УДК 517.5

А. С. Романюк, В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И БИЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We obtain exact-order estimates for quantities of the best M-term trigonometric approximations of the Besov classes $B^r_{\infty,\theta}$ in the space L_q. We also find exact orders of the best bilinear approximations of classes of $2d$-variable functions formed by d-variable functions from the classes $B^r_{p,\theta}$ with the use of shift of an argument.

Встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих M-членних тригонометричних наближень класів Бєсова $B^r_{\infty,\theta}$ у просторі L_q. Знайдено також точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій $2d$ змінних, що породжені функціями d змінних із класів $B^r_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

Введение. В работе исследуются наилучшие M-членные тригонометрические приближения функций из классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q для соотношений между параметрами r, p и q, которые оставались неисследованными. Полученные в этом направлении результаты применяются затем для установления оценок сверху наилучших билинейных приближений функций $2d$ переменных вида $g(x,y) = f(x-y)$, $x, y \in \pi_d$, порождающихся из функций $f(x) \in B^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, сдвигами аргумента $x \in \pi_d$ на всевозможные векторы $y \in \pi_d$. Билинейные приближения такого рода функций тесно связаны с колмогоровскими поперечниками соответствующих функциональных классов, о чем более конкретно будет идти речь в комментариях к полученным результатам. Определения исследуемых аппроксимативных характеристик будут даны в соответствующих частях работы, а сначала приведем необходимые обозначения и определения изучаемых классов функций.

Пусть $\mathbb{R}^d$ — d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots \ldots, y_d)$, $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$, и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Всюду ниже будем предполагать, что для функций $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

и множество таких функций будем обозначать $L^o_p(\pi_d)$.

В последующем изложении нам будет удобно пользоваться определением классов $B^r_{p,\theta}$, базирующимся на так называемой декомпозиционной нормировке (см., например, [1]).

Для векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, положим

$$\rho(s) = \left\{ k \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1, d} \, \right\}$$

и для $f \in L_p^o(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) \, e^{i(k, x)},$$

где $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \displaystyle\int_{\pi_d} f(t) \, e^{-i(k,\,t)} \, dt$ — коэффициенты Фурье $f(x)$.

Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$. Тогда в принятых обозначениях классы $B^r_{p,\theta}$ определяются следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) \, \middle| \, \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \, \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) \, \middle| \, \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \left\| \delta_s(f, x) \right\|_p \le 1 \right\}.$$

Напомним, что классы $B^r_{p,\theta}$ являются аналогами классов функций, введенных О. В. Бесовым в [2], и $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, где H^r_p — аналоги классов, введенных С. М. Никольским (см., например, [3], гл. 4, § 4.3).

Приведенное определение классов $B^r_{p,\theta}$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$, видоизменив „блоки” $\delta_s(f, x)$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, — ядро Валле Пуссена порядка $2\,l$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k - l}{l} \right) \cos\, kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}\,(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}\,(x_j) \right)$$

и для $f \in L_p^o(\pi_d)$ обозначим

$$A_s(f, x) = f(\cdot) * A_s(\cdot),$$

где $*$ — операция свертки. Тогда при каждом $1 \le \; p \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, классы $B^r_{p,\theta}$ определяются следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) \, \middle| \, \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \, \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) \,\Big|\, \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \left\| A_s(f,x) \right\|_p \leq 1 \right\}.$$

Поскольку в комментариях к полученным результатам речь будет идти о соответствующих результатах на классах $W^r_{p,\,\alpha}$, то для удобства напомним определение и этих классов функций.

Пусть $F_r(x,\alpha)$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, — многомерные аналоги ядер Бернулли, т. е.

$$F_r(x,\alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\Big(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\Big), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме содержатся только те векторы $k = (k_1, \ldots, k_d)$, для которых $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$. Обозначим через $W^r_{p,\,\alpha}$ (см., например, [4, с. 31]) класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x,\alpha) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x-y,\alpha) dy,$$

где $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

Ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \ldots, r_d)$, содержащихся в приведенных определениях классов, упорядочены в виде $0 < r_1 = = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \ldots \leq r_d$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ — вектор с координатами $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом для функций $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $\mu_1(n) \leq C_1 \mu_2(n)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что постоянные C_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые будут содержаться в определениях функций и в порядковых соотношениях, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, от метрики и от размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Если A — конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество его элементов.

1. Наилучшие тригонометрические приближения. Установим точные по порядку оценки наилучших M-членных тригонометрических и ортогональных тригонометрических приближений функций из классов $B^r_{p,\theta}$. Полученные результаты, с одной стороны, дополняют оценки соответствующих величин, которые установлены в [5, 6], а с другой — используются для получения оценок сверху наилучших билинейных приближений функций из классов $B^r_{p,\theta}$.

Приведем определения соответствующих аппроксимативных характеристик.

