УДК 517.968.72

Х. А. Хачатрян (Ин-т математики НАН Армении, Ереван)

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА НА ПОЛУОСИ

We prove the existence of a one-parameter family of solutions of a system of nonlinear integral Hammerstein-type equations of the positive semiaxis. We also investigate asymptotic behavior of the obtained solutions at infinity.

Доведено існування однопараметричної сім'ї розв'язків системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна на додатній півосі та досліджено асимптотичну поведінку отриманих розв'язків на нескінченності.

1. Введение. Нелинейные интегральные уравнения вида

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)Y(t,f(t))dt, \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

называемые уравнениями Гаммерштейна, имеют многочисленные применения в различных областях естествознания (см., например, [1, 2]). В случае, когда пределы a, b конечны и $Y(t,z)$ удовлетворяет определенным условиям гладкости, причем соответствующий нелинейный интегральный оператор (в некоторых случаях и его линейная миноранта) вполне непрерывен, изучению и решению уравнения (1) посвящены многочисленные работы (см., например, [3 – 7] и библиографию в них).

В конце прошлого столетия, в связи с бурным развитием современной физической кинетики, возрос интерес к нелинейным интегральным уравнениям вида (1), в которых $a = 0$, $b = +\infty$, а соответствующий оператор не является вполне непрерывным в рассматриваемых банаховых пространствах. Такие уравнения возникают, например, в кинетической теории газов, в теории переноса излучения, в спектральных линиях, в эконометрике, в p-адической теории струны (см. [8 – 11]). В случае, когда $a = 0$, $b = +\infty$, $0 \le K(x,t) \equiv K_0(x-t)$, $K_0(-x) = K_0(x)$, $x > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\tau)d\tau = 1$, а $Y(t,z)$ не зависит от переменной t и имеет вид $Y(z) = z - \omega(z)$, где $0 \le \omega \in L_1(0,+\infty) \cap C_0(0,+\infty)$, $\omega \downarrow$ по z, уравнение (1) было исследовано в [12].

Сравнительно недавно, в случае, когда $a = 0$, $b = +\infty$, $0 \le K(x,t) \equiv K_1(x - t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\tau)d\tau = 1$, $\nu(K_1) \equiv \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} xK_1(x)dx < 0$ (последний интеграл понимается в смысле главного значения Коши), а $Y(t,z) \equiv G(z)$, где $G(z)$ — измеримая функция на $(-\infty,+\infty)$, причем существует число $\eta > 0$ такое, что $0 \le G \in C[0,\eta]$, $G(x) \ge x$, $x \in [0,\eta]$, $G(\eta) = \eta$ $G \uparrow$ на $[0,\eta]$, уравнение (1) было изучено в работе автора [13].

Первая часть настоящей работы посвящена исследованию системы нелинейных интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^m \int_0^\infty K_{ij}(x-t)B_{ij}(t,\varphi_j(t))dt, \quad i = 1,\ldots,m, \quad x > 0, \tag{2}$$

относительно искомой вектор-функции $\varphi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)\big)^T$ (T — знак транспонирования). Здесь $K(x) = \big(K_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{m\times m}$ — измеримая матрица-функция на $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$0 \le K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty) \cap M(-\infty, +\infty), \qquad A \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx, \quad r(A) = 1, \quad (3)$$

где через $r(A)$ обозначен спектральный радиус матрицы A, т. е. модуль наибольшего по модулю собственного значения матрицы A.

Матрица-функция $B(t,z) = \big(B_{ij}(t,z)\big)_{i,j=1}^{m\times m}$, определенная на множестве $(0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$, имеет вид

$$B_{ij}(t,z) = z - \omega_{ij}(t,z), \quad i,j = 1,2,\ldots,m, \quad (4)$$

где функции ω_{ij} удовлетворяют следующим условиям:

$\alpha_1)$ существует число $\rho_0 > 0$ такое, что

$$\omega_{ij}(t,z) \ge 0, \quad (t,z) \in (0,+\infty) \times [\rho_0, +\infty) \equiv \Omega_{\rho_0}, \quad i,j = 1,2,\ldots,m;$$

$\alpha_2)$ $\omega_{ij}(t,z) \downarrow$ по z на $[\rho_0, +\infty)$ при каждом фиксированном $t > 0$;

$\alpha_3)$ функции $\omega_{ij}(t,z)$ удовлетворяют условию Каратеодори на множестве Ω_{ρ_0}, т. е. $\omega_{ij}(t,z)$ при каждом фиксированном $z \in [\rho_0, +\infty)$ измерима по $t > 0$ и почти при всех $t > 0$ непрерывна по $z \in [\rho_0, +\infty)$ (об этом более подробно см. в [6]);

$\alpha_4)$ существуют функции

$$\overset{\circ}{\omega}_{ij} \in L_1(0,+\infty) \cap C_0(0,+\infty),$$

$$m_1(\overset{\circ}{\omega}_{ij}) \equiv \int\limits_0^\infty x\,\overset{\circ}{\omega}_{ij}(x)dx < +\infty, \quad \overset{\circ}{\omega}_{ij} \downarrow \quad \text{на} \quad [\rho_0, +\infty),$$

такие, что

$$\omega_{ij}(t,z) \le \overset{\circ}{\omega}_{ij}(t+z), \quad (t,z) \in \Omega_{\rho_0}, \quad i,j = 1,2,\ldots,m. \quad (5)$$

