алгебраїчними многочленами у просторі L_1.

Введение. Пусть P_n — множество всех алгебраических многочленов степени не выше $n-1$ и

$$E_n^+(f)_1 = \inf\left\{\int\limits_{-1}^{1}\{P(t)-f(t)\}dt : P\in P_n, \quad P(t)\ge f(t), \quad t\in[-1;1]\right\}$$

$\Bigg($соответственно

$$E_n^-(f)_1 = \inf\left\{\int\limits_{-1}^{1}\{f(t)-P(t)\}dt : P\in P_n, \quad P(t)\le f(t), \quad t\in[-1;1\right\}\Bigg)$$

— наилучшее сверху (соответственно снизу) приближение ограниченной измеримой функции f алгебраическими многочленами. Положим

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

Тогда для любого натурального числа r функция $(x-a)_+^{r-1}$ называется усеченной степенью, а в случае $r=1$ — ступенькой.

Оценки для наилучших односторонних приближений усеченных степеней $(x-$ $-a)_+^{r-1}$ алгебраическими многочленами в пространстве L_1 получены в работах [1–3]. В работах [1, 2] были доказаны неравенства

$$\frac{\sup_t(\mp 2B_r(t))\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r+1}}{n^r} - C_r\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{(r-2)_+}}{n^{r+1}} \le E_n^{\mp}\left(\frac{(x-a)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)_1 \le$$

$$\le \frac{\sup_t(\mp 2B_r(t))\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{n^r} + C_r\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{(r-2)_+}}{n^{r+1}}, \qquad (1)$$

где $B_r(t)$ — функции Бернулли,

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx-\pi r/2)}{k^r},$$

а величина C_r зависит только от r.

Главные части левой и правой частей неравенств (1) совпадают при $a = 0$, что позволило получить асимптотически точную оценку величины $E_n^{\mp}(W_1^r)_1$,

$$E_n^{\mp}(W_1^r)_1 = \frac{\|2B_r\|_C}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

в которой величина, определяющая остаточный член, зависит только от r. Класс W_p^r, $r = 1, \ldots, p \geq 1$, состоит из функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_1 \leq 1$, а

$$E_n^{\mp}(W_1^r)_1 = \sup_{f \in W_p^r} E_n^{\pm}(f)_1.$$

Если $a \neq 0$, то главные части неравенств (1) разные. В работе [3] построен метод приближения усеченных степеней, уточняющий оценку (1). Этот результат заключается в следующем.

Для любого натурального r и $a \in (-1, 1)$ существуют алгебраические полиномы $P_{n,r,a}^{+}(x)$ (соответственно $P_{n,r,a}^{-}(x)$) степени не выше n, приближающие усеченную степень сверху (соответственно снизу) такие, что справедливо равенство

$$\left\| \frac{(x-a)_+^{r-1}}{(r-1)!} - P_{n,r,a}^{\mp}(x) \right\|_1 =$$

$$= \frac{\sup_t(\mp 2B_r(t))\left(\sqrt{1-a^2}\,\right)^r}{n^r} + O\left(\frac{\ln n\left(\sqrt{1-a^2}\,\right)^{(r-2)_+}}{n^{r+1}}\right), \qquad (2)$$

где величина, определяющая остаточный член, зависит только от r.

Равенство (2) дает оценку сверху величины $\dfrac{1}{(r-1)!}E_n^{\mp}\big((x-a)_+^{r-1}\big)_1$. Оставался открытым вопрос об оценке снизу этой величины. Существует предположение, что оценка снизу величины $\dfrac{1}{(r-1)!}E_n^{\mp}\big((x-a)_+^{r-1}\big)_1$ совпадает с оценкой сверху. В настоящей работе мы покажем, что в случае $r = 1$ это действительно так.

Приближение функций интерполяционными тригонометрическими полиномами полуцелого порядка в пространстве L_1. Пусть $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \ldots \leq t_{2n} < 2\pi$. Тогда полином (см. [5]) $l_k(t)$ полуцелого порядка $2n - 1/2$, удовлетворяющий условию

$$l_k(t_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \qquad l_k'(t_j) = 0, \quad j,\ k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

имеет вид

$$l_k(t) = \left[\frac{\omega(t)}{2\omega'(t_k)\sin(t-t_k)/2}\right]^2 \left[\cos\frac{t-t_k}{2} - \frac{2\omega''(t_k)}{\omega'(t_k)}\sin\frac{t-t_k}{2}\right],$$

где $\omega(t) = \prod_{j=1}^{2n} \sin(t - t_j)/2$, а полином $h_k(t)$ полуцелого порядка $2n - 1/2$, удовлетворяющий условию

$$h'_k(t_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \qquad h_k(t_j) = 0, \quad j,\ k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

— вид

$$h_k(t) = 2\left[\frac{\omega(t)}{2\omega'(t_k)\sin(t-t_k)/2}\right]^2 \sin\frac{t-t_k}{2}.$$

Тогда

$$H_{2n-1/2}(t) = \sum_{k=1}^{2n} \left[y_k l_k(t) + y'_k h_k(t)\right]$$

является полиномом полуцелого порядка $2n-1/2$, удовлетворяющим условиям $Q_{2n-1}(t_j) = y_j$, $Q'_{2n-1}(t_j) = y'_j$, где y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, y'_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные числа. Полином $H_{2n-1/2}(t)$, удовлетворяющий указанным условиям, единствен (см. [6]).

