УДК 517.928

**І. Г. Ключник** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# ЛІНІЙНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

A system of linear differential equations with a small parameter of a part of derivatives is reduced to a canonical form and properties of the transformation matrix are studied.

Система линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных сводится к каноничной форме, а также изучаются свойства матрицы преобразования.

У роботах [1, 2] розглянуто сингулярно збурені системи з простою, кратною та двома точками звороту. В цих випадках в [1, 2] запропоновано асимптотичне зведення сингулярно збуреної системи до деякого канонічного вигляду, а також розглянуто можливості формальної блочної діагоналізації системи. При цьому використано функції Ейрі, Вебера та Уіттекера. До основних методів побудови асимптотичного інтегрування лінійних диференціальних рівнянь з точками звороту відносяться методи Р. Лангера, В. Вазова, А. А. Дородніцина, Цваана – Федорюка, метод зшивання та узгодження асимптотик. Основні ідеї цих методів і огляд літератури з методів асимптотичного інтегрування задач з точками звороту наведено в [1 – 4]. У роботі [5] запропоновано явний вигляд функцій $Ai(x)$, які є розв'язком диференціального рівняння $y^m = xy$ $(m > 2,\ m$ — парне), і через ці функції виражено фундаментальну матрицю системи рівнянь $Z' = B(x)Z$, в якій $B(x)$ — $(m\times m)$-вимірна матриця, яка має вигляд $B(x) = xI_1 + N$, $N$ — нільпотентна матриця, $I_1$ — матриця з єдиним ненульовим елементом $\{I_1\}_{m1} = 1$. У роботі [6] викладено метод зведення сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з простою точкою звороту розмірності $m$, $m > 2$, вигляду

$$\varepsilon y' = A(x,\varepsilon)y$$

до системи з основною матрицею $B_0(x)$, яка визначається рівністю $B_0(x) = xI_2 + N$, в якій $I_2$ — $(m\times m)$-вимірна матриця, елементи якої визначаються з рівності $\{I_2\}_{m1} = 1$, $\{I_2\}_{mj} = xa_j(x)$, $a_j(0) \neq 0$, $j = \overline{2,m}$.

У статті [7] уперше розглянуто лінійну систему диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду

$$\begin{aligned} \widetilde{y}' &= \widetilde{A}(x)\widetilde{y} + \widetilde{A}_1(x)y_1, \\ \varepsilon y_1' &= \big(B(x) + \varepsilon B_1(x)\big)y_1 + \varepsilon\widetilde{B}_2(x)\widetilde{y}, \end{aligned} \qquad (1)$$

де $\widetilde{y} \in R^p$, $y_1 \in R^2$; $\widetilde{A}(x)$, $\widetilde{A}_1(x)$, $B_1(x)$, $\widetilde{B}_2(x)$ — матриці, які голоморфні при $|x| \le x_0$; $B(x)$ — матриця вигляду $\widetilde{B}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon$ — малий дійсний параметр. За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} \widetilde{y} \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ система (1) зводиться до системи вигляду

$$u' = C(\varepsilon)v,$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u,$$

де $C(\varepsilon)$, $D(\varepsilon)$, $\Phi(x,\varepsilon)$ є формальними рядами

$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n, \qquad D(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n D_n, \qquad \Phi(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_n(x),$$

в яких $C_n$, $D_n$ — сталі, а матриці $\Phi_n(x)$ голоморфні при $|x| \leq x_0$ і $\det \Phi_0(x) \equiv 1$.

У даній статті розглядається лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду (1), для якої $\widetilde{y} \in R^p$, $y_1 \in R^m$, $m$ — парне додатне число, а $B(x)$ — $(m \times m)$-вимірна матриця рівняння з [5]. Для розглядуваної системи пропонується зведення системи диференціальних рівнянь (1) з точкою звороту до деякої канонічної форми. Доведено нескінченну диференційовність матриць, які входять в одержану систему, по дійсних значеннях малого додатного параметра, а також нескінченну диференційовність матриці перетворення за дійсними незалежною змінною та параметром.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1), в якій $\widetilde{y} \in R^p$, $y_1 \in R^m$; $\widetilde{A}(x)$, $\widetilde{A}_1(x)$, $B_1(x)$, $\widetilde{B}_2(x)$ — голоморфні матриці при $|x| \leq x_0$; $B(x) = xI_1 + N$; $\varepsilon$ — малий дійсний додатний параметр і $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Будемо вважати, що

$$\operatorname{tr} B_1(x) = \operatorname{tr} \widetilde{A}(x) \equiv 0, \tag{2}$$

оскільки цього завжди можна досягнути за допомогою перетворень

$$y = \exp\left(\frac{1}{p}\int_0^x \operatorname{tr} \widetilde{A}(x)dx\right)z, \qquad y_1 = \exp\left(\frac{1}{m}\int_0^x \operatorname{tr} B_1(x)dx\right)z_1,$$

які переводять матриці $\widetilde{A}(x)$, $B_1(x)$ відповідно в матриці $\widetilde{A}(x) - \dfrac{1}{p}\operatorname{tr}(\widetilde{A}(x))I$, $B_1(x) - \dfrac{1}{m}\operatorname{tr}(B_1(x))I$.

Виконуючи в (1) заміну за формулою $\widetilde{y} = \Omega_0^x(\widetilde{A}(x))y$ і позначаючи $A_1(x) = \left(\Omega_0^x(\widetilde{A}(x))\right)^{-1}\widetilde{A}_1(x)$, $B_2(x) = \widetilde{B}_2(x)\Omega_0^x(\widetilde{A}(x))$, маємо

$$y' = A_1(x)y_1, \tag{3}$$

$$\varepsilon y_1' = \big(B(x) + \varepsilon B_1(x)\big)y_1 + \varepsilon B_2(x)y.$$

У роботі буде показано, як за допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} cu \\ v \end{pmatrix}$ систему (3) можна звести до вигляду

$$u' = C_1(\varepsilon)v, \tag{4}$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_1(\varepsilon)u, \tag{5}$$

де $\Phi(x,\varepsilon)$ — блочна матриця вигляду

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x,\varepsilon) & V_1(x,\varepsilon) \\ U_1(x,\varepsilon) & V(x,\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

а матриці $U(x,\varepsilon)$, $V_1(x,\varepsilon)$, $U_1(x,\varepsilon)$, $V(x,\varepsilon)$ мають розвинення за степенями $\varepsilon$ :

$$U(x,\varepsilon)=U(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^nU_n(x),\qquad U_1(x,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^nU_{n1}(x),$$
$$V(x,\varepsilon)=V(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^nV_n(x),\qquad V_1(x,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^nV_{n1}(x). \tag{7}$$

Матриці $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$, $\Phi_j(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,4}$, за аналогією з [8] за коефіцієнтами формальних рядів $\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varepsilon^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}D_n\varepsilon^n$ та (7), які будуть визначені у п. 1, побудуємо у вигляді збіжних рядів

$$C_1(\varepsilon)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{B}_n\varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|\varepsilon+p_{5n}\Delta_n},\qquad D_1(\varepsilon)=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{A}_n\varepsilon^n}{\|\widetilde{A}_n\|\varepsilon+p_{6n}\Delta_{n1}}, \tag{8}$$

$$\Phi_1(x,\varepsilon)=U(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{1n}(x)\varepsilon^n}{\|F_{1n}(x)\|_0\varepsilon+p_{1n}\widetilde{\Delta}_{n1}},$$
$$\Phi_j(x,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{jn}(x)\varepsilon^n}{\|F_{jn}(x)\|_0\varepsilon+p_{jn}\widetilde{\Delta}_{nj}},\quad j=2,3, \tag{9}$$
$$\Phi_4(x,\varepsilon)=V(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{4n}(x)\varepsilon^n}{\|F_{4n}(x)\|_0\varepsilon+p_{4n}\widetilde{\Delta}_{n4}},$$