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, положим

$$e_M(f)_q = \inf_{k^j,\, c_j} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^M c_j \, e^{i(k^j,x)} \right\|_q, \tag{1}$$

где $\{k^j\}_{j=1}^M$ — система векторов $k^j = (k^j_1, \ldots, k^j_d)$ с целочисленными координатами, c_j — произвольные комплексные числа. Величину $e_M(f)_q$ называют наилучшим M-членным тригонометрическим приближением функции f в пространстве L_q. Если

$F \subset L_q(\pi_d)$ — некоторый функциональный класс, то полагаем

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{2}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функций одной переменной введена С. Б. Стечкиным [7] при формулировке критерия сходимости ортогональных рядов. Несколько позже величины (1) и (2) начали исследовать уже с точки зрения аппроксимации функций и классов функций соответственно. С соответствующей библиографией по данному вопросу можно ознакомиться, например, в [5, 6].

Пусть Ω_M — произвольный набор из M d-мерных векторов $k^1, \ldots, k^M$, $k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, с целочисленными координатами.

Для $f \in L_q^o(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, положим

$$S_M(f, x) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j, x)}$$

и рассмотрим величину

$$e_M^{\perp}(f)_q = \inf_{\Omega_M} \big\| f(x) - S_M(f, x) \big\|_q.$$

Для функционального класса $F \subset L_q(\pi_d)$ полагаем

$$e_M^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q.$$

Величину $e_M^{\perp}(F)_q$ называют наилучшим ортогональным тригонометрическим приближением класса F в пространстве L_q. Легко видеть, что между величинами $e_M^{\perp}(F)_q$ и $e_M(F)_q$ имеет место соотношение

$$e_M(F)_q \le e_M^{\perp}(F)_q. \tag{3}$$

Величины $e_M^{\perp}(F)_q$ в тех случаях, когда $F = W_{p,\alpha}^r$, H_p^r либо $F = B_{p,\theta}^r$, изучались в работах [8, 9], в которых можно ознакомиться с соответствующей библиографией.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 < q < \infty, r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$ *имеют место соотношения*

$$e_M(B_{\infty,\theta}^r)_q \asymp e_M^{\perp}(B_{\infty,\theta}^r)_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 + 1/2 - 1/\theta)_+}, \tag{4}$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доказательство. Согласно (3) оценки сверху в (4) достаточно получить для величины $e_M^{\perp}(B_{\infty,\theta}^r)_q$, а снизу — для $e_M(B_{\infty,\theta}^r)_q$.

Оценка сверху для $e_M^{\perp}(B_{\infty,\theta}^r)_q$ следует из оценки величины $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^r)_q$, $1 < q < p < \infty$, $p \ge 2$ [8] (теорема 2) в силу вложения $B_{\infty,\theta}^r \subset B_{p,\theta}^r$.

Переходя к установлению в (4) оценки снизу, заметим, что ее достаточно получить в случае $\nu = d$. При этом будем использовать результат, полученный Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым [10], для формулировки которого приведем соответствующие обозначения.

Для вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, s_j — четные числа, $s_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, обозначим

$$\rho^+(s) = \Big\{k = (k_1, \ldots, k_d) : \, k_j \in \mathbb{N}, \, 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}\Big\}$$

и для $n \in \mathbb{N}, n \ge 2d$, положим

$$S_n = \left\{s \colon (s, 1) = 2\left[\frac{n}{2}\right]\right\}, \qquad \overline{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho^+(s),$$

где $[\,a\,]$ — целая часть числа a.

Отметим, что для введенных множеств имеют место соотношения (см., например, [10])

$$|S_n| \asymp n^{d-1} \quad \text{и} \quad |\overline{Q}_n| \asymp 2^n \, n^{d-1}.$$

Понятно, что необходимую оценку снизу величины $e_M(B^r_{\infty,\theta})_q$ достаточно получить для M, удовлетворяющих неравенствам $C_1(d)|\overline{Q}_n| < M \le C_2(d)|\overline{Q}_n|$, где $0 < C_1(d) < C_2(d)$ — постоянные, которые могут зависеть только от параметра d.

Пусть $T(\overline{Q}_n)$ обозначает множество полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{|k| \in \overline{Q}_n} c_k e^{i(k,\, x)},$$

где $|k| = (|k_1|, \ldots, |k_d|)$.

Следуя авторам работы [10], сформулируем полученное ими утверждение в виде следствия более общего утверждения, установленного там же.