Полиномы полуцелого порядка удовлетворяют условию

$$H_{n-1/2}(t+2\pi) = -H_{n-1/2}(t). \tag{3}$$

Поэтому, естественно, интерполировать и приближать полиномами полуцелого порядка следует функции $f(t)$, заданные на всей действительной оси и удовлетворяющие условию (3). Такие функции будем называть антипериодическими, а число 2π — антипериодом.

Пусть $\cos t_k = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $t_k \in (0;\pi)$, где x_k — нули многочлена Лежандра $P_n(x)$, записанные в порядке убывания. Доопределим еще точки t_{n+k}, $k = 1, 2, \ldots, n$, равенством $t_{n+k} = 2\pi - t_{n-k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Нетрудно видеть, что $\omega(t) = 2^{-n}P_n(\cos t)$ и $\dfrac{\omega''(t_k)}{\omega'(t_k)} = -\dfrac{\cos t_k}{\sin t_k}$.

Из равенства (см. [7], (4.1.3)) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, которому удовлетворяют многочлены Лежандра, следует, что если $\cos t_0$ является нулем многочлена $P_n(x)$, то $-\cos t_0$ также есть нуль этого многочлена. Следовательно, для любого $k = 1, 2, \ldots, [(n+1)/2]$ ($[a]$— целая часть числа a) $t_{n-k+1} = \pi - t_k$. Это замечание дает возможность доказать следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любого $k = 1, 2, \ldots, [(n+1)/2]$ имеют место равенства*

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{P_n(\cos t)}{2P'_n(\cos t_{n-k+1})\sin t_{n-k+1}\sin(t-t_{n-k+1})/2}\right]^2 dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{P_n(\cos t)}{2P'_n(\cos t_k)\sin t_k \sin(t-t_k)/2}\right]^2 dt. \tag{4}$$

Доказательство. Подставив в левую часть предполагаемого равенства (4) вместо t_{n-k+1} разность $\pi - t_k$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{P_n(\cos t)}{2P'_n(\cos t_k)\sin t_k \sin(t-\pi+t_k)/2}\right]^2 dt,$$

а затем, заменив в интеграле $t-\pi$ на $-u$, получим правую часть равенства (4).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого* $k = 1, 2, \ldots, n$ *имеют место равенства*

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{P_n(\cos t)}{2P_n'(\cos t_{2n-k+1}) \sin t_{2n-k+1} \sin(t - t_{2n-k+1})/2} \right]^2 dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{P_n(\cos t)}{2P_n'(\cos t_k) \sin t_k \sin(t - t_k)/2} \right]^2 dt. \tag{5}$$

Доказательство. В силу определения узлов t_k для $k = n+1, n+2, \ldots < < 2n$ получаем $t_{2n-k+1} = t_{n+(n-k+1)} = 2\pi - t_k$. Поэтому $\big|P_n'(\cos t_{2n-k+1})\big| = = \big|P_n'(\cos(2\pi - t_k))\big| = \big|P_n'(\cos t_k)\big|, \big|\sin t_{2n-k+1}\big| = \big|\sin t_k\big|, \big|\sin(t - t_{2n-k+1})/2\big| = = \big|\sin(t - 2\pi + t_k)/2\big|$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Подставляя найденные значения в левую часть равенства (5), а затем выполняя в интеграле замену переменной $t - 2\pi = -u$, получаем правую часть равенства (5).

Лемма доказана.

***Замечания.* 1.** Пусть $L_k(t) = \dfrac{P_n(\cos t)}{2P_n'(\cos t_k) \sin t_k \sin(t - t_k)/2}$. Согласно леммам 1, 2, оценивая интегралы от функций $L_k^2(t)$ по отрезку $[0; 2\pi]$, достаточно рассмотреть $k = 1, 2, \ldots, [(n+1)/2]$. Очевидно, что последним замечанием можно пользоваться и при оценке интегралов по отрезку $[0; 2\pi]$ от функций $L_k^2(t) \dfrac{\sin(t - t_k)/2}{\sin t_k}$ и $L_k^2(t) \sin \dfrac{t - t_k}{2}$.

2. Будем обозначать абсолютные константы через $C, C_1, \ldots$, а величины, зависящие от параметра r, через C_r, хотя их значения в разных местах могут быть различными.