де

$$\widetilde{B}_n=C_n+K_{1n},\qquad \widetilde{A}_n=D_n+K_{2n},\qquad F_{1n}(x)=U_n(x)+K_{n1}(x),$$
$$F_{2n}(x)=V_{n1}(x)+K_{n2}(x),\qquad F_{3n}(x)=U_{n1}(x)+K_{n3}(x),$$
$$F_{4n}(x)=V_n(x)+K_{n4}(x),\quad n\ge 1, \tag{10}$$

$$\Delta_n=\begin{cases}\|\widetilde{B}_n\|, & \text{якщо } \widetilde{B}_n\ne 0,\\ 1, & \text{якщо } \widetilde{B}_n=0,\end{cases}\qquad \Delta_{n1}=\begin{cases}\|\widetilde{A}_n\|, & \text{якщо } \widetilde{A}_n\ne 0,\\ 1, & \text{якщо } \widetilde{A}_n=0,\end{cases}$$

$$\widetilde{\Delta}_{nj}=\begin{cases}\|F_{jn}(x)\|_0, & \text{якщо } \|F_{jn}(x)\|_0\ne 0,\\ 1, & \text{якщо } \|F_{jn}(x)\|_0=0,\end{cases}\qquad j=\overline{1,4},\quad n\ge 1;$$

$K_{1n}$, $K_{2n}$, $K_{nj}(x)$, $j=\overline{1,4}$, — коефіцієнти при $\varepsilon^n$ у розвиненні відповідно раціональних функцій

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\widetilde{B}_i\varepsilon^i}{\|\widetilde{B}_i\|\varepsilon+p_{5i}\Delta_i},\qquad \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\widetilde{A}_i\varepsilon^i}{\|\widetilde{A}_i\|\varepsilon+p_{6n}\Delta_{i1}},\qquad \sum_{i=1}^{n-1}\frac{F_{ji}(x)\varepsilon^i}{\|F_{ji}(x)\|_0\varepsilon+p_{ji}\widetilde{\Delta}_{ij}} \tag{11}$$

за зростаючими степенями $\varepsilon$, $K_{11}=K_{21}=K_{1j}(x)\equiv 0$, $j=\overline{1,4}$; $\|F_{jn}(x)\|_0=$ $=\max_x\big\|F_{jn}(x)\big\|$;

$$p_{jn}=\begin{cases}\dfrac{1}{\|F_{jn}(x)\|_0}, & \text{якщо } \|F_{jn}(x)\|_0\ne 0,\\ 1, & \text{якщо } \|F_{jn}(x)\|_0=0,\end{cases}\qquad j=\overline{1,4},$$

$$p_{5n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\|\widetilde{B}_n\|_0}, & \text{якщо } \widetilde{B}_n \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } \widetilde{B}_n = 0, \end{cases} \qquad p_{6n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\|\widetilde{A}_n\|_0}, & \text{якщо } \widetilde{A}_n \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } \widetilde{A}_n = 0. \end{cases} \tag{12}$$

У випадку $\widetilde{B}_n \neq 0$ оцінимо $n$-й член одного із рядів (8) таким чином:

$$\left\| \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\| \varepsilon + p_{5n}\Delta_n} \right\| \leq \varepsilon_0^{n-1}.$$

Отже, ряди (8) рівномірно збіжні при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Ряд, одержаний почленним диференціюванням ряду з (8) $k$ разів, має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\widetilde{B}_n}{\|\widetilde{B}_n\|} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j C_k^j j! n(n-1)\ldots(n-k+j+1)\varepsilon^{n-k+j}}{(\varepsilon + p_{5n})^{j+1}} + \frac{(-1)^k k! \varepsilon^n}{(\varepsilon + p_{5n})^{k+1}} \right), \tag{13}$$

де $C_k^j$ — число сполук з $k$ елементів по $j$; $\sum'$ — сума ненульових елементів. Кожен член ряду (13) при $n \geq k+1$ мажорується так:

$$\left\| \left( \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|(\varepsilon + p_{5n})} \right)^{(k)} \right\| \leq f_{kn} \varepsilon_0^{n-k-1},$$

де

$$f_{kn} = k! + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j j! n(n-1)\ldots(n-k+j+1).$$

Таким чином, матричні функції $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$, $\Phi_j(x,\varepsilon)$, $j = \overline{1,4}$, є нескінченно диференційовними при $|x| \leq x_0$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Використовуючи (11), знаходимо явний вигляд матриці $K_{1n}$:

$$K_{1n} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j+1}\widetilde{B}_j}{\|\widetilde{B}_j\| p_{5j}^{n+1-j}}, \quad n \geq 2. \tag{14}$$

Враховуючи (14), записуємо матрицю $C_1(\varepsilon)$ у вигляді

$$C_1(\varepsilon) = C_0 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|\varepsilon + p_{5n}\Delta_n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|\varepsilon + p_{5n}\Delta_n} =$$

$$= C_0 + \frac{\widetilde{B}_1 \varepsilon}{\|\widetilde{B}_1\| p_{51}} + \sum_{n=2}^{m}{}' \varepsilon^n \left( \frac{\widetilde{B}_n}{\|\widetilde{B}_n\| p_{5n}} - K_{1n} \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m}{}' \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|} \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{p_{5n}^{r+1}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|\varepsilon + p_{5n}\Delta_n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} C_n \varepsilon^n + \sum_{n=1}^{m}{}' \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|} \sum_{r=m-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^r \varepsilon^r}{p_{5n}^{r+1}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\widetilde{B}_n \varepsilon^n}{\|\widetilde{B}_n\|\varepsilon + p_{5n}\Delta_n}. \tag{15}$$

З (15) та аналогічного зображення функцій (9) випливає, що матричні функції $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$, $\Phi_j(x,\varepsilon)$, $j = \overline{1,4}$, мають асимптотичні розвинення

$$C_1(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varepsilon^n, \qquad D_1(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} D_n \varepsilon^n,$$

$$\Phi_1(x,\varepsilon) \sim U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x), \qquad \Phi_2(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x), \tag{16}$$

$$\Phi_3(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x), \qquad \Phi_4(x,\varepsilon) \sim V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x)$$

при $\varepsilon \to 0$ на множині $|x| \leq x_0$.