***Следствие* 1.** *Пусть* $r = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d$, $r_1 > 0$ *и* $1 < q \le \infty$. *Тогда справедлива оценка*

$$e_M(H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n))_q \ge C(q, d, r) M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + 1/2}. \tag{5}$$

Покажем, что из (5) легко получить искомую оценку снизу величины $e_M(B^r_{\infty,\theta})_q$. Поскольку для $f \in H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$ выполнено соотношение

$$\big\|A_s(f, x)\big\|_\infty \ll 2^{-(s,r)}, \quad s \in S_n,$$

при любом $1 \le \theta \le \infty$, то

$$\|f\|_{B^r_{\infty,\theta}} = \left(\sum_{s \in S_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|^\theta_\infty\right)^{1/\theta} \ll \left(\sum_{s \in S_n} 1\right)^{1/\theta} \asymp n^{(d-1)/\theta}.$$

Следовательно, если $f \in H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$, то функция $g(x) = C_1 \, n^{-(d-1)/\theta} f(x)$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$ принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)$. Учитывая это обстоятельство и используя (5), получаем

$$e_M(B^r_{\infty,\theta})_q \ge e_M(B^r_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n))_q \gg$$

$$\gg n^{-(d-1)/\theta} e_M(H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n))_q \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1 + 1/2 - 1/\theta}.$$

Установленная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху величины $e_M(B^r_{\infty,\theta})_q$ в случае $r_1 > \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$. Если же имеет место случай $0 < r_1 < \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$, то отметим следующее.

С одной стороны, поскольку в этом случае оценка сверху величины $e_M(B^r_{\infty,\theta})_q$ не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, соответствующую оценку снизу достаточно доказать в одномерном случае, т. е. при $d = 1$. С другой стороны, в одномерном случае проведенные выше рассуждения позволяют получить искомую оценку снизу величины $e_M(B^r_{\infty,\theta})_q$ для любого $r_1 > 0$.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** В случае $\theta = \infty$, т. е. для классов H^r_∞, оценка снизу величины $e_M(H^r_\infty)_q$ и, следовательно, величины $e^\perp_M(H^r_\infty)_q$ получена в [10].

В следующем утверждении теорема 1 распространяется на случай $q = 1$, но с определенным ограничением на параметр r_1.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le \theta < 2$, $0 < r_1 < \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$. *Тогда справедливо соотношение*

$$e_M(B^r_{\infty,\theta})_1 \asymp e^\perp_M(B^r_{\infty,\theta})_1 \asymp M^{-r_1}.$$

Доказательство. Оценки сверху величин $e_M(B^r_{\infty,\theta})_1$ и $e^\perp_M(B^r_{\infty,\theta})_1$ следуют из (4) в силу неравенства $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_q$, $q > 1$. Поскольку полученная оценка сверху величины $e_M(B^r_{\infty,\theta})_1$ не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, соответствующую ей оценку снизу достаточно установить в одномерном случае. Но, с другой стороны, в одномерном случае оценка снизу для $e_M(B^{r_1}_{\infty,\theta})_1$ является следствием результата, полученного в [11].

Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Порядки величин $e_M(F)_1$ и $e^\perp_M(F)_1$, где F — классы $W^r_{\infty,\alpha}$ либо H^r_∞, в многомерном случае, т. е. при $d \ge 2$, по-видимому, неизвестны.

2. Наилучшие билинейные приближения. Пусть $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, — множество функций $f(x, y)$, $x, y \in \pi_d$, с конечной смешанной нормой

$$\|f(x, y)\|_{q_1,q_2} = \big\| \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \big\|_{q_2},$$

причем норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$ по переменной $x \in \pi_d$, а затем от результата по переменной $y \in \pi_d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка M:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| f(x, y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)\, v_i(y) \right\|_{q_1,q_2}, \qquad (6)$$

где $u_i \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_d)$.

Классический результат по исследованию билинейных приближений принадлежит Шмидту [12]. Несколько позже билинейные приближения как индивидуальных функций (величина (6)), так и классов функций изучались во многих работах.

Если $F \subset L_1(\pi_d)$ — некоторый класс функций d переменных, то полагаем

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M\big(f(x - y)\big)_{q_1,q_2}, \qquad (7)$$

где $f(x - y) =: f(x; y)$ — функция $2d$ переменных. Исследованию величин (7) в случаях, когда $F = W^r_{p,\alpha}$ либо $F = H^r_p$, посвящены работы В. Н. Темлякова [13 – 15] (см. также [4]), а в [9] установлена слабая асимптотика величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ в случае $F = B^r_{p,\theta}$ при значениях параметров p, θ, q_1, q_2, отличных от рассматриваемых в настоящей работе. В упомянутых работах содержится библиография, относящаяся к этому направлению исследований.

Нами решена задача о порядковых оценках величин $\tau_M(B^r_{p,\,\theta})_{q_1,q_2}$ при определенных значениях параметров p, θ, r и q_1, q_2.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q_1 \leq 2$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ *и* $1 \leq \theta < q_1$, $1 - \dfrac{1}{q_1} < r_1 \leq \leq 1 - \dfrac{2}{q_1} + \dfrac{1}{\theta}$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{1,\theta})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1+1-1/q_1}. \tag{8}$$

Доказательство. Оценка сверху в (8) следует из оценки наилучших M-членных тригонометрических приближений классов $B^r_{1,\theta}$ в метрике пространства L_{q_1}, $1 < < q_1 \leq 2$. В [5] (теорема 3.1), в частности, при $p = 1$ получено соотношение

$$e_M(B^r_{1,\theta})_{q_1} \asymp M^{-r_1+1-1/q_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1+2/q_1-1/\theta)_+},$$