В данной работе методы теории интегральных уравнений Винера – Хопфа в сочетании с методами теории функций действительной переменной и теории матриц дают возможность построить однопараметрическое семейство решений $\{\varphi_\gamma(x)\}_{\gamma\in\triangle}$ $\big(\varphi_\gamma(x) = (\varphi_1^\gamma(x), \varphi_2^\gamma(x), \ldots, \varphi_m^\gamma(x))^T\big)$ системы (2) и описать асимптотическое поведение этих решений в бесконечности. Удалось также описать множество параметров $\triangle$. Доказано, что если дополнительно $\omega_{ij} \downarrow$ по t, то $\varphi_j^\gamma(x) \uparrow$ по x, $j = 1,2,\ldots,m$.

Во второй части работы рассматривается более общая нелинейная система уравнений

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^m \int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)W_{ij}(t, f_j(t))dt, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad x > 0, \quad (6)$$

относительно искомой вектор-функции $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)^T$, где

$$W_{ij}(t,z) = G(z) - \omega_{ij}(t,z),$$

$G(z)$ — измеримая функция на $(-\infty,+\infty)$, удовлетворяющая вышеприведенным условиям. С помощью полученных результатов для уравнения (2), а также некоторых новых априорных оценок доказывается, что система (6) имеет положительное и ограниченное решение.

2. Обозначения и некоторые вспомогательные факты из теории матриц и теории интегральных уравнений Винера – Хопфа. *2.1.* Рассмотрим классы интегральных операторов. Пусть $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_m$, $m \in N$, — пространства m-мерных вещественных вектор-столбцов и вектор-строк соответственно, а $\mathbb{R}^{n\times n}$ — алгебра вещественных $(n\times n)$-матриц с единицей I. Обозначим через $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^{m\times m}$ конус матриц с неотрицательными компонентами, вводящий частичный порядок $\geq$ в своем пространстве. Запись $A \succ 0$ означает, что $A \geq 0$ и $A \neq 0$, а запись $A > 0$ — что все компоненты A положительны. Пусть $K_p \subset \tilde{K}$ — класс примитивных матриц (см. [14]): $A \in K_p$, если $A \in \tilde{K}$ и существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $A^p > 0$.

В дальнейшем мы неоднократно будем использовать следующую известную теорему Перрона: *Если $A \in K_p$, то $r(A)$ является ее наибольшим по модулю простым собственным значением, а соответствующий собственный вектор можно выбрать положительным: существует $\zeta > 0$ такое, что $A\zeta = r(A)\zeta$. Существует также* (*единственная с точностью до постоянного множителя*) *вектор-строка $\xi > 0$ такая, что $\xi A = r(A)\xi$.*

В дальнейшем будем предполагать, что $A \in K_p$.

Обозначим через E одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0,+\infty)$, $p \geq 1$, $M(0,+\infty), C_M(0,+\infty)$. Пусть Ω, $\Omega^{\pm}$ — следующие классы интегральных операторов, действующих в $E^{\times m} = E \times E \times \ldots \times E$:

$$\mathbf{K} \in \Omega, \quad \mathbf{U} \in \Omega^{+}, \quad \mathbf{V} \in \Omega^{-},$$

$$(\mathbf{K}f)(x) = \int\limits_0^{\infty} K(x-t)f(t)dt, \tag{7}$$

$$(\mathbf{U}f)(x) = \int\limits_0^{x} U(x-t)f(t)dt, \tag{8}$$

$$(\mathbf{V}f)(x) = \int\limits_x^{\infty} V(t-x)f(t)dt, \tag{9}$$

где $f \in E^{\times m}$, $K \in L_1^{m\times m}(-\infty,+\infty)$ — пространство $(m\times m)$-матриц-функций с компонентами из $L_1(-\infty,+\infty)$, а $U,V \in L_1^{m\times m}(0,+\infty)$ — пространство $(m\times m)$-матриц-функций с компонентами из $L_1(0,+\infty)$. Будем говорить, что ядро K (оператора $\mathbf{K} \in \Omega$) удовлетворяет условию консервативности, если

$$K \geq 0, \quad A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx \in K_p, \quad r(A) = 1. \tag{10}$$

Пусть $\mathbf{K} \in \Omega$ — интегральный оператор с консервативным ядром $K(x)$. Тогда, как известно (см. [15, 16]), оператор $J - \mathbf{K}$ допускает следующую вольтеррову факторизацию:

$$J - \mathbf{K} = (J - \mathbf{V})(J - \mathbf{U}), \tag{11}$$

где J — единичный матричный оператор, а $\mathbf{V} \in \Omega^-$, $\mathbf{U} \in \Omega^+$ — вольтерровы операторы вида (9), (8), ядра $V, U \in L_1^{m\times m}(0,+\infty)$ которых определяются из нелинейных уравнений факторизации Н. Б. Енгибаряна

$$\begin{gathered} U(x) = K_+(x) + \int\limits_0^\infty V(t)U(x+t)dt, \\ V(x) = K_-(x) + \int\limits_0^\infty V(x+t)U(t)dt, \quad x \geq 0, \end{gathered} \tag{12}$$

$$K_\pm(x) = K(\pm x), \quad x \geq 0.$$

Более того, итерации

$$\begin{gathered} U_{n+1}(x) = K_+(x) + \int\limits_0^\infty V_n(t)U_n(x+t)dt, \\ V_{n+1}(x) = K_-(x) + \int\limits_0^\infty V_n(x+t)U_n(t)dt, \quad U_0 = V_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{12$'$}$$

