УДК 517.988

В. Л. Макаров (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. В. Хлобистов (Київ. нац. авіац. ун-т),
О. Ф. Кашпур (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДО ПИТАННЯ КОНТИНУАЛЬНОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ВУЗЛІВ ДЛЯ ОПЕРАТОРІВ У ЛІНІЙНИХ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРАХ

Conditions for the existence of continual nodes for interpolation integral-type polynomials are obtained. This result is generalized to multivariable operators. Examples of these interpolants are considered.

Установлены условия существования континуальных узлов для интерполяционного полинома интегрального вида. Этот результат обобщается для операторов многих переменных. Рассмотрены примеры таких интерполянтов.

1. Вступ. Дана робота уточнює та узагальнює результати, анонсовані в [1, 2], щодо континуальних вузлів інтерполяції операторів однієї та багатьох змінних у лінійних топологічних просторах. Будемо розглядати поліном n-го степеня вигляду [3]

$$P_n(x) = F(x_0) + \int\limits_a^b F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1}(x - x_0) +$$

$$+ \int\limits_a^b \int\limits_a^{\tau_1} F''(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0) + g_{\tau_2}(x_2 - x_1))dg_{\tau_2}(x - x_1)dg_{\tau_1}(x - x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_a^b \int\limits_a^{\tau_1} \ldots \int\limits_a^{\tau_{n-1}} F^{(n)}(x_0 + \sum_{i=1}^n g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1}))dg_{\tau_n}(x - x_{n-1}) \ldots dg_{\tau_1}(x - x_0), \tag{1}$$

де оператор $F\colon X \to Y$, $x_i \in X$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, g_τ — лінійний оператор, $g_\tau : X \to \to X$, X, Y — лінійні топологічні простори, τ — скалярний аргумент, $\tau \in [a, b]$, g_τ — диференційовний по τ оператор, тобто має g'_τ-похідну за цим аргументом.

Далі розглядатимемо множину операторів g_τ таких, що виконуються умови

$$g_a = 0, \qquad g_b = I, \tag{2}$$

де 0, I — нульовий та тотожний оператори відповідно. Тут $F^{(n)}$ — похідна Гато n-го порядку, $dg_{\tau_i} = d_{\tau_i} g_{\tau_i}$. Тоді, як показано в [3], поліном (1) буде інтерполяційним, тобто має інтерполяційними вузлами x_i,

$$P_n(x_i) = F(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Але, як неодноразово зазначали автори [1, 4, 5], для побудови полінома (1) потрібна континуальна інформація щодо оператора та його похідних Гато до n-го порядку включно в континуальних точках. Однак інтерполяційний поліном $P_n(x)$ має скінченну множину інтерполяційних вузлів, що неприродно. Для подолання цього недоліку будемо вимагати від операторів g_τ крім умов (2) ще й умову

© В. Л. МАКАРОВ, В. В. ХЛОБИСТОВ, О. Ф. КАШПУР, 2010

$$g_u g_v = g_s, \quad s = \min(u, v). \tag{3}$$

Позначимо таку множину операторів g_{τ_i} через G. У даній роботі уточнюється множина G, а саме, G є множиною недиференційовних по τ в звичайному сенсі операторів, тобто оператори g'_{τ_i} будуть „узагальненими" (на зразок узагальненої сингулярної функції [6]), але F повинен бути таким, щоб інтеграли в (1) існували. Далі будемо позначати таку множину операторів F через $\mathfrak{R}$.

У цій роботі з урахуванням уточнення множини G для інтерполяційного полінома (1) встановлено умови існування континуальних вузлів. Розглянуто приклад інтерполяційного полінома, операторів F та g_{τ_i}, де множини G, $\mathfrak{R}$ не є порожніми, а відповідні вузли будуть континуальними. Наведено узагальнення інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних [2] у сенсі визначення умов, за яких має місце континуальність відповідної множини вузлів.