В дальнейшем нам будут необходимы некоторые свойства полиномов Лежандра и нулей этих полиномов. Будем считать, что полиномы $P_n(t)$ нормированы условием $P_n(1) = 1$ и числа $t_k \in (0; \pi)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $\cos t_k = x_k$, где x_k — нули многочлена Лежандра $P_n(x)$, записанные в порядке убывания.

1. Имеет место неравенство (см. [7], теорема 7.32.2)

$$|P_n(x)| \le C n^{-1/2} \big(\sqrt{1 - x} + 1/n\big)^{-1/2}, \quad 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где C — абсолютная константа. В частности, если $t \in (t_j; t_{j+1}) \subset (0; \pi/2]$, то

$$P_n(t) \le \frac{C}{n^{1/2} \sqrt{\sin t_j + 1/n}}. \tag{7}$$

2. Для нулей t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, полинома $P_n(t)$ имеет место равенство (см. [7], (8.9.1))

$$t_k = \frac{1}{n} \big(\pi k + O(1)\big), \tag{8}$$

где $O(1)$ равномерно ограничена для всех n и $k = 1, 2, \ldots, n$.

3. Для $k = 1, 2, \ldots, [(n+1)/2]$ выполняется неравенство (см. [7], (8.9.2))

$$\frac{1}{P_n'(\cos t_k) \sin t_k} \le C n k^{-1/2}, \tag{9}$$

где C — абсолютная константа.

4. Для $k = 1, 2, \ldots, [(n+1)/2]$ имеет место неравенство

$$\bigl|L_k(t)\bigr| \le C, \quad t \in (t_{k-1}; t_{k+1}). \tag{10}$$

5. Нули многочлена Лежандра удовлетворяют условию (см. [7], (6.3.3), (6.3.8), (6.3.10))

$$\frac{3\pi}{2(2n+1)} < t_1 < t_2 - t_1 < \ldots < t_{[n/2]+1} - t_{[n/2]} < \frac{2\pi}{2n+1}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Для любого $k = 1, 2, \ldots, [(n+1)/2]$ выполняются неравенства*

$$\int\limits_0^{2\pi} L_k^2(t)dt \le \frac{C_1}{n}, \qquad \int\limits_0^{2\pi} L_k^2(t)\frac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k}dt \le \frac{C_2}{n},$$

$$\int\limits_0^{2\pi} L_{k(t)}^2 \left|\sin\frac{t-t_k}{2}\right| dt \le \frac{C_3\ln(n+1)}{n^2},$$

где C_1, C_2, C_3 — абсолютные константы.

Доказательство. Оценим сначала интеграл от функции $L_k^2(t)$ по отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} L_k^2(t)dt = \sum_{j=-[n/2]-1}^{[n/2]} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} L_k^2(t)dt. \tag{12}$$

В силу неравенства (10) $\displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} L_k^2(t)dt \le C/n$, где C — абсолютная константа. Тогда

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} L_k^2(t)dt \le$$

$$\le \frac{Ck}{n}\left(\sum_{j=-[n/2]-1}^{-1} \frac{-1}{j(k-j)^2} + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j(k-j)^2} + \sum_{j=k+1}^{[n/2]}\frac{1}{j(k-j)^2} + 1/n\right) \le \frac{C}{n}. \tag{13}$$

Переходя к оценке интеграла от функции $L_k^2(t)$ по отрезку $[\pi/2; 3\pi/2]$, заметим, что $|P_n(\cos t)| = |P_n(\cos(\pi - t))|$, и если $t \in [\pi/2; 3\pi/2]$, то $\pi - t \in [-\pi/2; \pi/2]$. Поэтому в силу (6)–(8) $|P_n(\cos t)| = |P_n(\cos(\pi - t))| \le Cn^{-1/2}(|\sin(\pi - t)| + 1/n)^{-1/2}$, а если $t \in (t_j; t_{j+1})$, то $|P_n(\cos t)| \le Cn^{-1/2}(|n-j|/n + 1/n)^{-1/2}$. Поэтому

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} L_k^2(t)dt \le \frac{Ck}{n}\sum_{j=[n/2]}^{n}\frac{1}{(n-j+1)(j-k)^2} \le \frac{C}{n}. \tag{14}$$

Если $t \in (t_j; t_{j+1}) \subset [\pi; 3\pi/2]$, то $(t - t_k) \in (\pi/4; 3\pi/4)$. Следовательно, $\sin(t - t_k) \ge 1/\sqrt{2}$. Тогда в силу неравенства (6)

$$\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} L_k^2(t)dt \le \frac{Ck}{n^2}\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} P_n^2(\cos t)dt \le \frac{Ck}{n^3}\int\limits_{0}^{\pi/2}(\sin t + 1/n)^{-1}dt \le \frac{C}{n}. \tag{15}$$