(монотонно возрастая по n) сходятся к функциям U, V, причем $(1-\gamma_-)(1-\gamma_+) = 0$, где $\gamma_- = r(\beta)$, $\gamma_+ = r(\alpha)$, $\beta \equiv \int_0^\infty V(t)dt$, $\alpha \equiv \int_0^\infty U(t)dt$. Далее, если абсолютно сходится интеграл

$$\nu(K) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xK(x)dx, \tag{13}$$

то (см. [16])

$$\nu(K) \prec 0 \Leftrightarrow \gamma_+ < 1, \quad \gamma_- = 1, \tag{14}$$

$$\nu(K) = 0 \Leftrightarrow \gamma_\pm = 1, \tag{15}$$

$$\nu(K) \succ 0 \Leftrightarrow \gamma_+ = 1, \quad \gamma_- < 1. \tag{16}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если ядро* $K(x) = (K_{ij}(x))_{i,j}^{m\times m}$ *удовлетворяет условиям* (3), (10), (14), *то* $U, V \in L_1^{m\times m}(0,+\infty) \cap M^{m\times m}(0,+\infty)$, *где* $M^{m\times m}(0,+\infty)$ *— пространство* $(m \times m)$*-матриц-функций с компонентами из* $M(0,+\infty)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что функции U, V принадлежат $M^{m\times m}(0,+\infty)$, так как остальные свойства функций U, V непосредственно следуют из вышеуказанных фактов. Из (14) следует, что существует $(I-\alpha)^{-1}$. Обозначим $C = \sup\limits_{x\in R} K(x)$ и по индукции покажем, что

$$V_n(x) \leq C(I-\alpha)^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Действительно, при $n = 0$ неравенство (17) очевидно. Предположим, что оно выполняется при $n = k$, и докажем его для $n = k + 1$. Из итераций (12′) получаем

$$V_{n+1}(x) \leq C + C(I-\alpha)^{-1} \int\limits_0^\infty U_n(t)dt \leq C + C(I-\alpha)^{-1}\alpha = C(I-\alpha)^{-1}.$$

Устремляя в (17) $n \to \infty$, имеем

$$V(x) \leq C(I-\alpha)^{-1}. \tag{18}$$

Из (12) с учетом (18) находим

$$U(x) \leq C + C(I-\alpha)^{-1}\alpha = C(I-\alpha)^{-1}.$$

Лемма доказана.

2.2. Рассмотрим теперь систему линейных интегральных уравнений Винера – Хопфа

$$F_i(x) = 2q_i(x+\rho_0) + \sum_{j=1}^m \int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)F_j(t)dt, \tag{19}$$

$$x \in (0, +\infty), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$q_i(x) \equiv \max_k \overset{\circ}{w}_{ki}(x), \quad i = \overline{1,m}. \tag{20}$$

С помощью факторизации (11) решение системы (19) сводится к последовательному решению следующих систем связанных уравнений типа Вольтерра:

$$\psi_i(x) = 2q_i(x+\rho_0) + \sum_{j=1}^m \int\limits_x^\infty V_{ij}(t-x)\psi_j(t)dt, \tag{21}$$

$$F_i(x) = \psi_i(x) + \sum_{j=1}^m \int\limits_0^x U_{ij}(x-t)F_j(t)dt. \tag{22}$$

Поскольку $\tilde{q}_i(x) \equiv q_i(x+\rho_0) \geq 0$, $\tilde{q}_i \in L_1(0,+\infty)$, $m_1(\tilde{q}_i) < +\infty$, то если интеграл (13) абсолютно сходится и $\nu(K) \prec 0$, из результатов работы [16] следует, что система (21) имеет неотрицательное решение $\psi(x) = \big(\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)\big)^T$, причем $\psi_j \in L_1(0,+\infty)$, $j = \overline{1,m}$. Из свойств функции $\tilde{q}_i(x)$ с учетом леммы 1 следует также, что функции ψ_j принадлежат $M(0,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_j(x) = 0$, $j = \overline{1,m}$.

Рассмотрим теперь систему (22). Если $\nu(K) \prec 0$, то из (14) следует, что $\gamma_+ < 1$. Значит, система (22) имеет единственное решение вида

$$F_i(x) = \psi_i(x) + \sum_{j=1}^m \int\limits_0^x \phi_{ij}(x-t)\psi_j(t)dt \in L_1(0,+\infty) \cap M(0,+\infty), \quad i = \overline{1,m},$$

где $\Phi(x) = \big(\phi_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{m\times m}$ — резольвентная функция оператора $J - U$, причем $\Phi \in L_1^{m\times m}(0,+\infty)$. Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{x\to\infty} F_i(x) = 0$, $i = \overline{1,m}$. Действительно, это следует из равенства $\lim\limits_{x\to\infty} \psi_i(x) = 0$ и известных свойств оператора свертки.