2. Континуальні вузли інтерполяційних поліномів для операторів однієї змінної. Розглянемо континуальну множину вузлів

$$\overline{x}_n(\xi) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1}), \tag{4}$$

$$b \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n \geq a.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $g_{\tau_i} \in G$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *оператор* F $n+1$ *раз диференційовний за Гато і такий, що інтеграли в* (1) *існують. Тоді поліном* (1) *має континуальні вузли* (4), *тобто виконуються інтерполяційні умови*

$$P_n(\overline{x}_n(\xi)) = F(\overline{x}_n(\xi)). \tag{5}$$

Доведення. Нехай $F^{(n+1)}$ існує. Тоді, записуючи залишковий член формули (1) у вигляді

$$R_n(x) = \int_a^b \int_a^{\tau_1} \ldots \int_a^{\tau_n} F^{(n+1)} \left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\tau_i}(x_i - x_{i-1}) + g_{\tau_{n+1}}(x - x_n) \right) \times$$

$$\times dg_{\tau_{n+1}}(x - x_n) \ldots dg_{\tau_1}(x - x_0), \tag{6}$$

підставляючи в R_n $x = \overline{x}_n(\xi)$ з (4) і враховуючи, що $g_{\tau_{n+1}} g_{\xi_i} = g_{\tau_{n+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, одержуємо

$$dg_{\tau_{n+1}}(\overline{x}_n - x_n) = dg_{\tau_{n+1}} \left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} g_{\xi_i}(x_i - x_{i-1}) - x_n \right) = dg_{\tau_{n+1}}(0) = 0.$$

Звідси маємо $R_n(\overline{x}_n(\xi)) = 0$. Таким чином, отримуємо інтерполяційну умову (5).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Насправді теорема буде правильною за умови існування лише n-ї похідної Гато оператора F, але доведення цього твердження занадто громіздке, тому ми його не наводимо. Так, не вимагаючи існування $F^{(n+1)}$, розглянемо на прикладі полінома першого степеня (1) виконання інтерполяційної умови (5) для $n = 1$. Маємо

$$P_1(x) = F(x_0) + \int\limits_a^b F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1}(x - x_0)$$

та континуальний вузол

$$\overline{x}_1(\xi) = x_0 + g_{\xi_1}(x_1 - x_0), \quad \xi_1 \in [a, b]. \tag{7}$$

Далі

$$P_1(\overline{x}_1(\xi)) = F(x_0) + \int\limits_a^b F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1} g_{\xi_1}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^{\xi_1} F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1} g_{\xi_1}(x_1 - x_0) +$$

$$+ \int\limits_{\xi_1}^b F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1} g_{\xi_1}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^{\xi_1} F'(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0))dg_{\tau_1}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0) + \int\limits_a^{\xi_1} dF(x_0 + g_{\tau_1}(x_1 - x_0)) =$$

$$= F(x_0) + F(x_0 + g_{\xi_1}(x_1 - x_0)) - F(x_0) =$$

$$= F(x_0 + g_{\xi_1}(x_1 - x_0)) = F(\overline{x}_1(\xi)).$$

У цих перетвореннях ми використали умови (2), (3) та диференціювання суперпозиції операторів [7].

Приклад. Розглянемо інтерполяційні поліноми першого та другого степеня і покажемо, що множина G операторів g_τ і множина $\mathfrak{R}$ операторів F, для яких відповідні інтеграли в (1) існують, не є порожніми та $P_i(\overline{x}_j(\xi)) = F(\overline{x}_j(\xi))$, де $\overline{x}_j(\xi)$, $j = 1, 2,$ — континуальні вузли (4). Нехай $F\colon Q[a, b] \to R^1$, де $Q[a, b]$ — простір кусково-неперервних функцій на $[a, b]$, $g_\tau x = H(\tau - t)x(t)$, $H(u)$ — функція Хевісайда, $x(t)$, $x_i(t) \in Q[a, b]$, τ, $t \in [a, b]$.

Неважко бачити, що $g_\tau = H(\tau - t) \in G$. Маємо

$$P_1(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \int\limits_a^b F'\big(x_0(\cdot) +$$

$$+ H(\tau - \cdot)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot))\big)dH(\tau - \cdot)(x(\cdot) - x_0(\cdot)), \tag{8}$$