Из неравенств (13) – (15) следует оценка интеграла от функции $L_k^2(t)$. Чтобы оценить интеграл от функции $L_k^2(t)\dfrac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k}$, заметим, что если $t\in(t_j;t_{j+1})\subset\subset[-\pi/2;\pi/2]$, то

$$L_k^2(t)\frac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k} \le \frac{C}{(|j|+1)(|j-k|+1)}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} L_k^2(t)\frac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k}dt \le \frac{C}{n}\sum_{j=-[n/2]-1}^{[n/2]}\frac{1}{(|j|+1)(|j-k|+1)} \le \frac{C_2}{n}. \tag{16}$$

Если $t\in(t_j;t_{j+1})\subset[\pi/2;\pi]$, то

$$L_k^2(t)\frac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k} \le \frac{C}{(j-k)(|j-n|+1)},$$

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} L_k^2(t)\frac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k}dt \le \frac{C}{n}\sum_{j=[n/2]+1}^{n}\frac{1}{(j-k)(|j-n|+1)} \le \frac{C_2}{n}. \tag{17}$$

Снова учитывая то, что если $t\in(t_j;t_{j+1})\subset[\pi;3\pi/2]$, то $\sin(t-t_k)\ge 1/\sqrt{2}$, получаем

$$\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} L_k^2(t)\frac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k}dt \le \frac{C}{n^{3/2}}\int\limits_{0}^{\pi/2}(\sin t+1/n)^{-1}dt \le \frac{C}{n}. \tag{18}$$

Из неравенств (16) – (18) следует оценка интеграла от функции $L_k^2(t)\dfrac{|\sin(t-t_k)/2|}{\sin t_k}$.

Чтобы оценить интеграл

$$\int\limits_{0}^{2\pi} L_k^2(t)|\sin(t-t_k)/2|dt,$$

заметим, что если $t\in(t_j;t_{j+1})\subset[-\pi;\pi/2]$, то

$$L_k^2(t)\left|\sin\frac{t-t_k}{2}\right| \le \frac{Ck}{n(|j|+1)(|j-k|+1)}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} L_k^2(t)\left|\sin\frac{t-t_k}{2}\right|dt \le \frac{Ck}{n^2}\sum_{j=-[n/2]-1}^{[n/2]}\frac{1}{(|j|+1)(|j-k|+1)} \le \frac{C\ln(n+1)}{n^2}. \tag{19}$$

Если $t \in (t_j; t_{j+1}) \subset [\pi/2; \pi]$, то

$$L_k^2(t) \left|\sin \frac{t-t_k}{2}\right| \leq \frac{Ck}{n(|n-j|+1)(j-k)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} L_k^2(t) \left|\sin \frac{t-t_k}{2}\right| dt \leq \frac{Ck}{n^2} \sum_{j=[n/2]}^{n} \frac{1}{(|n-j|+1)(j-k)} \leq \frac{C\ln(n+1)}{n^2}. \qquad (20)$$

Если $t \in (t_j; t_{j+1}) \subset [\pi; 3\pi/2]$, то $\sin(t-t_k) \geq 1/\sqrt{2}$ и

$$\int\limits_{\pi}^{3\pi/2} L_k^2(t) \left|\sin \frac{t-t_k}{2}\right| dt \leq \frac{Ck}{n^3} \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(\sin t + \frac{1}{n}\right)^{-1} dt \leq \frac{C\ln(n+1)}{n^2}. \qquad (21)$$

Из неравенств (19) – (21) следует оценка интеграла от функции $L_k^2(t)|\sin(t-t_k)/2|$.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Утверждение теоремы* 1 *означает, что существуют абсолютные константы* C_1 *и* C_2 *такие, что*

$$\int\limits_{0}^{2\pi} |l_k(t)| dt \leq \frac{C_1}{n}, \qquad (22)$$

$$\int\limits_{0}^{2\pi} |h_k(t)| dt \leq \frac{C_1 \ln(n+1)}{n^2}. \qquad (23)$$

Пусть числа y_j, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, и y'_j, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, являются значениями в точках t_j антипериодической функции $f(t)$ и ее производной $f'(t)$. Далее будем предполагать, что производная $f'(t)$ есть функция ограниченной вариации. Если в точке t_j производная f' имеет разрыв, то будем полагать, что $y'_j = f'(t_j + 0)$ либо $y'_j = f'(t_j - 0)$. Пусть

$$A_n(f; t) = \sum_{k=1}^{2n} f(x_j) l_k(t), \qquad B_n(f; t) = \sum_{k=1}^{2n} f'(x_k + 0) h_k(t).$$

Лемма 3. *Для любой антипериодической функции, имеющей производную ограниченной вариации, имеет место неравенство*

$$\|A_n(f)\|_1 \leq C \left(\|f\|_1 + \frac{\|f'\|_1}{n}\right), \qquad (24)$$

$$\|B_n(f)\|_1 \leq \frac{C\ln(n+1)}{n+1} \left(\|f'\|_1 + \frac{V_0^{2\pi}(f')}{n}\right). \qquad (25)$$