**1. Формальне зведення системи (3) до системи (4), (5).** Згідно з виглядом рівнянь (3) – (5) матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\varepsilon\Phi' + \Phi \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C_1(\varepsilon) \\ \varepsilon D_1(\varepsilon) & B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix} \Phi. \tag{17}$$

Підставляючи (7), (15) в (17) і зрівнюючи коефіцієнти при нульовому степені $\varepsilon$, одержуємо рівняння

$$U'(x) = 0, \tag{18}$$

$$U(x)C_0 + V_{11}(x)B(x) = A_1(x)V(x), \tag{19}$$

$$V(x)D_0 = B_2(x)U(x) + B(x)U_{11}(x), \tag{20}$$

$$V(x)B(x) = B(x)V(x). \tag{21}$$

З рівнянь (18) і (21) знаходимо

$$U(x) \equiv \widetilde{I}, V(x) = q_{0m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \tag{22}$$

де $q_{0i}(x),\ i = \overline{1,m},$ — довільні голоморфні функції в області $|x| \leq x_0$, $\widetilde{I}$, $I$ — одиничні матриці. Для визначення $q_{0i}(x),\ i = \overline{1,m},$ використаємо рівняння, які одержують, зрівнюючи в (17) з урахуванням (7), (15) коефіцієнти при першому степені параметра $\varepsilon$ :

$$U_1'(x) + V_{11}(x)D_0 = A_1(x)U_{11}(x), \tag{23}$$

$$V_{11}'(x) + U(x)C_1 + U_1(x)C_0 + V_{21}(x)B(x) = A_1(x)V_1(x), \tag{24}$$

$$U_{11}'(x) + V(x)D_1 + V_1(x)D_0 = B_2(x)U_1(x) + B_1(x)U_{11}(x) + B(x)U_{21}(x), \tag{25}$$

$$V'(x) + V_1(x)B(x) = B(x)V_1(x) + B_1(x)V(x). \tag{26}$$

Згідно з лемами з [6] для існування розв'язку рівнянь (26) необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$\operatorname{tr}\big((V'(x) - B_1(x)V(x))B^k(x)\big) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{27}$$

а також можна довести співвідношення

$$\operatorname{tr}\left(B^j(x)\right)=\begin{cases}0, & 1\le j\le m-1,\\ 0, & j>m,\\ mx, & j=m,\end{cases}$$
$$\operatorname{tr}\left(B^j(x)B'(x)\right)=\begin{cases}0, & 1\le j<m-1,\\ 0, & j\ge m,\\ 1, & j=m-1,\end{cases}\qquad j=\overline{1,2m-2}. \tag{28}$$

Підставляючи (22) в рівняння (26) і використовуючи умови існування (27) для одержаних рівнянь, а також співвідношення $\operatorname{tr}\left(B_1(x)B^{m+i}(x)\right)=x\operatorname{tr}\left(B_1(x)B^i(x)\right)$, $i=\overline{0,m-2}$, і (28), отримуємо рівняння для знаходження функцій $q_{0i}(x)$, $i=\overline{1,m}$ :

$$mq'_{0m}(x)=\sum_{r=0}^{m-1}b_{m-r-1}(x)q_{0,r+1}(x),$$
$$mxq'_{0,j-1}(x)=\sum_{r=1}^{j-2}xb_{j-r-1}(x)q_{0r}(x)+ \tag{29}$$
$$+\sum_{r=0}^{m-j}b_{m-r-1}(x)q_{0,j+r}(x)+xb_0(x)q_{0,j-1}(x)-(m-j+1)q_{0,j-1}(x),\quad j=\overline{2,m},$$

де $b_0(x)=\operatorname{tr}B_1(x)$, $b_i(x)=\operatorname{tr}\left(B_1(x)B^i(x)\right)$, $i=\overline{1,m-1}$. Записуючи (29) у матричному вигляді і домножаючи обидві частини одержаного рівняння зліва на матрицю $B(x)$, маємо

$$xq'_0(x)=H(x)q_0(x), \tag{30}$$

де $H(x)=T_1+\dfrac{1}{m}B(x)T_2(x)$; $T_1$ — стала діагональна матриця з діагональними елементами $\{T_1\}_{rr}=-\dfrac{m-r}{m}$, $r=\overline{1,m}$, а матриця $T_2(x)$ визначається таким чином: $\{T_2\}_{kr}=\operatorname{tr}(B_1(x)B^{m-1+k-r}(x))$, $k=\overline{1,m}$, $r=\overline{1,m}$. З явного вигляду матриці $H(x)$ випливає, що матриця $H(0)$ має власні значення $\lambda_i=-\dfrac{m-i}{m}$, $i=\overline{1,m}$, тому згідно з теорією диференціальних рівнянь з регулярною особливістю з [1] випливає, що система (30) має ненульовий голоморфний в області $|x|\le x_0$ розв'язок $q_0(x)$ такий, що $q_{0m}(0)=1$, $q_{0i}(0)=0$, $i=\overline{1,m-1}$. Підставивши знайдені функції $U(x)$, $V(x)$ у вигляді (22) в рівняння (19), (20), одержимо рівняння для визначення $C_0$, $D_0$, $U_{11}(x)$, $V_{11}(x)$. Помноживши (19) справа на матрицю $B^{m-1}(x)$, а (20) зліва на $B^{m-1}(x)$ і поклавши в одержаних рівняннях $x=0$, визначимо елементи матриць $C_0$, $D_0$ за формулами

$$\{C_0\}_{i1}=\left\{A_1(0)V(0)\right\}_{i1},\qquad \{C_0\}_{ij}=0,\qquad \{D_0\}_{mi}=\left\{B_2(0)\widetilde{I}\right\}_{mi},$$
$$\{D_0\}_{si}=0,\quad i=\overline{1,p},\quad j=\overline{2,m},\quad s=\overline{1,m-1}.$$

Вигляд матриць $C_0$, $D_0$ дає можливість записати формули для $V_{11}(x)$, $U_{11}(x)$

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'(tx)dt, \qquad U_{11}(x) = \int_0^1 G'(tx)dt,$$

які визначають голоморфні функції в області $|x| \le x_0$, де

$$F(x) = A_1(x)V(x)B^{m-1}(x) - \widetilde{I}C_0B^{m-1}(x),$$

$$G(x) = B^{m-1}(x)V(x)D_0 - B^{m-1}(x)B_2(x)\widetilde{I}.$$

Для знаходження коефіцієнтів розвинень (7) при $\varepsilon$ у першому степені маємо систему рівнянь (23)–(26). Покладаючи $U_1(0) = 0$, з рівняння (23) однозначно знаходимо $U_1(x)$, а загальний розв'язок рівняння (26) визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{1m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x) + W_1(x), \tag{31}$$

де $W_1(x)$ — частинний розв'язок рівняння (26). Зрівнюючи коефіцієнти при $\varepsilon$ у другому степені в (7), (17), маємо рівняння

$$V_1'(x) + U_{11}(x)C_0 + V_2(x)B(x) = B(x)V_2 + B_2(x)V_{11} + B_1(x)V_1(x). \tag{32}$$

Підставивши (31) в умову існування розв'язку рівняння (32) і помноживши знайдені співвідношення зліва на матрицю $B(x)$, одержимо неоднорідну диференціальну систему рівнянь з регулярною особливістю вигляду

$$xq_1'(x) = H(x)q_1(x) + F^{(1)}(x), \tag{33}$$

де

$$F^{(1)}(x) = \frac{1}{m}B(x)f^{(1)}(x),$$

$$\left\{f^{(1)}(x)\right\}_i = \operatorname{tr}\big(\big(B_1(x)W_1(x) + B_2(x)V_{11}(x) -$$

$$-U_{11}(x)C_0 - W_1'(x)\big)B^{i-1}(x)\big), \quad i = \overline{1,m},$$

$q_1(x)$ — вектор з компонентами $q_{1i}(x)$, $i = \overline{1,m}$. Система рівнянь (33) має голоморфний в області $|x| \le x_0$ розв'язок $q_1(x)$ і $q_{1m}(0) = 0$. Матриці $V_{21}(x)$, $U_{21}(x)$, $C_1$, $D_1$ однозначно знаходяться з рівнянь (24), (25). Можна довести, що за вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7) і вони є голоморфними функціями в області $|x| \le x_0$.