де $dH(\tau - t) = \delta(\tau - t)d\tau$, δ є δ-функцією Дірака. Візьмемо оператор F у вигляді функціонала $F(x) = \int_a^b x^2(t)dt$. Тоді

$$F(x_0(\cdot)) = \int_a^b x_0^2(t)dt,$$

$$\int_a^b F'(x_0(\cdot) + H(\tau - \cdot)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot)))dH(\tau - \cdot)(x(\cdot) - x_0(\cdot)) =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\gamma} \int_a^b (x_0(t) + H(\tau - t)(x_1(t) - x_0(t)) + \gamma dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t)))^2 \Big|_{\gamma=0} dt =$$

$$= 2 \int_a^b \int_a^b \big(x_0(t) + H(\tau - t)(x_1(t) - x_0(t)) +$$

$$+ \gamma dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t))\big) dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t)) \Big|_{\gamma=0} dt =$$

$$= 2 \int_a^b \int_a^b \big(x_0(t) + H(\tau - t)(x_1(t) - x_0(t))\big) dH(\tau - t)(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= 2 \int_a^b x_0(t)H(\tau - t)(x(t) - x_0(t)) \Big|_a^b dt +$$

$$+ 2 \int_a^b \frac{1}{2} H^2(\tau - t) \Big|_a^b (x_1(t) - x_0(t))(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int_a^b 2\big(x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t))\big)(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int_a^b (x_0(t) + x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt. \tag{9}$$

Тоді, враховуючи (8), (9), отримуємо

$$P_1(x(\cdot)) = \int_a^b x_0^2(t)dt + \int_a^b (x_0(t) + x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt. \tag{10}$$

Покажемо далі, що інтерполяційний поліном першого степеня (10) має континуальний вузол (7). Дійсно,

$$P_1(\overline{x}_1(\xi)) = \int_a^b x_0^2(t)dt + \int_a^b (x_0(t) + x_1(t))H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int_a^b x_0^2(t)dt + \int_a^b H(\xi - t)(x_1^2(t) - x_0^2(t))dt =$$

$$= \int_a^b x_0^2(t)dt + \int_a^\xi (x_1^2(t) - x_0^2(t))dt. \tag{11}$$

З іншого боку,

$$F(\overline{x}_1(\xi)) = \int_a^b \big(x_0(t) + H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t))\big)^2 dt =$$

$$= \int_a^\xi \big(x_0(t) + H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t))\big)^2 dt +$$

$$+ \int_\xi^b \big(x_0(t) + H(\xi - t)(x_1(t) - x_0(t))\big)^2 dt =$$

$$= \int_a^\xi x_1^2(t)dt + \int_\xi^b x_0^2(t)dt + \int_a^\xi x_0^2(t)dt - \int_a^\xi x_0^2(t)dt =$$

$$= \int_a^b x_0^2(t)dt + \int_a^\xi (x_1^2(t) - x_0^2(t))dt. \tag{12}$$

Порівнюючи (11) з (12), остаточно маємо $P_1(\overline{x}_1(\xi)) = F(\overline{x}_1(\xi))$. Далі розглянемо

$$P_2(x(\cdot)) = P_1(x(\cdot)) +$$

$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_1} F''(y(\cdot))dH(\tau_2 - \cdot)(x(\cdot) - x_1(\cdot))dH(\tau_1 - \cdot)(x(\cdot) - x_0(\cdot)), \tag{13}$$

де $y(t) = x_0(t) + H(\tau_1 - t)(x_1(t) - x_0(t)) + H(\tau_2 - t)(x_2(t) - x_1(t))$, $a \le \tau_2 \le \tau_1 \le b$. Другий доданок у (13) для функціонала $F(x) = \int_a^b x^2(t)dt$ має вигляд

$$\int_a^b \int_a^{\tau_1} \frac{\partial^2}{\partial\gamma_1 \partial\gamma_2} \int_a^b \Big\{ x_0(t) + H(\tau_1 - t)(x_1(t) - x_0(t)) +$$

$$+ H(\tau_2 - t)(x_2(t) - x_1(t)) + \gamma_1 dH(\tau_1 - t)(x(t) - x_0(t)) +$$

$$+ \gamma_2 dH(\tau_2 - t)(x(t) - x_1(t)) \Big\}^2 \Big|_{\gamma_1 = \gamma_2 = 0} dt =$$

$$= 2 \int_a^b \int_a^{\tau_1} \int_a^b dH(\tau_2 - t)(x(t) - x_1(t))dH(\tau_1 - t)(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= 2 \int_a^b \int_a^b H(\tau_2 - t)(x(t) - x_1(t)) \Big|_a^{\tau_1} dH(\tau_1 - t)(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int_a^b H^2(\tau_1 - t)\Big|_a^b (x(t) - x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt =$$

$$= \int_a^b (x(t) - x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt.$$

Остаточно маємо

$$P_2(x(\cdot)) = \int_a^b x_0^2(t)dt + \int_a^b (x_1(t) + x_0(t))(x(t) - x_0(t))dt +$$