которое при выполнении условий теоремы 3 принимает вид

$$e_M(B^r_{1,\theta})_{q_1} \asymp M^{-r_1+1-1/q_1}. \tag{9}$$

Таким образом, с одной стороны, согласно (9) для произвольной функции $f(x)$ из класса $B^r_{1,\theta}$ найдется множество векторов $k^1, \ldots, k^M$, $k^j = (k^j_1, \ldots, k^j_d)$, $k^j_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, d}$, и чисел $c_1, \ldots, c_M$ таких, что

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(k^j,x)} \right\|_{q_1} \ll M^{-r_1+1-1/q_1}. \tag{10}$$

С другой стороны, для левой части (10) можно записать

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(k^j,x)} \right\|_{q_1} = \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(k^j,(x-y))} \right\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(k^j,x)} e^{-i(k^j,y)} \right\|_{q_1,\infty}. \tag{11}$$

Сопоставляя (10) и (11), имеем

$$\left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(k^j,x)} e^{-i(k^j,y)} \right\|_{q_1,\infty} \ll M^{-r_1+1-1/q_1}. \tag{12}$$

Наконец, полагая в (12) $c_j e^{i(k^j,\,x)} = u_j(x)$ и $e^{-i(k^j,\,y)} = v_j(y)$, приходим к искомой оценке сверху величины $\tau_M(B^r_{1,\theta})_{q_1,q_2}$.

Переходя к доказательству в (8) оценки снизу, заметим следующее.

Поскольку полученная оценка сверху величины $\tau_M(B^r_{1,\theta})_{q_1,q_2}$ не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, искомую оценку снизу достаточно установить в одномерном случае, т. е. при $d = 1$.

Кроме того, так как $B^r_{1,1} \subset B^r_{1,\theta}$, $1 < \theta \le \infty$, при этом достаточно ограничиться рассмотрением случая $\theta = 1$.

Нам понадобится вспомогательное утверждение.

Пусть $C(N)$ обозначает множество целых чисел, удовлетворяющих условию $|k| \le N$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма A [4, с. 107]. *Пусть задана функция*

$$g(x) = \sum_{k \in C(2N)} \widehat{g}(k) e^{ikx}$$

такая, что $|\widehat{g}(k)| \le 1$ *и* $|\widehat{g}(k)| = 1$ *при* $k \in C(N)$. *Тогда выполнено соотношение*

$$\tau_M \big(g(x-y)\big)_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Итак, по числу M подберем $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $2^{n-1} \le M < 2^n$ и рассмотрим билинейное приближение функции $V_{2^{n+2}}(x-y)$.

Пусть системы функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ и $\{v_i(y)\}_{i=1}^M$, $x, y \in T = [-\pi, \pi]$, таковы, что

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \le 2\tau_M \left(V_{2^{n+2}}(x-y)\right)_{q_1,1}.$$

Если $\mathbf{V}_l$ — оператор Валле Пуссена, $\mathbf{V}_l[\,f\,] := f * V_l$, то, поскольку

$$\left\| \mathbf{V}_{2^{n+3}} \left[V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right] \right\|_{q_1,1} =$$

$$= \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^M \mathbf{V}_{2^{n+3}}[u_i(x) v_i(y)] \right\|_{q_1,1}$$

и для $f \in L_q(T)$, $1 \le q \le \infty$, выполнено неравенство

$$\big\| \mathbf{V}_l[f] \big\|_q \le 3 \|f\|_q,$$

не умаляя общности можно считать, что функции $u_i(x)$ и $v_i(y)$ являются тригонометрическими полиномами с номерами гармоник из множества $C(2^{n+3})$ и при этом справедлива оценка

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^M u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_M \big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}. \tag{13}$$

В последующих рассуждениях будем использовать неравенство разных метрик, полученное С.М.Никольским, которое сформулируем, в частности, для одномерного случая.

Пусть $T(C(2^n))$ обозначает множество тригонометрических полиномов с номерами гармоник из $C(2^n)$.

Теорема A [16]. *Пусть* $t \in T(C(2^n))$. *Тогда при* $1 \le q \le p \le \infty$ *имеет место неравенство*

$$\|t\|_p \le 2 \cdot 2^{n(1/p - 1/q)} \|t\|_q. \tag{14}$$

Таким образом, согласно (13) и (14) можем записать

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} \ll$$

$$\ll 2^{n(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll$$

$$\ll 2^{n(1/q_1-1/2)} \tau_M\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}. \tag{15}$$

Далее, принимая во внимание соотношение между числами M и n и используя лемму A из (15), находим

$$\tau_M\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q_1,1} \gg 2^{-n(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} \gg$$

$$\gg 2^{-n(1/q_1-1/2)} M^{1/2} \asymp 2^{-n(1/q_1-1)}. \tag{16}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f_1(x) = C_2 2^{-nr_1} V_{2^{n+2}}(x), \quad C_2 > 0.$$