Матриця (6) при $\varepsilon = 0$ має вигляд $\Phi(x,0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix}$, де $U(x)$, $V(x)$ визначаються за формулами (22). Використовуючи явний вигляд (22) матриці $V(x)$, знаходимо похідну від визначника матриці $V(x)$ і в одержаних визначниках $I_j$, $j = \overline{1,m}$, виконуємо наступні перетворення при $x \ne 0$. А саме, у визначнику $I_j$, $j = \overline{1,m-1}$, $j$-й рядок помножимо на $mx$ і скористаємося (29). В одержаному визначнику $i$-й рядок при $i = \overline{1,j-1}$ помножимо на $-xb_{j-i}(x)$, а $i$-й рядок при

$i = \overline{j+1, m}$ — на $-b_{j+m-i}(x)$ і додамо до $j$-го рядка, а потім запишемо цей визначник у вигляді суми двох визначників. У визначнику $I_m$ $m$-й рядок помножимо на $m$ і скористаємося (29). В одержаному визначнику $j$-й рядок помножимо на $-b_{m-j}(x)$, $j = \overline{1, m-1}$, і додамо до $m$-го рядка. В результаті отримаємо

$$I_j = \frac{b_0(x)}{m} \det V(x) + \frac{1}{mx} \det L_j,$$
$$I_m = \frac{b_0(x)}{m} \det V(x) + \frac{1}{m} \det L_m, \quad j = \overline{1, m-1}, \tag{34}$$

де

$$\{L_j\}_{ji} = \begin{cases} (j-i)xq_{0,j-i}(x), & i = \overline{1, j}, \\ (j-i)q_{0,j+m-i}, & i = \overline{j+1, m}, \\ mx, & j = m, \end{cases} \quad \{L_m\}_{mi} = (m-i)q_{0,m-i}(x),$$

$$\{L_j\}_{ki} = \{V(x)\}_{ki}, \quad k = \overline{1, m}, \quad k \neq j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Далі визначник $\det L_j$, $j = \overline{1, m}$, розкладемо по $j$-му рядку і одержаний вираз згрупуємо при $q_{01}(x), q_{02}(x), \ldots, q_{0,m-1}(x)$. При $q_{01}(x)$ маємо вираз

$$\frac{q_{01}(x)}{mx}((m-1)\det L_{11} - \det L_{21} - \ldots - \det L_{m1}),$$

де $\{L_{11}\}_{k_1 i} = \{L_1\}_{ki}$, $k = \overline{2, m}$, $k_1 = k-1$, $i = \overline{1, m-1}$; $\{L_{21}\}_{k_2 i_2} = \{L_2\}_{ki}$, $i_2 = i-1$, $i = \overline{2, m}$, $k_2 = k = 1$, $k_2 = k-1$ при $k = \overline{3, m}$ $\{L_{m1}\}_{k i_m} = \{L_m\}_{ki}$, $k = \overline{1, m-1}$, $i_m = i$, $i = \overline{1, m-2}$, $i_m = i-1$ при $i = m$.

За допомогою перестановок рядків і стовпців, використовуючи ідею з [9], визначники матриць $\det L_{i1}(x)$, $i = \overline{2, m}$, зводимо до $\det L_{11}$, звідки одержуємо $\sum_{j=1}^{m} \det L_j = 0$. Підставляючи (34) в $(\det V(x))'$ і враховуючи останню рівність, маємо

$$\big(\det V(x)\big)' = \big(\operatorname{tr} B_1(x)\big) \det V(x), \quad x \neq 0.$$

Оскільки $q_{0i}(0) = 0$, $q_{0m}(0) = 1$, $i = \overline{1, m-1}$, то із формули (34) випливає, що $I_j(0) = q'_{0m}(0)$, а також при $x = 0$ знаходимо $q'_{0m}(0) = \dfrac{\operatorname{tr} B_1(0)}{m}$. З останніх двох рівностей маємо $(\det V(x))'|_{x=0} = \operatorname{tr} B_1(0)$, що означає справедливість рівності $(\det V(x))' = (\operatorname{tr} B_1(x)) \det V(x)$ для кожного $x$ з області $|x| \leq x_0$.

За допомогою заміни $u = \widetilde{V}(\varepsilon)\omega$ система (4), (5) зводиться до вигляду

$$\omega'_1 = c_1(\varepsilon)v_1, \qquad \omega'_i = 0, \quad i = \overline{2, p},$$
$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_2(\varepsilon)\omega, \tag{35}$$

де $v$ — $m$-вимірний вектор з компонентами $v_i$; $c_s(\varepsilon) = \{C_1(\varepsilon)\}_{s1}$, $s = \overline{1, p}$, інші елементи матриці $C_1(\varepsilon)$ дорівнюють нулю; $\widetilde{V}(\varepsilon)$ — $(p \times p)$-матриця з діагональними елементами, що дорівнюють одиниці, в якої $\{\widetilde{V}(\varepsilon)\}_{i1} = \gamma_i(\varepsilon)$, а всі інші елементи дорівнюють нулю, $\gamma_i(\varepsilon) = \dfrac{c_i(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)}$, $i = \overline{2, p}$, $\gamma_1(\varepsilon) \equiv 1$ при умові, що $c_1(\varepsilon) \neq 0$; $D_2(\varepsilon) = D_1(\varepsilon)\widetilde{V}(\varepsilon)$, $D_2(\varepsilon)$ — $(m \times p)$-матриця, до того ж

$$d_{1j}(\varepsilon)=\left\{D_2(\varepsilon)\right\}_{pj},\qquad d_{1j}(\varepsilon)=d_{0j}(\varepsilon)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{nj}\varepsilon^n}{\|\widetilde{A}_n\|\varepsilon+p_{6n}\Delta_{n1}},\quad j=\overline{2,p},$$

$$d_{11}(\varepsilon)=\sum_{r=1}^{p}\gamma_r(\varepsilon)\left(d_{0r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{nr}\varepsilon^n}{\|\widetilde{A}_n\|\varepsilon+p_{6n}\Delta_{n1}}\right),$$

інші елементи матриці $D_2(\varepsilon)$ дорівнюють нулю; $d_{nj}=\{D_n\}_{pj}$, $a_{nj}=\{\widetilde{A}_n\}_{pj}$, $j=\overline{1,p}$, інші елементи матриці $\widetilde{A}_n$ дорівнюють нулю.

Таким чином, доведено наступну теорему.

**Теорема 1.** *Нехай матриці системи рівнянь* (1) *голоморфні в області* $|x|\leq\leq x_0$. *Тоді система рівнянь* (1) *зводиться до системи* (35) *за допомогою перетворення* $\begin{pmatrix}y\\y_1\end{pmatrix}=\Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$. *Матриця* $\Phi(x,\varepsilon)$ *задовольняє систему диференціальних рівнянь* (17) *і є голоморфною за змінною* $x$ *в області* $|x|\leq x_0$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$, *а також* $\det\Phi(x,0)\equiv 1$. *Коефіцієнти* $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ *системи* (17) *зображаються у вигляді рівномірно збіжних при* $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$ *рядів* (8), *в яких числа* $C_n$, $D_n$, $n=0,1,\ldots$, *визначаються з алгебраїчних рівнянь* (18) – (21), (23) – (26), (32). *Матриці* $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ *є нескінченно диференційовними при* $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$ *і мають асимптотичні розвинення* (16).

**2. Нескінченна диференційовність матриці перетворення.** Розглянемо блочну матрицю $\Phi^*(x,\varepsilon)$ вигляду

$$\Phi^*(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Phi_1(x,\varepsilon) & \Phi_2(x,\varepsilon)\\ \Phi_3(x,\varepsilon) & \Phi_4(x,\varepsilon)\end{pmatrix}, \tag{36}$$

де $\Phi_j(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,4}$, визначено в (9).