$$+ \int_a^b (x(t) - x_1(t))(x(t) - x_0(t))dt = \int_a^b x^2(t)dt, \tag{14}$$

тобто інтегральний поліном $P_2(x(\cdot))$ зберігає даний функціонал і, отже, $P_2(\overline{x}_2(\xi)) = F(\overline{x}_2(\xi))$. Таким чином, для того щоб інтерполяційний поліном Ульма – Соболевського – Яновича [3] мав континуальні вузли (4), необхідна належність операторів g_{τ_i} множині G, тобто виконання умов (2), (3), а оператор F повинен належати множині $\mathfrak{R}$, тобто бути таким, щоб відповідні інтеграли в (1) існували.

***Зауваження* 2.** У випадку недиференційовності оператора F (наприклад, у функціональному просторі $Q[0,1]$) можна застосувати модифікацію інтерполяційної формули в [4], де відповідні інтеграли розуміються як інтеграли Стільтьєса. Так, для $n = 2$ будемо мати

$$P_2(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) - \int_0^1 \frac{x(z_1) - x_0(z_1)}{x_1(z_1) - x_0(z_1)} d_{z_1} F(x^1(\cdot, z_1)) +$$

$$+ \int_0^1 \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)} d_{z_1} F(x^1(\cdot, z_1)) -$$

$$- \int_0^1 \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_2(z_1) - x_{i-1}(z_1)} d_{z_1} F(x^2(\cdot, \vec{z}^{\,1})) -$$

$$- \int_0^1 \int_{z_1}^1 \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_1) - x_{i-1}(z_1)}{x_i(z_1) - x_{i-1}(z_1)} d_{z_2} d_{z_1} F(x^2(\cdot, \vec{z}^{\,2})) +$$

$$+ \int_0^1 \int_{z_1}^1 \prod_{i=1}^2 \frac{x(z_i) - x_{i-1}(z_i)}{x_i(z_i) - x_{i-1}(z_i)} d_{z_2} d_{z_1} F(x^2(\cdot, \vec{z}^{\,2})), \tag{15}$$

де $x^1(\cdot, z_1) = x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_1(\cdot) - x_0(\cdot))$, $x^2(\cdot, \vec{z}^{\,2}) = x^1(\cdot, z_1) + H(\cdot - z_2)(x_2(\cdot) - x_1(\cdot))$, $x^2(\cdot, \vec{z}^{\,1}) = x_0(\cdot) + H(\cdot - z_1)(x_2(\cdot) - x_0(\cdot))$. Тоді формула (15) визначає інтерполяційний поліном для функціонала $F(x(\cdot))$ на континуальному вузлі $x^2(z, \vec{\xi}^{\,2}) = x_0(z) + H(z - \xi_1)(x_1(z) - x_0(z)) + H(z - \xi_2)(x_2(z) - x_1(z))$,

$0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le 1$. Умови існування інтегралів Стільтьєса для інтегралів, що входять у формулу (15), можна одержати шляхом узагальнення відомого результату [8], а саме, інтеграл $\int_a^b f(t)dg(t)$ існує, якщо функція $f(t)$ зі значеннями в банаховому просторі неперервна на відрізку $[a,b]$, а скалярна функція $g(t)$ має на цьому відрізку кінцевий вимір. Зауважимо, що формула (15) також не вимагає „правила підстановки" [4].

3. Континуальні вузли інтерполяційних поліномів для операторів багатьох змінних. Розглянемо питання континуальності інтерполяційних вузлів для операторів та функціоналів багатьох змінних [2]. В роботі [2] запропоновано інтерполяційний поліном n-го степеня:

$$P_{m,n}(F;x,y,\ldots,z) = F(x_0,y_0,\ldots,z_0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega_k}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=k} F^{(i_1+i_2+\ldots+i_m)}\left(x_0+\sum_{i=1}^{i_1} g_{\tau_{i1}}(x_i-x_{i-1}),\right.$$

$$\left. y_0+\sum_{i=1}^{i_2} g_{\tau_{i2}}(y_i-y_{i-1}),\ldots,z_0+\sum_{i=1}^{i_m} g_{\tau_{im}}(z_i-z_{i-1})\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{i_1} dg_{\tau_{i1}}(x-x_{i-1})\prod_{i=1}^{i_2} dg_{\tau_{i2}}(y-y_{i-1})\ldots\prod_{i=1}^{i_m} dg_{\tau_{im}}(z-z_{i-1}), \tag{16}$$