Нетрудно убедиться, что при надлежащем выборе постоянной $C_2 > 0$ эта функция принадлежит классу $B^{r_1}_{1,1}$. Действительно, поскольку в силу свойства ядра Валле Пуссена

$$\big\| V_{2^{n+2}} \big\|_1 \le C_3, \quad C_3 > 0,$$

согласно определению $\|V_{2^{n+2}}\|_{B^{r_1}_{1,1}}$ можем записать

$$\big\| V_{2^{n+2}} \big\|_{B^{r_1}_{1,1}} = \sum_s 2^{sr_1} \|A_s(V_{2^{n+2}}, x)\|_1 \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{n+3} 2^{sr_1} \|A_s(V_{2^{n+2}}, x)\|_1 \ll 2^{(n+3)r_1} \asymp 2^{nr_1}.$$

Следовательно, $f_1 \in B^{r_1}_{1,1}$.

Таким образом, используя оценку (16), приходим к соотношению

$$\tau_M(B^{r_1}_{1,1})_{q_1,\,q_2} \ge \tau_M(f_1(x-y))_{q_1,\,q_2} \gg 2^{-nr_1}\tau_M(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1} \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1} 2^{-n(1/q_1-1)} = 2^{-n(r_1-1+1/q_1)} \asymp M^{-r_1+1-1/q_1}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

***Замечание* 3.** Порядки величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$, $1 < q_1 \le 2$, $1 \le q_2 \le \infty$, $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q_1}$, в случаях, когда $F = W^r_{1,\,\alpha}$ либо $F = H^r_1$, по-видимому, неизвестны.

Теорема 4. *Пусть* $2 \le q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$ *и* $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{\infty,\theta})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)_+}. \tag{17}$$

Доказательство. Оценка сверху в (17) следует из теоремы 1 аналогично доказательству оценки сверху в предыдущей теореме.

Переходя к доказательству в (17) оценки снизу, заметим, что при этом достаточно рассмотреть случай $\nu = d$.

Пусть M — произвольное натуральное число, а число $n \in \mathbb{N}$ таково, что для количества элементов множества $Q_n = \bigcup\limits_{(s,1)=n} \rho(s)$ выполнено соотношение

$$|Q_n| > 4M \tag{18}$$

(известно, что $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$).

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = C_4 2^{-n(r_1+1/2)} n^{-(d-1)/\theta} \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j), \quad C_4 > 0,$$

где

$$R_{s_j}(x_j) = \sum_{l=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} \varepsilon_l e^{ilx_j}, \quad \varepsilon_l = \pm 1, \quad j = \overline{1,d},$$

— полиномы Рудина – Шапиро (см., например, [17, с. 155]). Для этих полиномов выполняется неравенство $\|R_{s_j}\|_\infty \ll 2^{s_j/2}$.

Заметим, что в случае $\theta = \infty$ множитель $n^{-(d-1)/\theta}$ в определении функции $f_2(x)$ заменяется единицей.

Покажем, что при определенном выборе постоянной $C_4 > 0$ функция $f_2(x)$ принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$.

Положим

$$F_n(x) = \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j)$$

и заметим, что для векторов s таких, что $(s,1) = n$, имеет место соотношение

$$\delta_s(F_n, x) = \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j).$$

Пусть $\theta \in [1, \infty)$, тогда

$$\|F_n\|_{B^r_{\infty,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(F_n,x)\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \left\| A_s(x) * \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \delta_{s'}(F_n,x) \right\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \le$$

$$\le \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s\|_1^\theta \left\| \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \delta_{s'}(F_n,x) \right\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s} 2^{(s,r)\theta} \left(\sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \|\delta_{s'}(F_n, x)\|_\infty \right)^\theta \right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_{s} 2^{(s,r)\theta} \left(\sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s'_j}(x_j) \right\|_\infty \right)^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\le n} 2^{(s,r)\theta} \left(\sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} 2^{(s',1)/2} \right)^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\le n+d} 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)\frac{\theta}{2}} \right)^{1/\theta} = \left(\sum_{(s,1)\le n+d} 2^{(s,1)(r_1+\frac{1}{2})\theta} \right)^{1/\theta}. \tag{19}$$

Далее, поскольку

$$\sum_{(s,1)\le l} 2^{(s,1)\alpha} = \sum_{m=d}^{l} \sum_{(s,1)=m} 2^{(s,1)\alpha} =$$

$$= \sum_{m=d}^{l} 2^{m\alpha} \sum_{(s,1)=m} 1 \asymp \sum_{m=d}^{l} 2^{m\alpha} m^{d-1} \asymp 2^{\alpha l} l^{d-1}, \quad \alpha > 0,$$

из (19) находим

$$\|F_n\|_{B^r_{\infty,\,\theta}} \ll 2^{n(r_1+1/2)} n^{(d-1)/\theta}.$$

Аналогично при $\theta = \infty$

$$\|F_n\|_{B^r_{\infty,\,\infty}} \ll 2^{n(r_1+1/2)}.$$

Таким образом, на основании полученных соотношений можно сделать заключение, что функция $f_2(x)$ с некоторой постоянной $C_4 > 0$ принадлежит классу $B^r_{\infty,\,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$.