Доказательство. Для данной антипериодической функции f определим кусочно-постоянную антипериодическую функцию, задав ее на полуинтервале $[t_1; t_{2n+1})$, где $t_{2n+1} = t_1 + 2\pi$, равенством $f_n(t) = f(t_j)$, если $t \in [t_j; t_{j+1})$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$. Очевидно, что $A_n(f; t) = A_n(f_n; t)$, $B_n(f; t) = B_n(f_n; t)$ и для всех $t \in [0; \pi/n)$

$$\|A_n(f)\|_1 = \|A_n(f_n)\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{2n} f_n(t_k + \alpha_k(t)) l_k(x) \right\|_1 .$$

Аналогично

$$\|B_n(f)\|_1 = \|B_n(f_n)\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{2n} f_n(t_k + \alpha_k(t)) h_k(x) \right\|_1 ,$$

где $\alpha_k(t) = (t_{k+1} - t_k)nt/\pi$, $t \in [0; \pi/n)$.

Используя неравенство (22), получаем

$$\big\|A_n(f)\big\|_1 = \frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{2n} f_n(t_k + \alpha_k(t)) l_k(x) \right| dxdt \leq$$

$$\leq \frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \sum_{k=1}^{2n} \int\limits_0^{2\pi} \big|l_k(x)\big| dx \big|f_n(t_k + \alpha_k(t))\big| dt \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{2n} \int\limits_0^{\pi/n} \big|f_n(t_k + \alpha_k(t))\big| dt. \tag{26}$$

В каждом интеграле выполним замену переменной интегрирования $u = t_k + \alpha_k(t)$ и воспользуемся неравенствами (11). Тогда

$$\sum_{k=1}^{2n} \int\limits_0^{\pi/n} \big|f_n(t_k + \alpha_k(t))\big| dt = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi}{n(t_{k+1} - t_k)} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |f_n(u)| du \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{k=1}^{2n} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \big|f_n(u)\big| du = C_1 \|f_n\|_1. \tag{27}$$

Из определения функции f_n следует

$$\|f_n\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f\|_1 \leq \|f\|_1 + \frac{\pi}{n} V_0^{2\pi} f. \tag{28}$$

Из неравенств (26) – (28) следует (24). Аналогично, используя неравенства (23) и (11), доказываем неравенство (25).

Лемма доказана.

***Замечание* 3.** Лемма 3 будет справедливой, если в определении операторов $B_n(f)$ вместо чисел $f'(t_j + 0)$ использовать $f'(t_j - 0)$.

Для любой функции f, имеющей производную ограниченной вариации, положим

$$H_{2n-1/2}(f; t) = A_n(f; t) + B_n(f; t).$$

Пусть $\overline{W^r} KV$ (r — натуральное число) — множество антипериодических функций, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна, а $V_0^{2\pi}(f^{(r)} \leq K$.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in \overline{W^r}KV$ выполняется неравенство*

$$\left\| f - H_{2n-1/2}(f) \right\|_1 \leq C_r K \frac{\ln(n+1)}{n^{r+1}},$$

где величина C_r зависит только от r.

Доказательство. Поскольку для любого полинома $Q_{2n-1/2}$ полуцелого порядка $2n - 1/2$ имеет место равенство

$$H_{2n-1/2}(Q_{2n-1/2}) = Q_{2n-1/2},$$

то, взяв в качестве $Q_{2n-1/2}$ полином наилучшего приближения функции f и использовав теорему А. Л. Гаркави [8] об одновременном приближении функции и ее производных и лемму 3, получим

$$\left\| f - H_{2n-1/2}(f) \right\|_1 \leq \| f - Q_{2n-1/2} \|_1 + \left\| H_{2n-1/2}(f - Q_{2n-1/2}) \right\|_1 \leq$$

$$\leq C_1 \| f - Q_{2n-1/2} \|_1 + \frac{C_2 \ln(n+1)}{n} \| f' - Q'_{2n-1/2} \|_1 +$$

$$+ \frac{C_3 \ln(n+1)}{n^2} V_0^{2\pi}(f' - Q'_{2n-1/2}) \leq$$

$$\leq C_r K \frac{\ln(n+1)}{n^{r+1}}.$$

Теорема доказана.

Оценка снизу односторонних приближений ступеньки алгебраическими многочленами в среднем. Будем рассматривать приближения снизу (односторонние приближения сверху рассматриваются аналогично). Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ — узлы интерполирования, определяемые нулями полинома Лежандра: $\cos t_k = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где x_k — нули многочлена Лежандра $P_n(x)$, записанные в порядке убывания. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ точки $t_{n+k} = 2\pi - t_{n-k+1}$. Поскольку $\sum_{k=1}^{2n} t_k = 2\pi n$, тригонометрический полином $L_{2n}(t)$ порядка $2n$ с коэффициентом при $\cos 2nt$, равным нулю, удовлетворяющим условиям $L_{2n}(t_k) = y_k$, $L'_{2n}(t_k) = y'_k$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, где y_k и y'_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, — заданные числа, имеет вид (см. [5, с. 79, 80])

$$L_{2n}(t) = \sum_{k=1}^{2n} y_k c_k(t) + \sum_{k=1}^{2n} y'_k d_k(t).$$

Здесь

$$c_k = l_k^2(t)(1 - \frac{\omega''(t_k)}{\omega'(t_k)} \sin(t - t_k), \qquad d_k = l_k^2(t) \sin(t - t_k),$$

$$l_k(t) \frac{\omega(t)}{2\omega'(t_k) \sin(t - t_k)/2}, \qquad \omega(t) = \prod_{j=1}^{2n} \frac{\sin(t - t_j)}{2}.$$