2.3. Рассмотрим однородное векторное интегральное уравнение Винера–Хопфа

$$S_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{\infty} K_{ij}(x-t) S_j(t) dt, \quad i = \overline{1,m}, \quad x \in (0, +\infty). \tag{23}$$

Факторизация (11) сводит решение уравнения (23) к решению уравнений

$$L_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{x}^{\infty} V_{ij}(t-x) L_j(t) dt, \quad x > 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{24}$$

$$S_i(x) = L_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{x} U_{ij}(x-t) S_j(t) dt, \quad x > 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{25}$$

Если $\nu(K) \prec 0$, то $\gamma_- = 1, \gamma_+ < 1$, следовательно, согласно теореме Перрона существует вектор $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^T, \zeta_j > 0,\ j = \overline{1,m}$, такой, что $\beta\zeta = \zeta$ (ибо $\alpha, \beta \in K_p$, так как $A \in K_p$). Из структуры системы (24) следует, что $L_i(x) \equiv \zeta_i$ удовлетворяет (24). В силу линейности (24) заключаем, что

$$L_i(x) \equiv \gamma\zeta_i, \quad i = \overline{1,m},$$

где $\gamma \in \left[\max\limits_i \dfrac{\max(c_0, \delta_i)}{\zeta_i}, +\infty\right)$ — любое число, также будет удовлетворять системе (24). Здесь через c_0 обозначено некоторое число из множества $[\rho_0, +\infty)$, для которого $q_i(c_0) < c_0$ (такое число всегда существует в силу свойств функции q_i), а $\delta_i = \sup\limits_{x>0} F_i(x)$, $i = \overline{1,m}$. Подставляя значение $L_i(x)$ в (25), получаем диссипативное векторное уравнение восстановления

$$S_i(x) = \gamma\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{x} U_{ij}(x-t) S_j(t) dt, \quad i = \overline{1,m}, \quad x > 0. \tag{26}$$

Как известно (см. [16]), если $\gamma_+ < 1$, то (26) имеет положительное монотонно возрастающее и ограниченное решение вида

$$S_i(x) = \gamma(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{x} \phi_{ij}(z) dz \zeta_j), \tag{27}$$

причем

$$\gamma\zeta \le S(x) \le \gamma(I-\alpha)^{-1}\zeta, \tag{28}$$

$S(x) = (S_1(x), \ldots, S_n(x))^T$, более того,

$$S \uparrow \gamma(I-\alpha)^{-1}\zeta, \tag{29}$$

$$\gamma \in \triangle \equiv \left[\max_i \frac{\max(c_0, \delta_i)}{\zeta_i}, +\infty\right). \tag{30}$$

Свойства (27)–(30) будут существенно использованы в дальнейшем.

2.4. Введем в рассмотрение следующую вспомогательную систему интегральных уравнении типа свертки:

$$\varphi_i^*(x) = 2q_i(x + S_i(x)) + \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty K_{ij}(x - t)\varphi_j^*(t)dt, \tag{31}$$

$$i = 1, \dots, m, \quad x > 0,$$

относительно искомой вектор-функции $\varphi^*(x) = \left(\varphi_1^*(x), \dots, \varphi_m^*(x)\right)^T$, где

$$\lambda_i(x) = 1 - \frac{q_i(x + S_i(x))}{S_i(x)}. \tag{32}$$

Установим некоторые свойства функций $\lambda_i(x)$.

Лемма 2. *Справедливы следующие свойства функций* $\lambda_i(x)$:

1) $0 < 1 - \dfrac{q_i(c_0)}{c_0} \leq \lambda_i(x) \leq 1$, $i = \overline{1, m}$, $x > 0$;
2) $(1 - \lambda_i(x))x^j \in L_1(0, +\infty)$, $i = \overline{1, m}$, $j = 0, 1$;
3) $\lambda_i(x) \uparrow$ *по* x $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda_i(x) = 1$, $i = \overline{1, m}$.

Доказательство. 1. Имеем $\lambda_i(x) \geq 1 - \dfrac{q_i(c_0)}{S_i(x)} \geq 1 - \dfrac{q_i(c_0)}{c_0} > 0$, так как из (28) следует, что

$$S_i(x) \geq \gamma\zeta_i \geq \max(c_0, \delta_i) \geq c_0, \quad c_0 \geq \rho_0,$$

а $q_i \downarrow$ на $[\rho_0, +\infty)$. Неравенство $\lambda_i(x) \leq 1$ непосредственно следует из неотрицательности q_i и из положительности $S_i(x)$.

2. Имеем $0 \leq (1 - \lambda_i(x))x^j \leq \dfrac{x + c_0}{c_0} q_i(x + c_0) \in L_1(0, +\infty)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 0, 1$, поскольку $m_1(q_i) < +\infty$.

3. Предположим, что $x_1, x_2 > 0$, $x_1 > x_2$, — произвольные числа. Тогда из (32) получаем

$$\lambda_i(x_1) - \lambda_i(x_2) = \frac{q_i(x_2 + S_i(x_2))}{S(x_2)} - \frac{q_i(x_1 + S_i(x_1))}{S(x_1)} \geq$$

$$\geq \frac{(S_i(x_1) - S_i(x_2))q_i(x_1 + S_i(x_1))}{S_i(x_1)S_i(x_2)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

т. е. $\lambda_i \uparrow$ по x. С другой стороны, из неравенства

$$1 - \frac{q_i(x + c_0)}{c_0} \leq \lambda_i(x) \leq 1$$

с учетом того, что $\lim\limits_{x \to \infty} q_i(x) = 0$, имеем $\lim\limits_{x \to \infty} \lambda_i(x) = 1$.