Виконаємо в системі (17) заміну

$$\Phi(x,\varepsilon)=Z(x,\varepsilon)+\Phi^*(x,\varepsilon),$$

де $Z(x,\varepsilon)$ — блочна матриця з елементами $Z_j(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,4}$. Тоді одержимо диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}Z_1'=A_1(x)Z_3-Z_2D_1(\varepsilon)+F_1(x,\varepsilon),\\ \varepsilon Z_2'=-Z_2B(x)-\varepsilon Z_1C_1(\varepsilon)+\varepsilon A_1(x)Z_4+F_2(x,\varepsilon),\\ \varepsilon Z_3'=(B(x)+\varepsilon B_1(x))Z_3-\varepsilon Z_4D_1(\varepsilon)+\varepsilon B_2(x)Z_1+F_3(x,\varepsilon),\\ \varepsilon Z_4'=-Z_4B(x)+(B(x)+\varepsilon B_1(x))Z_4-\varepsilon Z_3C_1(\varepsilon)+\varepsilon B_2(x)Z_2+F_4(x,\varepsilon),\end{gathered} \tag{37}$$

де

$$F_1(x,\varepsilon)=-\Phi_1'(x,\varepsilon)-\Phi_2(x,\varepsilon)D_1(\varepsilon)+A_1(x)\Phi_3(x,\varepsilon),$$

$$F_2(x,\varepsilon)=-\varepsilon\Phi_2'(x,\varepsilon)-\varepsilon\Phi_1(x,\varepsilon)C_1(\varepsilon)-\Phi_2(x,\varepsilon)B(x)+\varepsilon A_1(x)\Phi_4(x,\varepsilon),$$

$$F_3(x,\varepsilon)=-\varepsilon\Phi_3'(x,\varepsilon)-\varepsilon\Phi_4(x,\varepsilon)D_1(\varepsilon)+\varepsilon B_2(x)\Phi_1(x,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon B_1(x)\Phi_3(x,\varepsilon)+B(x)\Phi_3(x,\varepsilon),$$

$$F_4(x,\varepsilon) = -\varepsilon\Phi_4'(x,\varepsilon) - \varepsilon\Phi_3(x,\varepsilon)C_1(\varepsilon) - \Phi_4(x,\varepsilon)B(x) +$$

$$+\varepsilon B_2(x)\Phi_2(x,\varepsilon) + \varepsilon B_1(x)\Phi_4(x,\varepsilon) + B(x)\Phi_4(x,\varepsilon).$$

Підставивши у вирази для $F_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, матриці $\Phi_j$, $j = \overline{1,4}$, $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ вигляду (9), (15), одержимо, що $F_i(x,\varepsilon) \sim 0$, $i = \overline{1,4}$. При $\varepsilon \neq 0$ запишемо еквівалентні до (37) інтегральні рівняння

$$Z_1(x,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(x)} (A_1(t)Z_3 - Z_2D_1(\varepsilon))dt + H_1(x,\varepsilon),$$

$$Z_2(x,\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma(x)} (A_1(t)Z_4 - Z_1C_1(\varepsilon))(\widetilde{V}^T(t,\varepsilon))^{-1}dt\widetilde{V}^T(x,\varepsilon) + H_2(x,\varepsilon),$$

$$Z_3(x,\varepsilon) = \widetilde{U}(x,\varepsilon)\int\limits_{\Gamma(x)} \widetilde{U}^{-1}(t,\varepsilon)(B_1(t)Z_3 - Z_4D_1(\varepsilon) +$$

$$+B_2(t)Z_1)dt + H_3(x,\varepsilon), \tag{38}$$

$$Z_4(x,\varepsilon) = \widetilde{U}(x,\varepsilon)\int\limits_{\Gamma(x)} \widetilde{U}^{-1}(t,\varepsilon)(B_1(t)Z_4 - Z_3C_1(\varepsilon) +$$

$$+B_2(t)Z_2)(\widetilde{V}^T(t,\varepsilon))^{-1}dt\widetilde{V}^T(x,\varepsilon) + H_4(x,\varepsilon),$$

де $H_i(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,4}$, — відомі матриці, до того ж $H_i(x,\varepsilon) \sim 0$ при $\varepsilon \to 0$; $\widetilde{U}(x,\varepsilon)$, $\widetilde{V}(x,\varepsilon)$ — фундаментальні матриці відповідних диференціальних рівнянь $\varepsilon\widetilde{U}' = B(x)\widetilde{U}$, $\varepsilon\widetilde{V}' = -B^T(x)\widetilde{V}$; $\widetilde{V}^T(x,\varepsilon)$ — матриця, транспонована до $\widetilde{V}(x,\varepsilon)$; $\Gamma(x)$ — набір шляхів інтегрування, кінці яких збігаються з точкою $x$.

Згідно з лемою з [5] у секторі

$$\frac{\pi(m-1)}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \frac{\pi(m+3)}{m+1} \tag{39}$$

матриці $\widetilde{U}(x,\varepsilon)$, $\widetilde{V}(x,\varepsilon)$ можна записати у вигляді

$$\widetilde{U}(x,\varepsilon) = \Lambda_1(\varepsilon)(x\varepsilon^{-m/(m+1)})^{\sigma(x,\varepsilon)\Omega_0}\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\Xi(x^{(m+1)/m},\varepsilon),$$

$$\widetilde{V}(x,\varepsilon) = \Pi\widetilde{U}(x,\varepsilon), \Xi(x,\varepsilon) =$$

$$= \operatorname{diag}\big(\Xi_1(x,\varepsilon),\ldots,\Xi_m(x,\varepsilon)\big) = \exp\left(\frac{m}{m+1}x\varepsilon^{-1}\Omega_1^{m+1}\right),$$

а в секторі

$$-\frac{3\pi}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \frac{\pi}{m+1} \tag{40}$$

— у вигляді

$$\widetilde{U}(x,\varepsilon) = \Lambda_1(\varepsilon)(x\varepsilon^{-m/(m+1)})^{\sigma(x,\varepsilon)\Omega_0}\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\Xi(x^{(m+1)/m},\varepsilon),$$

$$\widetilde{V}(x,\varepsilon) = \Pi\widetilde{U}(x,\varepsilon), \Xi(x,\varepsilon) = \operatorname{diag}\big(\Xi_1(x,\varepsilon),\ldots,\Xi_m(x,\varepsilon)\big) =$$

$$= \exp\left(\frac{m}{m+1}x\varepsilon^{-1}\Omega_1^{m/2}\right),$$

де $\sigma(x,\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x\varepsilon^{-m/(m+1)}| \le z_0, \\ 1, & \text{якщо } |x\varepsilon^{-m/(m+1)}| > z_0, \end{cases}$ $\Lambda_1(\varepsilon),\ \Omega_0,\ \Omega_1^{m+1},\ \Omega_1^{m/2}$ — діагональні $(m \times m)$-матриці з діагональними елементами $\{\Lambda_1(\varepsilon)\}_{jj} = \varepsilon^{(j-1)/(m+1)}$, $\{\Omega_0\}_{jj} = \dfrac{2j-m-1}{2m}$, $\{\Omega_1^{m+1}\}_{jj} = -\omega_m^{-m+j-1}$, $\{\Omega_1^{m/2}\}_{jj} = -\omega_m^{-m/2+j}$, $\omega_m = e^{2\pi i/m}$, $j = \overline{1,m}$; ненульові елементи матриці $\Pi$ визначаються рівностями $\{\Pi\}_{j,m+1-j} = (-1)^j$; матриці $\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})$, $\widehat{U}^{-1}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})$ рівномірно обмежені в областях (39), (40).