При этом коэффициент b_{2n} при $\sin 2nt$ равен

$$\frac{1}{2^{4n}} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\omega'^2(t_k)} \left[\frac{\omega''(t_k)}{\omega'(t_k)} y_k - y'_k \right], \quad \text{где} \quad \frac{\omega''(t_k)}{\omega'(t_k)} = -\frac{\cos t_k}{\sin t_k}.$$

Построим полином $L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k-*);t)$ порядка $2n-1$, интерполирующий ядро Бернулли $B_1(t_k-t)$ и его производную в точках t_j, $j\neq k$. В точке t_k положим $L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k-*);t)$ равным $-\pi/2$, а y'_k выберем так, чтобы коэффициент b_{2n} был равен нулю. Очевидно, что в некоторой окрестности слева от точки t_k будет иметь место неравенство $L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k-*);t)<B_1(t_k-t)$. Поскольку степень интерполяционного полинома не превышает $2n-1$, указанное неравенство будет выполняться всюду, за исключением точек t_j. Аналогично определим полином $L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k+*);t)$ порядка $2n-1$, интерполирующий функцию $B_1(t_k+t)$ и ее производную в точках t_j, $j\neq k$. В точке t_k положим $L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k+*);t)$ равным $-\pi/2$, а y'_k выберем так, чтобы коэффициент b_{2n} был равен нулю. Имеет место неравенство $L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k+*);t)\leq B_1(t_k+t)$. Так как $\eta_k(t):=(\cos t_k-\cos t)^0_+=\dfrac{1}{\pi}(B_1(t+t_k)+B_1(t_k-t))+\dfrac{t_k}{\pi}$, четный тригонометрический полином $T_{2n-1}(t)=L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k-*);t)+L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k+*);t)+\dfrac{t_k}{\pi}$ будет интерполировать функцию $\eta_k(t)$ в точках t_j. Поскольку $T_{2n-1}(t)$ можно представить в виде $T_{2n-1}(t)=P_{2n-1,k}(\cos t)$, где $P_{2n-1,k}(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $2n-1$, алгебраический многочлен $P_{2n-1,k}(x)$ интерполирует ступеньку $(x_k-x)^0_+$ и ее производную в точках x_j, $j\neq k$, а в точке x_k $P_{2n-1,k}(x_k)=0$. При этом $P_{2n-1,k}(x)\leq(x_k-x)^0_+$ для всех $x\in[-1;1]$.

Лемма 4. *Многочлен $P_{2n-1,k}(x)$ является многочленом наилучшего одностороннего приближения снизу ступеньки $(x_k-x)^0_+$ в пространстве L_1.*

Доказательство. Рассмотрим функционал $\Phi_g(f)$, определяемый функцией $1-\sum_{k=1}^{n}p_k\delta(x-x_k)$ следующим образом:

$$\Phi_g(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k),$$

где числа p_k определяют квадратурную формулу $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k)$ наивысшей алгебраической точности $(2n-1)$ — квадратурную формулу Гаусса. Тогда для любого многочлена $Q_{2n-1}(x)$ степени не выше $2n-1$ такого, что $Q_{2n-1}(x)\leq\leq(x_k-x)^0_+$, в силу того, что функционал $\Phi_g(f)$ равен нулю на любом алгебраическом многочлене степени не выше $2n-1$, получаем

$$\int_{-1}^{1}\big[(x_k-x)^0_+-P_{2n-1,k}(x)\big]dx=\Phi_g\big((x_k-x)^0_+-P^{-}_{2n-1,k}(x)\big)=$$

$$=\Phi_g((x_k-x)^0_+-Q_{2n-1}(x)+Q_{2n-1}(x)-P_{2n-1,k}(x))=$$

$$=\Phi_g((x_k-x)^0_+-Q_{2n-1}(x))=$$

$$=\int_{-1}^{1}\big[(x_k-x)^0_+-Q_{2n-1}(x)\big]dx-\sum_{i=1}^{n}p_i((x_k-x_i)^0_+-Q_{2n-1}(x_i))\leq$$

$$\leq\int_{-1}^{1}\big[(x_k-x)^0_+-Q_{2n-1}(x)\big]dx. \tag{29}$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Для любого k выполняются неравенства*

$$\int_0^{2\pi} B_1(t_k - t) - L_{2n}^-(B_1(t_k - *); t) \left| \sin \frac{t - t_k}{2} \right| dt \leq \frac{C \ln n}{n^2}, \tag{30}$$

$$\int_0^{2\pi} B_1(t_k + t) - L_{2n}^-(B_1(t_k + *); t) \left| \sin \frac{t + t_k}{2} \right| dt \leq \frac{C \ln n}{n^2}. \tag{31}$$