де $F(x,y,\ldots,z)$ — оператор m змінних $x,y,\ldots,z$, $x\in X$, $y\in Y$, $\ldots$, $z\in Z$, $F\colon X\bigoplus Y\bigoplus\ldots\bigoplus Z\to V$, $X,Y,\ldots,Z,V$ — лінійні топологічні простори, $g_{\tau_{is}}$ — лінійні неперервні оператори, $g_{\tau_{i1}}: X\to X$, $g_{\tau_{i2}}\colon Y\to Y,\ldots,$ $g_{\tau_{im}}\colon Z\to$ $\to Z$, i — індекс, що пробігає деякі множини натуральних чисел, $g_{\tau_{is}}$ залежать від скалярних аргументів τ_{is} з $[a,b]$, мають перші похідні за цими аргументами та задовольняють умови (2), $x_i\in X$, $i=0,1,2,\ldots,i_1$, $y_i\in Y$, $i=0,1,2,\ldots,i_2,\ldots$ $\ldots$, $z_i\in Z$, $i=0,1,2,\ldots,i_m$, — вузли інтерполяції за кожною змінною; $\Omega_k=$ $=\Omega_{i_1}\times\Omega_{i_2}\times\ldots\times\Omega_{i_m}$, $i_1+i_2+\ldots+i_m=k$,

$$\Omega_{i_s}=\Big\{(\tau_{1s},\tau_{2s},\ldots,\tau_{i_ss})\colon\ 0\le\tau_{1s}\le 1,\quad 0\le\tau_{2s}\le\tau_{1s},\ldots$$

$$\ldots,0\le\tau_{i_ss}\le\tau_{i_s-1,s}\Big\},\quad s=1,2,\ldots,m, \tag{17}$$

а похідні від F розуміються в сенсі Гато, $dg_{\tau_{is}}=d_{\tau_{is}}g_{\tau_{is}}$.

Цей інтерполянт має вузли — „точки" $(x_p,y_q,\ldots,z_r)$, а у випадку, коли $X=$ $=Y=\ldots=Z=V=R^1$, отримуємо поліном Ньютона (поліном найменшого степеня) для функції m змінних [9]. Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай оператори* $g_{\tau_{is}}$ *належать* G, $s=1,2,\ldots$, F *належить* $\mathfrak{R}$, *а* $F^{(n+1)}$ *в* (6) *існує за кожною змінною. Тоді континуальними вузлами інтерполяційного полінома* (16) *будуть точки*

$$\left(x_0+\sum_{i=1}^{i_1} g_{\xi_{i1}}(x_i-x_{i-1}),y_0+\sum_{i=1}^{i_2} g_{\xi_{i2}}(y_i-y_{i-1}),\ldots,z_0+\sum_{i=1}^{i_m} g_{\xi_{im}}(z_i-z_{i-1})\right),$$

де $b\ge\xi_{11}\ge\xi_{21}\ge\ldots\ge\xi_{i_11}\ge a$, $b\ge\xi_{12}\ge\xi_{22}\ge\ldots\ge\xi_{i_22}\ge a,\ldots$ $\ldots$, $b\ge\xi_{1m}\ge\xi_{2m}\ge\ldots\ge\xi_{i_mm}\ge a$, $i_1+i_2+\ldots+i_m=k$, $k=1,2,\ldots,n$.

Доведення. Не зменшуючи загальності та уникаючи громіздких викладок, покажемо справедливість цього твердження для випадку $m = n = 2$. З (16) отримуємо

$$P_{2,2}(F; x, y) = F(x_0, y_0) + \int_a^b F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0) dg_{\tau_{11}}(x - x_0) +$$

$$+ \int_a^b F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0)) dg_{\tau_{12}}(y - y_0) +$$

$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_{11}} F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0) dg_{\tau_{21}}(x - x_1) dg_{\tau_{11}}(x - x_0) +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0)) dg_{\tau_{11}}(x - x_0) dg_{\tau_{12}}(y - y_0) +$$

$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_{12}} F''(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0) + g_{\tau_{22}}(y_2 - y_1)) dg_{\tau_{22}}(y - y_1) dg_{\tau_{12}}(y - y_0). \quad (18)$$