Далее нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма Б [4, с. 98]. *Пусть задано число M, а число $n \in \mathbb{N}$ таково, что для количества элементов множества $Q_n = \bigcup\limits_{(s,1)=n} \rho(s)$ выполнено условие* (18). *Тогда для любой функции $g(x)$ вида*

$$g(x) = \sum_{k \in Q_n} \widehat{g}(k) e^{i(k,\,x)}, \quad |\widehat{g}(k)| = 1,$$

справедлива оценка

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| g(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Следовательно, поскольку функция $F_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы Б, для $\tau_M(f_2(x-y))_{2,1}$ имеем

$$\tau_M(f_2(x-y))_{2,1} \gg M^{1/2} 2^{-n(r_1+1/2)} n^{-(d-1)/\theta} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Отсюда следует искомая оценка снизу величины $\tau_M\big(B^r_{\infty,\theta}\big)_{q_1,q_2}$ в случае $r_1 \geq \geq \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$. Если же имеет место случай $0 < r_1 < \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$, то заметим следующее. Поскольку в этом случае оценка сверху величины $\tau_M\big(B^r_{\infty,\theta}\big)_{q_1,q_2}$ не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^d$, соответствующую оценку снизу достаточно доказать при $d = 1$. Но с другой стороны, в одномерном случае проведенные выше рассуждения дают возможность получить искомую оценку снизу величины $\tau_M\big(B^r_{\infty,\theta}\big)_{q_1,q_2}$ для всех $r_1 > 0$.

Теорема доказана.

Положив в (17) $\theta = \infty$, можем сформулировать следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть $2 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ и $r_1 > 0$. Тогда*

$$\tau_M(H^r_\infty)_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2}. \tag{20}$$

Отметим, что этот результат дополняет оценки билинейных приближений классов H^r_p, полученные В. Н. Темляковым (см. [4, с. 100]). Что касается точных порядков величин $\tau_M\big(W^r_{\infty,\alpha}\big)_{q_1,q_2}$, то они, по-видимому, неизвестны.

Прокомментируем полученные результаты, сопоставив их с оценками колмогоровских поперечников рассматриваемых классов функций. Приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть Φ — некоторое (центрально-симметричное) множество банахова пространства $\mathcal{X}$. Тогда M-мерным колмогоровским поперечником множества Φ называется величина

$$d_M(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{L_M} \sup_{f\in\Phi} \inf_{u\in L_M} \|f-u\|_{\mathcal{X}},$$

где внешний инфимум берется по всевозможным подпространствам $L_M \subset \mathcal{X}$ размерности M.

Пусть F — некоторый функциональный класс и f — фиксированная функция из F. Обозначим через F_f множество функций вида $f(x-y)$, получающихся из $f(x)$ сдвигами ее аргумента $x \in \pi_d$ на произвольный вектор $y \in \pi_d$. Тогда имеет место равенство (см., например, [4, с. 85])

$$\tau_M\big(f(x-y)\big)_{q_1,\infty} = d_M(F_f, L_{q_1}). \tag{21}$$

Таким образом, если класс F инвариантен относительно сдвига аргумента содержащихся в нем функций, то в силу (21) значение величины $\tau_M\big(f(x-y)\big)_{q_1,\infty}$ может служить оценкой снизу для колмогоровского поперечника $d_M(F, L_{q_1})$.

***Замечание* 4.** Сопоставляя теорему 3 с оценкой колмогоровского поперечника $d_M\big(B^r_{1,\theta}, L_{q_1}\big)$ [18] (теорема 1.1), видим, что при $1 < q_1 \leq 2$ и $1 - \dfrac{1}{q_1} < r_1 \leq \leq 1 - \dfrac{2}{q_1} + \dfrac{1}{\theta}$

$$\tau_M(B^r_{1,\theta})_{q_1,\infty} \asymp d_M(B^r_{1,\theta}, L_{q_1}) (\log^{\nu-1} M)^{-r_1+1-1/q_1}.$$

***Замечание* 5.** Сопоставляя оценку (20) при $q_2 = \infty$ с соответствующей оценкой колмогоровского поперечника $d_M\big(H^r_\infty, L_{q_1}\big)$ [14], видим, что

$$\tau_M(H^r_\infty)_{q_1,\,\infty} \asymp d_M(H^r_\infty, L_{q_1}).$$

На классах $B^r_{\infty,\,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, ситуация иная. Так, сопоставляя оценку поперечника $d_M(B^r_{\infty,\,\theta}, L_{q_1})$ [18] с теоремой 4, при $q_2 = \infty$ находим, что если $2 \le \theta < \infty$, то

$$\tau_M(B^r_{\infty,\,\theta})_{q_1,\,\infty} \asymp d_M(B^r_{\infty,\,\theta}, L_{q_1}).$$

Если же $1 \le \theta < 2$, то

$$\tau_M(B^r_{\infty,\,\theta})_{q_1,\,\infty} \asymp d_M(B^r_{\infty,\,\theta}, L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{1/2-1/\theta}$$

при $r_1 > \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$ и

$$\tau_M(B^r_{\infty,\,\theta})_{q_1,\,\infty} \asymp d_M(B^r_{\infty,\,\theta}, L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{-r_1}$$

при $0 < r_1 \le \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$.