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим итерации

$$\varphi_{i,(n+1)}^*(x) = 2q_i(x + S_i(x)) + \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty K_{ij}(x - t)\varphi_{j,(n)}^*(t)dt, \tag{33}$$

$$\varphi^*_{i,(0)} \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x > 0.$$

Из (33) с учетом условий α_4) и

$$0 \le q_i(x + S_i(x)) \le q_i(x + c_0) \le q_i(x + \rho_0), \quad i = 1, \ldots, m,$$

по индукции нетрудно убедиться, что: 1) $\varphi^*_{i,(n)}(x) \uparrow$ по n, 2) $2q_i(x + S_i(x)) \le$ $\le \varphi^*_{i,(n)}(x) \le F_i(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Следовательно, последовательность функций $\left\{\varphi^*_{i,(n)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ имеет точечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^*_{i,(n)}(x) \equiv \varphi^*_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и этот предел представляет собой решение системы (31), причем

$$2q_i(x + S_i(x)) \le \varphi^*_i(x) \le F_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{34}$$

2.5. Рассмотрим теперь систему

$$Q_i(x) = \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty K_{ij}(x - t) Q_j(t) dt, \quad x > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{35}$$

относительно искомой вектор-функции $Q(x) = (Q_1(x), \ldots, Q_m(x))^T$. Непосредственной проверкой убедимся, что функции

$$\tilde{Q}_i(x) = 2S_i(x) - \varphi^*_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

удовлетворяют системе (35). Из (31), (32) с учетом (35) имеем

$$\lambda_i(x) \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty K_{ij}(x - t) \tilde{Q}_j(t) dt = \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty K_{ij}(x - t) \big(2S_j(t) - \varphi^*_j(t)\big) dt =$$

$$= 2\left(1 - \frac{q_i(x + S_i(x))}{S_i(x)}\right) S_i(x) + 2q_i(x + S_i(x)) - \varphi^*_i(x) =$$

$$= 2S^*_i(x) - \varphi^*_i(x) = \tilde{Q}_i(x).$$

Поскольку

$$S_i(x) \ge \gamma\zeta_i \ge \max(c_0, \delta_i) \ge \delta_i = \sup_{x>0} F_i,$$

из (34) и (35) непосредственно следует, что

$$\tilde{Q}_i(x) \ge 2S_i(x) - F_i(x) \ge S_i(x).$$

Рассмотрим итерации

$$Q_i^{(n+1)}(x) = \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty K_{ij}(x - t) Q_j^{(n)}(t) dt,$$

$$Q_i^{(0)}(x) = 2S_i(x), \quad i = 1, \ldots, m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

По индукции нетрудно убедиться, что

$$Q_i^{(n)}(x) \downarrow \quad \text{по} \;\; n,$$

$$\tilde{Q}_i(x) \le Q_i^{(n)}(x) \le 2\lambda_i(x) S_i(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} Q_i^{(n)}(x) = Q_i(x) \quad \text{и} \quad \tilde{Q}_i(x) \le Q_i(x) \le 2\lambda_i(x) S_i(x). \tag{36}$$

Из теоремы Б. Леви (см. [17]) следует, что $Q_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют системе (35). Заметим, что тогда функции

$$P_i(x) \equiv \frac{Q_i(x)}{\lambda_i(x)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

будут удовлетворять системе уравнений

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty K_{ij}(x - t) \lambda_j(t) P_j(t) dt, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и неравенствам

$$S_i(x) \le \tilde{Q}_i(x) \le \frac{\tilde{Q}_i(x)}{\lambda_i(x)} \le P_i(x) \le 2S_i(x), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{37}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{Q}_i(x)}{\lambda_i(x)} = 2\gamma \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} \zeta_j \right), \tag{38}$$

где $(I - \alpha)^{-1} = I + \rho$, $\rho = (\rho_{ij})_{i,j=1}^{m \times m}$, *а* $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^T$ *— неподвижный вектор матрицы* β (*см. п.* 2.3), $\gamma \in \triangle$.

Доказательство. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_i^*(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, ибо $0 \le \varphi_i^*(x) \le F_i(x)$, а $\lim\limits_{x\to\infty} F_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (см. п. 2.2), учитывая (29) и лемму 2, из цепочки неравенств

$$\left| \frac{\tilde{Q}_i(x)}{\lambda_i(x)} - 2\gamma \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} \zeta_j \right) \right| \le$$

$$\le \frac{c_0}{c_0 - q_i(c_0)} \left| \tilde{Q}_i(x) - 2\gamma \lambda_i(x) \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} \zeta_j \right) \right| \le$$

$$\le \frac{c_0}{c_0 - q_i(c_0)} \left(\left| \tilde{Q}_i(x) - 2\gamma \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} \zeta_j \right) \right| + \right.$$

$$\left. + 2\gamma \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} \zeta_j \right) |1 - \lambda_i(x)| \right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

получаем формулу (38).

Лемма доказана.