Виконавши в (38) заміну за формулами

$$\begin{gathered}
W_1(x,\varepsilon) = \varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}Z_1(x,\varepsilon), \\
W_2(x,\varepsilon) = Z_2(x,\varepsilon)(\widetilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon))^{-1}\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}, \\
W_3(x,\varepsilon) = \widetilde{U}^{*^{-1}}(x,\varepsilon)Z_3(x,\varepsilon)\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}, \\
W_4(x,\varepsilon) = \widetilde{U}^{*^{-1}}(x,\varepsilon)Z_4(x,\varepsilon)(\widetilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon))^{-1}, \\
\widetilde{U}^*(x,\varepsilon) = \Lambda_1(\varepsilon)(x\varepsilon^{-m/(m+1)})^{\sigma(x,\varepsilon)\Omega_0}\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)}), \\
\widetilde{V}^*(x,\varepsilon) = \Pi\widetilde{U}^*(x,\varepsilon),
\end{gathered} \tag{41}$$

одержимо інтегральні рівняння відносно $W(x,\varepsilon)$ вигляду

$$W(x,\varepsilon) = \pounds(W(x,\varepsilon)) + H(x,\varepsilon), \tag{42}$$

де

$$W(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} W_1(x,\varepsilon) \\ W_2(x,\varepsilon) \\ W_3(x,\varepsilon) \\ W_4(x,\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad H(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} H_1(x,\varepsilon) \\ H_2(x,\varepsilon) \\ H_3(x,\varepsilon) \\ H_4(x,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\pounds(W(x,\varepsilon)) = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_1(x,\varepsilon) \\ \widetilde{L}_2(x,\varepsilon) \\ \widetilde{L}_3(x,\varepsilon) \\ \widetilde{L}_4(x,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_1(x,\varepsilon) = -\int\limits_{\Gamma(x)} W_2(t,\varepsilon)\widetilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon)D_1(\varepsilon)dt +$$

$$+\int\limits_{\Gamma(x)} A_1(t)\widetilde{U}^*(t,\varepsilon)W_3(t,\varepsilon)dt+\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}H_1(x,\varepsilon),$$

$$\widetilde{L}_2(x,\varepsilon)=-\int\limits_{\Gamma(x)} W_1(t,\varepsilon)C_1(\varepsilon)\left(\widetilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon)\right)^{-1}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)dt+$$

$$+\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}\int\limits_{\Gamma(x)} A_1(t)\widetilde{U}^*(t,\varepsilon)W_4(t,\varepsilon)\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)dt+$$

$$+H_2(x,\varepsilon)(\widetilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon))^{-1}\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)},$$

$$\widetilde{L}_3(x,\varepsilon)=\int\limits_{\Gamma(x)}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)\widetilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)B_1(t)\widetilde{U}^*(t,\varepsilon)W_3(t,\varepsilon)dt-$$

$$-\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}\int\limits_{\Gamma(x)}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)W_4(t,\varepsilon)\widetilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon)D_1(\varepsilon)dt+$$

$$+\int\limits_{\Gamma(x)}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)\widetilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)B_2(t)W_1(t,\varepsilon)dt+$$

$$+\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}\widetilde{U}^{*^{-1}}(x,\varepsilon)H_3(x,\varepsilon),$$

$$\widetilde{L}_4(x,\varepsilon)=\int\limits_{\Gamma(x)}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)\widetilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)B_1(t)\times$$

$$\times\widetilde{U}^*(t,\varepsilon)W_4(t,\varepsilon)\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)dt-$$

$$-\varepsilon^{(m-1)/(m+1)}\int\limits_{\Gamma(x)}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)W_3(t,\varepsilon)C_1(\varepsilon)\times$$

$$\times\left(\widetilde{V}^{*^T}(t,\varepsilon)\right)^{-1}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)dt+$$

$$+\varepsilon^{(m-1)/(m+1)}\int\limits_{\Gamma(x)}\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)\widetilde{U}^{*^{-1}}(t,\varepsilon)B_2(t)\times$$

$$\times W_2(t,\varepsilon)\Xi(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m},\varepsilon)dt+$$

$$+\widetilde{U}^{*^{-1}}(x,\varepsilon)H_4(x,\varepsilon)\left(\widetilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon)\right)^{-1}.$$

Розв'язок рівняння (42) будуємо методом послідовних наближень, беручи за нульове наближення $W^{(0)}(x,\varepsilon)\equiv 0$,

$$W^{(l+1)}(x,\varepsilon)=\pounds(W^{(l)}(x,\varepsilon))+H(x,\varepsilon).$$

Основна мета подальших викладок полягає в тому, щоб встановити нерівність

$$\left\|W^{(l+1)}(x_0,\varepsilon)-W^{(l)}(x_0,\varepsilon)\right\|_0\leq\left\|P(x_0,\varepsilon)\right\|\left\|W^{(l)}(x_0,\varepsilon)-W^{(l-1)}(x_0,\varepsilon)\right\|_0,$$

в якій $\|P(x_0,\varepsilon)\|<1$. Використавши (42), оцінимо норми $\|W_j^{(l+1)}(x,\varepsilon)\|_0$, $j=\overline{1,4}$ :

$$\left\|W_1^{(l+1)}(x,\varepsilon)\right\|_0\leq m\Bigg(\left\|W_2^{(l)}(x,\varepsilon)\right\|_0\|\widehat{U}^T(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\|_0\|D_1(\varepsilon)\|\times$$

$$\times\int\limits_{j(x)}\|(t\varepsilon^{-m/(m+1)})^{\sigma(t,\varepsilon)\Omega_0}\Lambda_1(\varepsilon)\||dt|+$$

$$+\|A_1(x)\|_0\left\|W_3^{(l)}(x,\varepsilon)\right\|_0\left\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0\times$$

$$\times\int\limits_{j(x)}\|\Lambda_1(\varepsilon)(t\varepsilon^{-m/(m+1)})^{\sigma(t,\varepsilon)\Omega_0}\||dt|\Bigg)+\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}\|H_1(x,\varepsilon)\|_0,$$

$$\left\|W_2^{(l+1)}(x,\varepsilon)\right\|_0\leq m\Bigg(\left\|C_1(\varepsilon)\right\|\left\|\big(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big)^{-1}\right\|_0\times$$

$$\times\left\|W_1^{(l)}(x,\varepsilon)\right\|_0+\|A_1(x)\|_0\left\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0\left\|W_4^{(l)}(x,\varepsilon)\right\|_0\Bigg)\times$$

$$\times\left(\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{j_s(x)}\varepsilon^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-2)}{2(m+1)}}|t|^{\frac{(1-m)\sigma(t,\varepsilon)}{2m}}\Xi_s\big(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m}\big)||dt|\right)+$$

$$+\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}\left\|H_2(x,\varepsilon)\big(\widetilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon)\big)^{-1}\right\|_0,\tag{43}$$

$$\left\|W_3^{(l+1)}(x,\varepsilon)\right\|_0\leq m^2\Bigg(m\left\|\big(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big)^{-1}\right\|_0\left\|B_1(x)\right\|_0\left\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0\times$$

$$\times\left\|W_3^{(l)}(x,\varepsilon)\right\|_0\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{j_s(x)}|t|^{\frac{(1-m)\sigma(t,\varepsilon)}{m}}\varepsilon^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-1)}{m+1}}\times$$

$$\times\left|\Xi_s\big(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m}\big)\right||dt|+$$

$$+\Big(\left\|\widehat{U}^T(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0\|D_1\|\|W_4^{(l)}(x,\varepsilon)\|_0+$$