В следующем утверждении получим порядки наилучших билинейных приближений функций двух переменных из классов $B^r_{p,\,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, r_1)$, $r_1 > 0$, в пространстве $L_{q,\,q}(\pi_2)$, $1 \le q \le \infty$, которое, очевидно, в таком случае совпадает с пространством $L_q(\pi_2)$.

Положим $\tau_M(F)_q := \sup\limits_{f(x,y)\in F} \tau_M(f)_{q,q}$, где $F \subset L_q(\pi_{2d})$ — класс функций $2d$ переменных $(x_1, \ldots, x_d,\, y_1, \ldots, y_d)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $d = 1$. Тогда при $1 \le \theta < \infty$ имеют место соотношения*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} M^{-2r_1+1/p-1/q}, & 1 \le p \le q \le 2, \quad r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}, \\ M^{-2r_1} & 2 \le p \le q \le \infty, \quad r_1 > \dfrac{1}{2}, \\ M^{-2r_1+1/p-1/2}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty, \quad r_1 > \dfrac{1}{p}. \end{cases} \qquad (22)$$

Доказательство. Оценки сверху следуют из соответствующих оценок билинейных приближений классов H^r_p, полученных в [4, с. 101] (теорема 4.2). Перейдем к получению в (22) оценок снизу, которые в силу вложения $B^r_{p,\,1} \subset B^r_{p,\,\theta}$, $1 < \theta < \infty$, достаточно установить для классов $B^r_{p,\,1}$.

Итак, пусть сначала имеет место случай $1 \le p \le q \le 2$. Поставим в соответствие натуральному числу M число $n \in \mathbb{N}$ согласно неравенствам $2^{n-1} \le M < 2^n$ и рассмотрим билинейное приближение функции двух переменных вида

$$f_1(x,y) = C_5 2^{-(2r_1+1-1/p)n} V_{2^{n+2}}(x-y), \quad C_5 > 0.$$

Покажем сначала, что при соответствующем выборе постоянной C_5 эта функция принадлежит классу $B^r_{p,\,1}$.

Имеем

$$\|f_1\|_{B^r_{p,\,1}} = C_5 2^{-(2r_1+1-1/p)n} \sum_{s_1,s_2>0} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\| A_{(s_1,s_2)}\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)\right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-(2r_1+1-1/p)n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\| A_{(s_1,s_2)}\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)\right\|_p \ll$$

$$2^{-(2r_1+1-1/p)n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\| A_{(s_1,s_2)}(x,y)\right\|_1 \left\|V_{2^{n+2}}(x-y)\right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-(2r_1+1-1/p)n} \cdot 2^{(2n+6)r_1} \cdot 2^{(n+2)(1-1/p)} \leq C(r_1,p).$$

Отсюда заключаем, что $f(x,y) \in B^r_{p,1}$.

Теперь, используя соотношение

$$\tau_M(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q,1} \gg 2^{-n(1/q-1)},$$

полученное при доказательстве теоремы 3 (см. (16)), можем записать

$$\tau_M(f)_{q,1} \asymp 2^{-(2r_1+1-1/p)n} \tau_M\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q,1} \gg$$

$$\gg 2^{-(2r_1+1-1/p)n} \cdot 2^{-n(1/q-1)} = 2^{-(2r_1-1/p+1/q)n} \asymp M^{-2r_1+1/p-1/q}. \qquad (23)$$

Отсюда следует оценка снизу величины $\tau_M(B^r_{p,\theta})_q$ в случае $1 \leq p \leq q \leq 2$.

Искомая оценка снизу в третьем соотношении (22), т. е. при $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$, следует из (23) при $q = 2$ в силу неравенства $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_q$, $q \geq 2$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось получить в (22) оценку снизу величины $\tau_M(B^r_{p,1})_q$ в случае $2 \leq p \leq q \leq \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{2}$.

Пусть числа M и n связаны неравенствами $2^{n-2} < M \leq 2^{n-1}$ и

$$R_n(t) = \sum_{k=2^n-1}^{2^n-1} \varepsilon_k e^{ikt}, \quad \varepsilon_k = \pm 1,$$

— полином Рудина – Шапиро, для которого $\|R_n\|_\infty \ll 2^{n/2}$.