Таким образом, из (36) с учетом (29) и леммы 3 имеем

$$\lim_{x\to\infty} P_i(x) = 2\gamma\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m}\rho_{ij}\zeta_j\right), \quad i = 1,\ldots,m, \tag{39}$$

где

$$\gamma \in \triangle, \qquad \beta\zeta = \zeta, \qquad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^T,$$

$$(I-\alpha)^{-1} = I + \rho, \qquad \rho = (\rho_{ij})_{i,j=1}^{m\times m}.$$

3. Формулировки и доказательства основных результатов. ***3.1.*** Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Система* (1) *при выполнении условий* (10), $\nu(K) \prec 0$, (3), *и* $\alpha_1)-\alpha_4)$ *имеет однопараметрическое семейство решений* $\left\{\varphi_\gamma(x)\right\}_{\gamma\in\triangle}$, $\varphi_\gamma(x) = \left(\varphi_1^\gamma(x), \ldots, \varphi_m^\gamma(x)\right)^T$, *причем каждая вектор-функция из этого семейства обладает следующими свойствами*:

1) $\varphi_i^\gamma(x) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\gamma \in \triangle$, $\varphi_i^\gamma(x) = O(1)$, $x \to \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi_i^\gamma(x) = 2\gamma\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m}\rho_{ij}\zeta_j\right)$;

3) $\varphi_i^\gamma(x) \uparrow$ *по* γ *на* $\triangle = \left[\max\limits_i \dfrac{\max(c_0, \delta_i)}{\zeta_i}, +\infty\right)$,

где c_0 — *фиксированное число из* $[\rho_0, +\infty)$, *для которого* $q_i(c_0) < c_0$, $\delta_i = \sup\limits_{x>0} F_i(x)$, $\beta\zeta = \zeta$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^T$, $\zeta_j > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Более того, если дополнительно* $\omega_{ij}(t, z) \downarrow$ *по* t, *то* $\varphi_i^\gamma(x) \uparrow$ *по* x.

Доказательство. Рассмотрим итерации

$$\varphi_i^{(n+1)}(x) = \sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)B_{ij}(t, \varphi_j^{(n)}(t))dt, \tag{40}$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = 2S_i(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Убедимся в достоверности следующих фактов:

$$\varphi_i^{(n)}(x) \geq P_i(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x > 0, \tag{41}$$

$$\varphi_i^{(n)}(x) \downarrow \quad \text{по} \;\; n. \tag{42}$$

В случае $n = 0$ неравенства (41) непосредственно следуют из цепочек неравенств (37). Пусть $\varphi_i^n(x) \geq P_i(x)$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Тогда с учетом условий $\alpha_1)-\alpha_4)$, (20), (37) из (40) получаем

$$\varphi_i^{(n+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\big(P_j(t) - \omega_{ij}(t, P_j(t))\big)dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)P_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty K_{ij}(x-t)\,\mathring{w}_{ij}(t + P_j(t))dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)P_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)q_j(t+P_j(t))dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)P_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)(1-\lambda_j(t))P_j(t)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)\lambda_j(t)P_j(t)dt = P_i(x).$$

Теперь убедимся в справедливости (42). Имеем

$$\varphi_i^{(1)}(x) \leq \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)\varphi_i^{(0)}(t)dt = 2S_i(x) = \varphi_i^{(0)}(x), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Предполагая, что $\varphi_i^{(n)}(x) \leq \varphi_i^{(n-1)}(x)$, и используя монотонность $\omega_{ij}(t,z)$ по z на $[\rho_0, +\infty)$, получаем

$$\varphi_i^{(n+1)}(x) \leq \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)B_{ij}(t, \varphi_j^{(n-1)}(t))dt = \varphi_i^{(n)}(x).$$

Таким образом, последовательность вектор-функций $\left\{\varphi^{(n)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\varphi^{(n)}(x) = \left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)}\right)^T$, имеет предел

$$\varphi(x) \equiv \varphi_\gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(x),$$

причем

$$P_i(x) \leq \varphi_i(x) \leq 2S_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} P_i(x) = 2\gamma\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij}\zeta_j\right)$, из (39) с учетом (29) находим

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_i(x) = 2\gamma\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij}\zeta_j\right).$$

Используя теорему Б. Леви, нетрудно убедиться, что предельная вектор-функция удовлетворяет системе (1). Докажем теперь, что если $\gamma_1, \gamma_2 \in \triangle$, $\gamma_1 > \gamma_2$, то $\varphi_i^{\gamma_1}(x) > \varphi_i^{\gamma_2}(x)$, $i = 1, \ldots, m$. С этой целью сначала по индукции убедимся в выполнении неравенств

$$\varphi_i^{\gamma_1^{(n)}}(x) - \varphi_i^{\gamma_2^{(n)}}(x) \geq 2\left(S_i^{\gamma_1}(x) - S_i^{\gamma_2}(x)\right) =$$

$$= \left(2(\gamma_1-\gamma_2)\zeta_i + 2(\gamma_1-\gamma_2)\sum_{j=1}^{m}\int_0^{x} \phi_{ij}(z)dz\zeta_j\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (43)$$