$$+\left\|\big(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big)^{-1}\right\|_0\|B_2(x)\|_0\left\|W_1^{(l)}(x,\varepsilon)\right\|_0\Big)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{j_s(x)}|t|^{\frac{(1-m)\sigma(t,\varepsilon)}{2m}}\varepsilon^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-2)}{2(m+1)}}\left|\Xi_s\big(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m}\big)\right||dt|\Bigg)+$$

$$+\varepsilon^{-(m-1)/(m+1)}\big\|(\widetilde{U}^*(x,\varepsilon))^{-1}H_3(x,\varepsilon)\big\|_0,$$

$$\big\|W_4^{(l+1)}(x,\varepsilon)\big\|_0 \le m^2\big\|\big(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big)^{-1}\big\|_0\|B_1(x)\|_0\big\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big\|_0\times$$

$$\times\big\|W_4^{(l)}(x,\varepsilon)\big\|_0\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{j_{ks}(x)}|t|^{\frac{(1-m)\sigma(t,\varepsilon)}{m}}\varepsilon^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-1)}{m+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\left|\Xi_s(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m})\Xi_k(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m})\right||dt|\right)+$$

$$+\Big(\|C_1(\varepsilon)\|\big\|\widehat{U}^T(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big\|_0\|W_3^{(l)}(x,\varepsilon)\|_0+$$

$$+\big\|\big(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big)^{-1}\big\|_0\|B_2(x)\|_0\big\|W_2^{(l)}(x,\varepsilon)\big\|_0\Big)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{j_{ks}(x)}|t|^{\frac{(1-m)\sigma(t,\varepsilon)}{2m}}\varepsilon^{\frac{(m-1)\sigma(t,\varepsilon)}{2(m+1)}}\times\right.$$

$$\left.\times\left|\Xi_s(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m})\,\Xi_k(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m})\right||dt|\right)+$$

$$+\big\|\big(\widetilde{U}^*(x,\varepsilon)\big)^{-1}H_4(x,\varepsilon)\big(\widetilde{V}^{*^T}(x,\varepsilon)\big)^{-1}\big\|,$$

де $j(x)$ — відрізок, який з'єднує точки 0 і $x$, а $j_s(x), j_{ks}(x)$, $k,s=\overline{1,m}$, — набір шляхів, кінці яких збігаються з точкою $x$.

Будемо вибирати шляхи інтегрування таким чином, щоб інтеграли, які містяться в (43), були обмеженими при $\varepsilon\to 0$. Виконаємо заміну змінних за формулами

$$\tau=t^{(m+1)/m},\qquad \xi=x^{(m+1)/m}. \tag{44}$$

Область, яка визначена нерівностями $|x|\le x_0$, (39), при заміні (44) переходить в область $\delta+\dfrac{\pi(m-1)}{m}\le\arg\xi\le\dfrac{\pi(m+3)}{m}-\delta$, $|\xi|\le x_0^{(m+1)/m}$. Тоді в області $\dfrac{\pi(m-1)}{m}+\delta\le\arg\tau\le\dfrac{\pi(m+3)}{m}-\delta$, $|\tau|\le x_0^{(m+1)/m}$, можна побудувати відрізки $\delta_s(\xi)$, $s=\overline{1,m}$, визначені рівняннями $\tau=\xi-\rho e^{i\varphi_s}$, в яких $\rho=|\xi-\tau|$, $\varphi_s$ — направляючий кут відрізка $\delta_s(\xi)$, і на яких виконуються нерівності $\operatorname{Re}\big((\xi-\tau)e^{2\pi i/m(s-1)}\big)>0$, і криві $\lambda_{ks}(\xi)$, $k$, $s=\overline{1,m}$, на яких виконуються нерівності $\operatorname{Re}\big((\xi-\tau)\big(e^{2\pi i(k-1)/m}+e^{2\pi i(s-1)/m}\big)\big)>0$. За $j_s(x)$, $j_{ks}(x)$, $k$, $s=\overline{1,m}$, візьмемо шляхи, що є прообразами шляхів $\delta_s(\xi)$, $\lambda_{ks}(\xi)$ при відображенні (44). Тоді експоненти в (43) будуть обмежені вздовж відповідних шляхів інтегрування.

Вкажемо методи оцінювання інтегралів, які містяться в (43), при цьому будемо окремо розглядати випадки, коли величина $|x\varepsilon^{-m/(m+1)}|$ обмежена, тобто $|x\varepsilon^{-m/(m+1)}|\le z_0$, і коли $|x\varepsilon^{-m/(m+1)}|>z_0$. Увівши позначення $e_s=\dfrac{2\pi i(s-1)}{m}$, оцінимо інтеграл

$$I=\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{j_s(x)}|\varepsilon|^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-2)}{2(m+1)}}|t|^{\frac{(1-m)\sigma(t,\varepsilon)}{2m}}\left|e^{\frac{-m(x^{(m+1)/m}-t^{(m+1)/m})e_s}{\varepsilon(m+1)}}\right||dt|=$$

$$=\frac{m}{m+1}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{\delta_s(\xi)}|\varepsilon|^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-2)}{2(m+1)}}|\tau|^{-\frac{2+(m-1)\sigma(t,\varepsilon)}{2(m+1)}}\left|e^{\frac{-m(\xi-\tau)e_s}{|\varepsilon|(m+1)}}\right||d\tau|. \tag{45}$$

При $|x\varepsilon^{-m/(m+1)}|\leq z_0$ інтеграл $I_1$ вигляду (45) має оцінку

$$I_1=\frac{m|\varepsilon|^{\frac{1-m}{m+1}}}{m+1}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{\delta_{1s}(\xi)}|\tau|^{-\frac{1}{m+1}}e^{\frac{-m\operatorname{Re}((\xi-\tau)e_s)}{|\varepsilon|(m+1)}}|d\tau|\leq$$

$$\leq\frac{2m^2|\varepsilon|^{\frac{1-m}{m+1}}}{m+1}\int\limits_{0}^{z_0^{(m+1)/m}|\varepsilon|}|\tau|^{-\frac{1}{m+1}}|d\tau|=2mz_0|\varepsilon|^{\frac{1}{m+1}}.$$

При $|x\varepsilon^{-m/(m+1)}|>z_0$ інтеграл $I_2$ вигляду (45) має оцінку

$$I_2=\frac{m|\varepsilon|^{\frac{1-m}{2(m+1)}}}{m+1}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{\delta_{2s}(\xi)}|\tau|^{-\frac{1}{2}}\left|e^{\frac{-m(\xi-\tau)e_s}{|\varepsilon|(m+1)}}\right||d\tau|\leq$$

$$\leq\frac{2m|\varepsilon|^{-\frac{m}{m+1}}z_0^{-\frac{1+m}{2m}}}{m+1}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{0}^{x_0^{(m+1)/m}}e^{\frac{-m\rho|\cos(\varphi_s+(2\pi(s-1))/m)|}{|\varepsilon|(m+1)}}d\rho=$$

$$=2z_0^{-\frac{1+m}{2m}}|\varepsilon|^{\frac{1}{m+1}}\sum_{s=1}^{m}\frac{\left(1-e^{\frac{-mx_0^{(m+1)/m}|\cos(\varphi_s+(2\pi(s-1))/m)|}{|\varepsilon|(m+1)}}\right)}{|\cos(\varphi_s+(2\pi(s-1))/m)|},$$

де $\delta_{js}(\xi)$, $j=1,2,$ — частини шляху, що лежать відповідно в областях $|t\varepsilon^{-m/(m+1)}|\leq$ $\leq z_0$ і $|t\varepsilon^{-m/(m+1)}|>z_0$.