Доказательство. Полином $L_{2n-1}^-(B_1(t_k - *); t) \sin \dfrac{t - t_k}{2}$ полуцелого порядка $2n - \dfrac{1}{2}$ дважды интерполирует функцию $B_1(t_k - t) \sin \dfrac{t - t_k}{2}$ в узлах t_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$. При этом $\dfrac{d}{dt}(L_{2n-1}^-(B_1(t_k - *); t) \sin \dfrac{t - t_k}{2}\bigg|_t = t_k = B_1(-0)$. Так как функция $B_1(t_k - t) \sin \dfrac{t - t_k}{2}$ принадлежит классу $\overline{W^1} KV$, в силу теоремы 2 имеет место неравенство (30). Аналогично доказывается соотношение (31).

Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть $t_k \in (0, \pi)$. Тогда имеют место неравенства*

$$\int_{-\pi}^{0} \big(B_1(t_k - t) - L_{2n-1}^-(B_1(t_k - *); t)\big) dt \leq \frac{C \ln n}{n^2 \sin t_k}, \tag{32}$$

$$\int_{0}^{\pi} \big(B_1(t_k + t) - L_{2n-1}^-(B_1(t_k + *); t)\big) dt \leq \frac{C \ln n}{n^2 \sin t_k}. \tag{33}$$

Доказательство. Действительно, используя теорему 2 и неравенство $2\big|\sin(t - t_k)/2\big| \geq \sin t_k$, выполняющееся для всех t из отрезка, по которому вычисляется интеграл, получаем

$$\int_{-\pi}^{0} \big(B_r(t_k - t) - L_{2n-1}^-(B_1(t_k - *); t)\big) dt \leq$$

$$\leq 2 \int_{-\pi}^{0} \big(B_r(t_k - t) - L_{2n-1}^-(B_1(t_k - *); t)\big) \frac{|\sin(t - t_k)/2|}{\sin t_k} dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sin t_k} \int_0^{2\pi} B_1(t_k - t) - L_{2n}^-(B_1(t_k - *); t) \left| \sin \frac{t - t_k}{2} \right| dt \leq \frac{C \ln n}{n^2 \sin t_k}.$$

Аналогично доказывается неравенство (33). В этом случае необходимо воспользоваться неравенством $2|\sin(t + t_k)/2| \geq \sin t_k$, выполняющимся для всех t из отрезка, по которому вычисляется интеграл в (33), и теоремой 2.

Теорема 3. *Для любого $t_k \in (0, \pi)$ имеет место неравенство*

$$E_{2n-1}^-\big((\cos t_k - *)_+^0\big)_1 \geq \frac{2 \sup_t B_1(t) \sin t_k}{n} - \frac{C \ln(n+1)}{n^2}. \tag{34}$$

Доказательство. Имеем

$$E^{-}_{2n-1}\big((\cos t_k - *)^0_+\big)_1 = \int\limits_{-1}^{1} \big((\cos t_k - x)^0_+ - P_{2n-1,k}(x)\big)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \Big[(\cos t_k - \cos t)^0_+ - P_{2n-1,k}(\cos t)\Big] \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big(B_1(t+t_k) + B_1(t_k - t)\big) - (L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k + *); t) +$$

$$+ L^{-}_{2n-1}\big(B_1(t_k - *); t)\big) \sin t dt.$$

Легко проверить равенство

$$\frac{1}{\pi}\big(B_1(t+t_k) + B_1(t_k - t)\big) -$$

$$-\big(L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k + *); t) + L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k - *); t)\big) \sin t =$$

$$= \frac{\sin t_k}{\pi}\Big(-B_1(t+t_k) + B_1(t_k - t) +$$

$$+ L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k + *); t) - L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k - *); t)\Big) -$$

$$-\frac{1}{\pi}(\sin t - \sin t_k)\big(L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k - *); t) - B_1(t_k - t)\big) +$$

$$+\frac{1}{\pi}(\sin t + \sin t_k)\big(B_1(t+t_k) - L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k + *); t)\big). \tag{35}$$

Используя равенство (35) и оценки (30), (31), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \big(B_1(t+t_k) + B_1(t_k - t)\big) -$$

$$-\big(L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k + *); t) + L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k - *); t)\big) \sin t dt \geq$$

$$\geq \frac{\sin t_k}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \Big(-B_1(t+t_k) + B_1(t_k - t) +$$

$$+ L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k + *); t) - L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k - *); t)\Big)dt - \frac{C\ln n}{n^2} =$$

$$= \frac{\sin t_k}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} (B_1(t_k - t) - L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k - *); t))dt - \right.$$

$$- \left(\int\limits_{-\pi}^{0} (B_1(t_k - t) - L^{-}_{2n-1}(B_1(t_k - *); t))dt + \right.$$

$$+\int_0^{\pi}(-B_1(t+t_k)+L^-_{2n-1}(B_1(t_k+*);t))dt\Bigg)\Bigg]-\frac{C\ln n}{n^2}.$$

Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi}\big(B_1(t_k-t)-L^-_{2n-1}(B_1(t_k-*);t)\big)dt\geq E^-_n(B_1)_1,$$

применяя к интегралам, содержащимся в круглых скобках, следствие 2, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(B_1(t+t_k)+B_1(t_k-t)\big)-$$

$$-\big(L^-_{2n-1}(B_1(t_k+*);t)+L^-_{2n-1}(B_1(t_k-*);t)\big)\sin t dt\geq$$

$$\geq\frac{\sin t_k}{\pi}E^-_n(B_1)_1-\frac{C\ln(n+1)}{n^2}. \qquad (36)$$

Из оценок (35), (36) следует (34).

Теорема доказана.

Чтобы доказать теорему 3 для любого числа $a\in(-1;1)$, следует использовать утверждение, справедливое (см. [9]) для обычных наилучших приближений усеченных степеней.

Лемма 6. *Пусть $x_k=\cos t_k$, $k=1,2,\ldots,n$, — нули многочлена Лежандра. Тогда имеют место неравенства*

$$E^-_n\big((a-x)^{r-1}_+\big)_1>E^-_n\big((x_{k_0}-x)^{r-1}_+\big)_1\left(1-\frac{\pi}{n+1}\right), \qquad (37)$$

если $a\in(x_{k+1};x_k)$, $k=1,2,\ldots,n$, где $k_0=k+1$, если $a<0$, и $k_0=k$, если $a\geq 0$.

Доказательство. Пусть $a<0$, $z=1+a-x_{k+1}$ и $Q_n(x)$ — алгебраический многочлен наилучшего приближения снизу усеченной степени $(a-x)^{r-1}_+$ в пространстве L_1. Тогда

$$E^-_n\big((a-x)^{r-1}_+\big)_1=\int_{-1}^{1}\big[(a-x)^{r-1}_+-Q_n(x)\big]dx=$$

$$=\int_{-z}^{z}\left[\left(a-\frac{u}{z}\right)^{r-1}_+-Q_n\left(\frac{u}{z}\right)\right]\frac{du}{z}=\frac{1}{z^r}\int_{-z}^{z}\left[(az-u)^{r-1}_+-z^{r-1}Q_n\left(\frac{u}{z}\right)\right]du.$$

Полагая $u=x+s$, где $s=za-x_{k+1}$, и используя неравенства $z-s>1$ и $s>0$, получаем

$$E^-_n\big((a-x)^{r-1}_+\big)_1=\frac{1}{z^r}\int_{-z-s}^{z-s}\left[(az-x-s)^{r-1}_+-z^{r-1}Q_n\left(\frac{x+s}{z}\right)\right]dx\geq$$

$$\geq \frac{1}{z^r} \int_{-1}^{1} \left[(x_{k+1} - x)_+^{r-1} - z^{r-1} Q_n \left(\frac{x+s}{z} \right) \right] dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{z^r} E_n^- \left((x_{k+1} - x)_+^{r-1} \right)_1. \tag{38}$$

Поскольку $1 - (a - x_{k+1}) > 1 - (x_k - x_{k+1})$ и в силу (11) $x_k - x_{k+1} < t_{k+1} - t_k < < \dfrac{2\pi}{2n+1}$, то

$$\frac{1}{z^r} > 1 - (a - x_{k+1}) > 1 - \frac{\pi}{n+1}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) следует (37) для $a < 0$. Случай $a \geq 0$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

1. *Motornyi V. P., Pas'ko A. N.* On the best one-sided approximation of some classes of differentiable functions in L_1 // East. J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 159 – 169.
2. *Моторный В. П., Пасько А. Н.* Наилучшие одностороннее приближение усеченных степеней и оценки погрешности квадратурных формул на некоторых классах функций // Вестн. Днепропетр. нац. ун-та. Математика. – 2003. – № 8. – С. 74 – 80.
3. *Моторный В. П., Моторная О. В.* Об одностороннем приближении усеченных степеней алгебраическими многочленами в среднем // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2005. – **248**. – С. 185 – 193.
4. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
5. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. – Минск: Вышэйш. шк., 1968. – 318 с.
6. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 256 с.
7. *Сеге Г.* Ортогональные ряды. – М.: Физматгиз, 1962.– 500 с.
8. *Гаркави А. Л.* О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 103 – 128.
9. *Motornyi V. P., Nitiema P. C.* On the best L_1-approximation by polynomials of functions which are fractional integrals of summa functions // East. J. Approxim. – 1994. – **2**, № 4. – P. 409 – 425.

Получено 19.10.09