При $n = 0$ неравенства (43) непосредственно следуют из (40). Пусть неравенства (43) выполняются при $n = p$. Тогда из (40) имеем

$$\varphi_i^{\gamma_1^{(p+1)}}(x)-\varphi_i^{\gamma_2^{(p+1)}}(x)=\sum_{j=1}^m\int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)\Big(\varphi_j^{\gamma_1^{(p)}}(t)-\varphi_j^{\gamma_2^{(p)}}(t)\Big)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^m\int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)\left(\omega_{ij}\left(t,\varphi_j^{\gamma_2^{(p)}}(t)\right)-\omega_{ij}\left(t,\varphi_j^{\gamma_1^{(p)}}(t)\right)\right)dt\geq$$

$$\geq\sum_{j=1}^m\int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)\Big(\varphi_j^{\gamma_1^{(p)}}(t)-\varphi_j^{\gamma_2^{(p)}}(t)\Big)dt\geq 2\big(S_i^{\gamma_1}(x)-S_i^{\gamma_2}(x)\big).$$

В неравенствах (43), устремляя $n\to\infty$, получаем $\varphi_i^{\gamma_1}(x)-\varphi_i^{\gamma_2}(x)\geq 2(S_i^{\gamma_1}(x)-$ $-\ S_i^{\gamma_2}(x))>0$. Для завершения доказательства осталось убедиться, что если $\omega_{ij}(t,z)\downarrow$ по z, то $\varphi_i(x)\uparrow$ по x. Сначала докажем по индукции, что $\varphi_i^{(n)}(x)\uparrow$ по x. При $n=0$ этот факт следует из (29). Пусть $\varphi_i^{(n)}(x)\uparrow$ по x. Возьмем $x_1,x_2>0$, $x_1>x_2$. Тогда

$$\varphi_i^{(n+1)}(x_1)-\varphi_i^{(n+1)}(x_2)=$$

$$=\sum_{j=1}^m\int\limits_{-\infty}^{x_1}K_{ij}(t)\Big(\varphi_j^{(n)}(x_1-t)-\omega_{ij}\left(x_1-t,\varphi_j^{(n)}(x_1-t)\right)\Big)dt-$$

$$-\sum_{j=1}^m\int\limits_{-\infty}^{x_2}K_{ij}(t)\Big(\varphi_j^{(n)}(x_2-t)-\omega_{ij}\left(x_2-t,\varphi_j^{(n)}(x_2-t)\right)\Big)dt\geq$$

$$\geq\sum_{j=1}^m\int\limits_{-\infty}^{x_2}K_{ij}(t)\Big(\varphi_j^{(n)}(x_1-t)-\varphi_j^{(n)}(x_2-t)\Big)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^m\int\limits_{-\infty}^{x_2}K_{ij}(t)\Big(\omega_{ij}\left(x_2-t,\varphi_j^{(n)}(x_2-t)\right)-\omega_{ij}\left(x_1-t,\varphi_j^{(n)}(x_1-t)\right)\Big)dt\geq 0.$$

Следовательно, $\varphi_i^{(n+1)}(x_1)\geq\varphi_i^{(n+1)}(x_2)$, где при $n\to\infty$ $\varphi_i(x_1)\geq\varphi_i(x_2)$.

Теорема доказана.

3.2. В этом пункте с помощью теоремы 1 докажем следующую теорему существования для более общего уравнения (6).

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Предположим, что существует число* $\eta\geq 2\max\limits_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^m\rho_{ij}\zeta_j\right)\max\limits_i\dfrac{\max(c_0,\delta_i)}{\zeta_i}\equiv l$ *такое, что*:

$\beta_1)$ $G\in C[0,\eta]$, $G\uparrow[0,\eta]$;

$\beta_2)$ $G(x)\geq x$, $x\in[0,\eta]$, $G(\eta)=\eta$.

Тогда система (6) *имеет положительное и ограниченное решение* $f(x)=$ $=\big(f_1(x),\ldots,f_m(x)\big)^T$, *причем* $f_i(x)\leq\eta$, $i=1,2,\ldots,m$.

Доказательство. Сначала рассмотрим систему (1). Поскольку $\eta\geq l$ (определение числа l см. в формулировке теоремы 2), из теоремы 1 следует, что существует положительное решение

$$\varphi_{\gamma*}(x) = \left(\varphi_1^{\gamma*}, \varphi_2^{\gamma*}, \ldots, \varphi_m^{\gamma*}\right)^T, \quad \gamma^* = \frac{\eta}{2\max\limits_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^m \rho_{ij}\zeta_j\right)} \in \triangle,$$

с пределом

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_i^{\gamma*}(x) = 2\gamma^* \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^m \rho_{ij}\zeta_j\right) \le \eta.$$

Рассмотрим итерации

$$f_i^{(n+1)}(x) = \sum_{j=1}^m \int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t) W_{ij}\big(t, f_j^{(n)}(t)\big) dt, \tag{44}$$

$$f_i^{(0)}(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx \in K_p$, $r(A) = 1$, по теореме Перрона существует вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T$ с положительными компонентами $\xi_j > 0$ такой, что

$$A\xi = \xi$$

или в раскрытом виде

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j = \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{45}$$

Обозначим $\chi \equiv \max\limits_i \xi_i$. Тогда из (45) получаем неравенство

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j \le \chi,$$

из которого, в свою очередь, следует, что

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{46}$$

Неравенства (46) используем ниже. По индукции докажем, что

$$\varphi_i^{\gamma*}(x) \le f_i^{(n)}(x) \le \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{47}$$