Рассмотрим функцию двух переменных вида

$$f_2(x,y) = C_6 2^{-(2r_1+1/2)n} R_n(x-y), \quad C_6 > 0,$$

и покажем, что при соответствующем выборе постоянной $C_6 > 0$ она принадлежит классу $B^r_{p,1}$.

Имеем

$$\left\|R_n(x-y)\right\|_{B^r_{p,1}} = \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\|A_{(s_1,s_2)}(R_n(x-y))\right\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s_1=1}^{n+2} \sum_{s_2=1}^{n+2} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\|A_{(s_1,s_2)}(x,y) * R_n(x-y)\right\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{s_1=1}^{n+2} \sum_{s_2=1}^{n+2} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\|A_{(s_1,s_2)}(x;y)\right\|_1 \cdot \left\|R_n(x-y)\right\|_\infty \ll$$

$$\ll 2^{2nr_1} \cdot 2^{n/2} = 2^{(2r_1+1/2)n}.$$

Отсюда следует, что функция $f_2(x,y)$ принадлежит классу $B^r_{p,1}$.

Теперь, принимая во внимание, что функция $R_n(x-y)$ удовлетворяет условиям леммы A и для нее выполнена оценка

$$\tau_M(R_n(x-y))_{2,1} \gg M^{1/2}, \tag{24}$$

используя (24), получаем

$$\tau_M(f_2(x-y))_{2,1} \gg 2^{-(2r_1+\frac{1}{2})n}\tau_M(R_n(x-y))_{2,1} \gg$$
$$\gg 2^{-(2r_1+\frac{1}{2})n}M^{1/2} \asymp M^{-2r_1-\frac{1}{2}}\cdot M^{1/2} = M^{-2r_1}.$$

Оценки снизу, а вместе с ними теорема доказаны.

В завершение работы установим точные по порядку оценки наилучших билинейных приближений функций из классов $B^r_{p,\theta}$ в анизотропном случае.

Пусть p,q и r — двумерные векторы, $p=(p_1,p_2)$, $q=(q_1,q_2)$ и $r=(r_1,r_2)$, на координаты которых ниже будут наложены определенные ограничения.

Обозначим через $B^r_{p,\theta}$, $r=(r_1,r_2)$, $r_j>0$, $p=(p_1,p_2)$, $1\le p_j\le\infty$, $s= =(s_1,s_2)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=1,2$, множество функций $f\in L_p(\pi_2)$, для которых

$$\left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\left\|A_s(f,x)\right\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le 1, \quad 1\le\theta<\infty,$$

и

$$\sup_s 2^{(s,r)}\left\|A_s(f,x)\right\|_p \le 1, \quad \theta=\infty.$$

Введем еще некоторые обозначения, в терминах которых сформулируем полученный результат.

Пусть для компонент векторов $p=(p_1,p_2)$ и $q=(q_1,q_2)$ выполнены соотношения $1\le p_1\le q_1\le\infty$ и $1\le p_2,\ q_2\le\infty$.

Положим

$$\beta(p,q)=\begin{cases}\dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{q_1}, & 1\le p_1\le q_1\le 2,\\[2mm] 0, & 2\le p_1\le q_1\le\infty,\\[2mm] \dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{2}, & 1\le p_1<2<q_1\le\infty,\end{cases}$$

$$r(p,q)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{q_1},\ \left(\dfrac{1}{p_2}-\dfrac{1}{q_2}\right)_+\right), & 1\le p_1\le q_1\le 2,\\[2mm] \left(\dfrac{1}{p_1},\dfrac{1}{p_2}\right), & 2\le p_1\le q_1\le\infty,\ \ q_1>2,\\[2mm] \left(\dfrac{1}{p_1},\max\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{p_2}\right)\right), & 1\le p_1<2<q_1\le\infty.\end{cases}$$

В приведенном ниже утверждении векторное неравенство понимаем покомпонентно.

Теорема 6. *Пусть* $1\le\theta<\infty$, $1\le p_1\le q_1\le\infty$, $1\le p_2,\ q_2\le\infty$. *Тогда при* $r>r(p,q)$ *справедлива оценка*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \asymp M^{-r_1-r_2+\beta(p,q)}. \tag{25}$$

Доказательство. Оценка сверху в (25) следует из соответствующей оценки сверху величины $\tau_M(H^r_p)_q$, полученной в [15]. Оценки снизу величин $\tau_M(B^r_{p,\theta})_q$ доказываются совершенно аналогично доказательству оценок снизу в предыдущей теореме.

Теорема доказана.

1. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
2. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
4. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
5. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
6. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **82**, № 2. – С. 247 – 261.
7. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
8. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 1. – С. 109 – 121.
9. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
10. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
11. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
12. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**. – S. 433 – 476.
13. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 194 – 215.
14. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Там же. – 1989. – **189**. – С. 138 – 168.
15. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1987. – **176**, № 1. – С. 93 – 107.
16. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
17. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
18. *Романюк А. С.* Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 1. – С. 71 – 96.

Получено 04.11.09