Покажемо, що континуальні „точки”

$$u(\xi) = (x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\xi_{21}}(x_2 - x_1), y_0),$$

$$v(\xi) = (x_0, y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0) + g_{\xi_{22}}(y_2 - y_1)),$$

$$w(\xi) = (x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0))$$

будуть вузлами інтерполяційного полінома $P_{2,2}(F; x, y)$. На підставі теореми 1 $u(\xi), v(\xi)$ — вузли полінома $P_{2,2}(F; x, y)$. Доведемо інтерполяційність $w(\xi)$. Маємо

$$P_{2,2}(F; w(\xi)) = F(x_0, y_0) + \int_a^b F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0) dg_{\tau_{11}}(g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0)) +$$

$$+ \int_a^b F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0)) dg_{\tau_{12}}(g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) +$$

$$+ \int_a^b \int_a^{\tau_{11}} F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0) \times$$

$$\times dg_{\tau_{21}}(x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0) - x_1) dg_{\tau_{11}}(g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0)) +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0)) \times$$

$$\times dg_{\tau_{11}} g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0) dg_{\tau_{12}} g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0) +$$

$$+\int\limits_a^b\int\limits_a^{\tau_{12}} F''(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0) + g_{\tau_{22}}(y_2 - y_1))\times$$

$$\times dg_{\tau_{22}}(g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0) + y_0 - y_1) dg_{\tau_{12}} g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0) =$$

$$= F(x_0, y_0) + F(x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0) - F(x_0, y_0) + F(x_0, y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) -$$

$$-F(x_0, y_0) + \int\limits_a^{\xi_{11}}\int\limits_a^{\tau_{11}} F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_0 - x_1) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0)\times$$

$$\times d\big[g_{\tau_{21}}(x_0 - x_1) + g_{\tau_{21}}(x_1 - x_0)\big] dg_{\tau_{11}} g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0) +$$

$$+\int\limits_a^{\xi_{12}}\int\limits_a^{\tau_{12}} F''(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0) + g_{\tau_{22}}(y_2 - y_1))\times$$

$$\times d\big[g_{\tau_{22}}(y_1 - y_0) + g_{\tau_{22}}(y_0 - y_1)\big] dg_{\tau_{12}} g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0) +$$

$$+\int\limits_a^{\xi_{11}}\int\limits_a^{\xi_{12}} F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))\times$$

$$\times dg_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) dg_{\tau_{12}}(y_1 - y_0) =$$

$$= F(x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0) + F(x_0, y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) - F(x_0, y_0) +$$

$$+\int\limits_a^{\xi_{11}} \Big\{F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) -$$

$$-F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0)\Big\} dg_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0) + F(x_0, y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) - F(x_0, y_0) +$$

$$+F(x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) - F(x_0, y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) -$$

$$-F(x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0) + F(x_0, y_0) =$$

$$= F(x_0 + g_{\xi_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\xi_{12}}(y_1 - y_0)) = F(w(\xi)).$$

В цих перетвореннях використано належність операторів $g_{\tau s}$ до множини G, а також правило диференціювання оператора за параметром [8].

***Зауваження* 3.** Питання континуальності інтерполяційних вузлів розглядалися також в [10, 11]. У цих роботах для нелінійних функціоналів, визначених на просторі кусково-неперервних функцій, побудовано інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб за континуальними кусково-неперервними вузлами, знайдено умови існування та єдиності таких інтерполянтів.

1. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Про континуальні вузли інтерполювання формул типу Ньютона та Ерміта в лінійних топологічних просторах // Доп. НАН України. – 2007. – № 12. – С. 22 – 27.

2. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Інтерполяція функціоналів багатьох змінних // Там же. – 2009. – № 5. – С. 29 – 35.
3. *Егоров А. Д., Соболевський П. И., Янович Л. А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск: Наука и техника, 1985. – 310 с.
4. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Кашпур О. Ф., Михальчук Б. Р.* Интерполяционные полиномы типа Ньютона с континуальними узлами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 779 – 790.
5. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Функціональні поліноми Ерміта в просторі $Q[0,1]$ // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 21 – 25.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1968. – 495 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 407 с.
9. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений: В 2 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 632 с.
10. *Михальчук Б. Р.* Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 3. – С. 364 – 375.
11. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Михальчук Б. Р.* Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Там же. – 2003. – **55**, № 4. – С. 479 – 488.

Одержано 29.12.09