С этой целью сначала докажем,что если $\tau \in [c_0, \eta]$, то

$$G(\tau) \ge \omega_{ij}(t, \tau), \quad i,\ j = \overline{1, m}. \tag{48}$$

Действительно,

$$\omega_{ij}(t, \tau) \le \overset{\circ}{w}_{ij}(t + \tau) \le q_j(c_0) < c_0 \le \tau \le G(\tau).$$

С другой стороны, из неравенств

$$\varphi_i^{\gamma*}(x) \ge P_i(x) \ge S_i(x) \ge \gamma^*\zeta_i \ge c_0$$

заключаем, что

$$c_0 \le \varphi_i^{\gamma*}(x) \le \eta, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Теперь перейдем к доказательству неравенств (47). При $n = 0$ они очевидны. Предположив, что они выполняются при некотором $n \in \mathbf{N}$, установим их при $n+1$. Из (44) с учетом (46), (48) и свойств $\beta_1)$, $\beta_2)$ имеем

$$f_i^{(n+1)}(x) \le \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)\big(G(\eta) - \omega_{ij}(t,\eta)\big)dt \le$$

$$\le \eta \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-\infty}^{x} K_{ij}(t)dt \le \eta \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \le \eta.$$

С другой стороны,

$$f_i^{(n+1)}(x) \ge \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)\big(G(\varphi_j^{\gamma*}(t)) - \omega_{ij}(t, \varphi_j^{\gamma*}(t))\big)dt \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^\infty K_{ij}(x-t)\big(\varphi_j^{\gamma*}(t) - \omega_{ij}(t, \varphi_j^{\gamma*}(t))\big)dt = \varphi_i^{\gamma*}(x).$$

Теперь докажем, что $f_i^{(n)} \downarrow$ по n. Действительно, неравенство $f_i^{(1)}(x) \le f_i^{(0)}(x)$ следует из (47). Пусть $f_i^{(n)}(x) \le f_i^{(n-1)}(x)$. Тогда, учитывая монотонность функций G и ω_{ij}, из (44) получаем $f_i^{(n+1)}(x) \le f_i^{(n)}(x)$. Итак, последовательность вектор-функций $\big\{f^{(n)}(x)\big\}_{n=0}^{\infty}$, $f^{(n)}(x) = (f_i^{(n)}, \ldots, f_i^{(n)})^T$, почти всюду в $(0, +\infty)$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = f(x) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$$

и из предельной теоремы Б. Леви следует, что функция $f(x)$ удовлетворяет системе (6). С другой стороны, из (47) получаем

$$\varphi_i^{\gamma*}(x) \le f_i(x) \le \eta, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Теорема доказана.

Замечание. Как и в теореме 1, если здесь дополнительно предположить, что $\omega_{ij}(t,z) \downarrow$ по t, то $f_i(x) \uparrow$ по x. Последнее утверждение доказывается аналогичным образом.

Приведем несколько примеров функций G и ω_{ij} :

$$G(x) = \eta e^{x/\eta - 1}, \qquad G(x) = \eta\sqrt{\frac{x}{\eta}}, \qquad G(x) = x + \sin\frac{\pi x}{\eta},$$

$$\omega_{ij}(t,z) = s_{ij}(t,z)\,\overset{\circ}{\omega}_{ij}(t+z),$$

где $0 \le s_{ij} \le 1$, $s_{ij} \downarrow$ по z на $R^+ \times [\rho_0, +\infty)$ — функции, удовлетворяющие условию Каратеодори.

Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за полезные советы.

1. *Hammerstein A.* Nichtlineare Integralgleich ungen nebst Anwendungen // Acta Math. – 1929. – **54**. – C. 117 – 176.
2. *Урысон П. С.* Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Мат. сб. – 1924. – **31**. – С. 236 – 255.
3. *Красносельский М. А.* Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов // Укр. мат. журн. – 1950. – **2**, № 3. – С. 70 – 86.
4. *Забрейко П. П.* О непрерывности нелинейного оператора // Сиб. мат. журн. – 1964. – **5**, № 4. – С. 958 – 960.
5. *Забрейко П. П.* О непрерывности и полной непрерывности операторов Урысона // Докл. АН СССР. – 1965. – **161**, № 5. – С. 1007 – 1010.
6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966. – 500 с.
7. *Забрейко П. П., Пустыльник Е. И.* О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 2. – С. 204 – 205.
8. *Енгибарян Н. Б., Хачатрян А. Х.* Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа // Мат. моделирование. – 2004. – **16**, № 1. – С. 67 – 74.
9. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. – 1966. – **2**, № 1. – С. 31 – 36.
10. *Sargan J. D.* The distribution of wealth // Econometrica. – 1957. – **25**. – P. 568 – 590.
11. *Владимиров В. С.* Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов // Изв. РАН. Сер. мат. – 2005. – **69**, № 3. – С. 55 – 80.
12. *Арабаджян Л. Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. – 1997. – **32**, № 1. – С. 21 – 28.
13. *Khachatryan Kh. A.* Sufficient conditions for the solvability of the Urysohn integral equation on a half-line // Dokl. Mat. – 2009. – **79**, № 2. – P. 246 – 249.
14. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Мир, 1978. – 280 с.
15. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1984. – **22**. – С. 175 – 242.
16. *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* Системы интегральных уравнений Винера – Хопфа и нелинейные уравнения факторизации // Мат. сб. – 1984. – **124**, № 2. – С. 189 – 216.
17. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

Получено 21.09.09