Аналогічно оцінюється інтеграл

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{j_{ks}(x)}|t|^{\frac{(1-m)\sigma(t,\varepsilon)}{m}}|\varepsilon|^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-1)}{m+1}}e^{\frac{-mRe((x^{(m+1)}/m-t^{(m+1)}/m)(e_k+e_s))}{\varepsilon(m+1)}}|dt|=$$

$$=\frac{m}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{\lambda_{ks}(\xi)}|\tau|^{-\frac{(m-1)\sigma(t,\varepsilon)+1}{m+1}}|\varepsilon|^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-1)}{m+1}}e^{\frac{-mRe((\xi-\tau)(e_k+e_s))}{(m+1)|\varepsilon|}}|d\tau|\leq$$

$$\leq\frac{m}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\int\limits_{\lambda_{ks}(\xi)}|\tau|^{-\frac{(m-1)\sigma(t,\varepsilon)+1}{m+1}}|\varepsilon|^{\frac{(m-1)(\sigma(t,\varepsilon)-1)}{m+1}}|d\tau|\leq$$

$$\leq 2m^3x_0^{\frac{1}{m}}+2m^2z_0|\varepsilon|^{\frac{1}{m+1}}. \tag{46}$$

З (45), (46), врахувавши, що $H_j(x,\varepsilon)\sim 0$, $j=\overline{1,4}$, при $\varepsilon\to 0$ отримаємо оцінки для норм $\|W_j^{(l+1)}(x,\varepsilon)\|_0$ у вигляді

$$\left\|W_j^{(l+1)}(x,\varepsilon)\right\|_0 \le \sum_{k=1}^{4} L_{jk}(x_0,\varepsilon)\left\|W_k^{(l)}(x,\varepsilon)\right\|_0 + c_j\varepsilon^{m_j}, \tag{47}$$

де $m_j$ — невід'ємні цілі числа, $c_j$ — сталі, $l = 0, 1, 2, \ldots$,

$$L_{14} = L_{23} = L_{32} = L_{41} = L_{11} = L_{22} = 0,$$

$$L_{12}(x_0,\varepsilon) = 2m\varepsilon^{\frac{m-1}{2(m+1)}}\left(z_0\sqrt{\varepsilon} + \frac{2mx_0^{(m+1)/2m}}{m+1}\right)\left\|\widehat{U}^T(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0 \|D_1(\varepsilon)\|,$$

$$L_{13}(x_0,\varepsilon) = 2m\varepsilon^{\frac{m-1}{2(m+1)}}\left(z_0\sqrt{\varepsilon} + \frac{2mx_0^{(m+1)/2m}}{m+1}\right)\|A_1(x)\|_0\left\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0,$$

$$L_{21}(x_0,\varepsilon) = 2m\varepsilon^{1/(m+1)}L_1(x_0,\varepsilon)\|C_1(\varepsilon)\|\left\|(\widehat{U}^T(x\varepsilon^{-m/(m+1)}))^{-1}\right\|_0,$$

$$L_{24}(x_0,\varepsilon) = 2m\varepsilon^{1/(m+1)}L_1(x_0,\varepsilon)\|A_1(x)\|_0\left\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0,$$

$$L_{34}(x_0,\varepsilon) = 2m^2\varepsilon^{1/(m+1)}L_1(x_0,\varepsilon)\left\|\widehat{U}^T(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0\|D_1(\varepsilon)\|,$$

$$L_{33}(x_0,\varepsilon) = 2m^4\big(z_0\varepsilon^{1/(m+1)} + mx_0^{1/m}\big)\left\|(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)}))^{-1}\right\|_0\times$$

$$\times\|B_1(x)\|_0\left\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0,$$

$$L_{31}(x_0,\varepsilon) = 2m^2\varepsilon^{1/(m+1)}L_1(x_0,\varepsilon)\left\|(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)}))^{-1}\right\|_0\|B_2(x)\|_0,$$

$$L_{44}(x_0,\varepsilon) = 2m^5\left(mx_0^{1/m} + z_0\varepsilon^{1/(m+1)}\right)\times$$

$$\times\left\|(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)}))^{-1}\right\|_0\|B_1(x)\|_0\left\|\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\right\|_0,$$

$$L_{43}(x_0,\varepsilon) = 2m^4\varepsilon^{\frac{m-1}{2(m+1)}}\left(z_0\varepsilon^{1/2} + \frac{2m}{m+1}x_0^{(m+1)/2m}\right)\times$$

$$\times\|C_1(\varepsilon)\|\left\|\big(\widehat{U}^T(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big)^{-1}\right\|_0,$$

$$L_{42}(x_0,\varepsilon) = 2m^4\varepsilon^{\frac{m-1}{2(m+1)}}\left(z_0\varepsilon^{1/2} + \frac{2m}{m+1}x_0^{(m+1)/2m}\right)\times$$

$$\times\left\|\big(\widehat{U}(x\varepsilon^{-m/(m+1)})\big)^{-1}\right\|_0\|B_2(x)\|_0,$$

в яких для сектора (39) функція $L_1(x_0,\varepsilon)$ має вигляд

$$L_1(x_0,\varepsilon) = mz_0 + z_0^{-(1+m)/2m}\sum_{s=1}^{m}\frac{1 - e^{-\frac{mx_0^{(m+1)/m}|\cos(\varphi_s + 2\pi(s-1)/m)|}{\varepsilon(m+1)}}}{|\cos(\varphi_s + 2\pi(s-1)/m)|},$$

а для сектора (40) — вигляд

$$L_1(x_0,\varepsilon) = mz_0 + z_0^{-(1+m)/2m}\sum_{s=1}^{m}\frac{1 - e^{-\frac{mx_0^{(m+1)/m}|\cos(\varphi_s + \pi(2s-m)/m)|}{\varepsilon(m+1)}}}{|\cos(\varphi_s + \pi(2s-m)/m)|}.$$

Склавши різниці $W^{(l+1)}(x,\varepsilon) - W^{(l)}(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,4}$, у рівнянні (42), одержимо оцінки у вигляді

$$\left\|W^{(l+1)}(x_0,\varepsilon) - W^{(l)}(x_0,\varepsilon)\right\|_0 \le \|P(x_0,\varepsilon)\| \left\|W^{(l)}(x_0,\varepsilon) - W^{(l-1)}(x_0,\varepsilon)\right\|_0, \quad (48)$$

в яких $(4\times 4)$-матриця має вигляд $P(x_0,\varepsilon) = (L_{jk}(x_0,\varepsilon))$, $j,k=\overline{1,4}$. Числа $x_0$ і $\varepsilon$ вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\left\|P(x_0,\varepsilon)\right\| < 1, \quad (49)$$

що забезпечить рівномірну збіжність послідовностей $W_j^{(l)}(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,4}$, $l = 0,1,2,\ldots,$ до функцій $W_j(x,\varepsilon)$ при $|x|\le x_0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\dfrac{\pi(m-1)}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \dfrac{\pi(m+3)}{m+1}$, $-\dfrac{3\pi}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \dfrac{\pi}{m+1}$. Можна довести нескінченну диференційовність по $x$, $\varepsilon$ ітерацій $W_j^{(l)}(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,4}$, $l=0,1,\ldots,$ а потім, застосувавши теорему Арцела, одержати нескінченну диференційовність функцій $W_j(x,\varepsilon)$ по $x$, $\varepsilon$ при $|x|\le x_0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\dfrac{\pi(m-1)}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \dfrac{\pi(m+3)}{m+1}$, $-\dfrac{3\pi}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \dfrac{\pi}{m+1}$. Довизначимо функції $W_j(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,4}$, в точці $\varepsilon=0$ і $|x|\le x_0$ таким чином:

$$\widetilde{W}_j(x,\varepsilon) = \begin{cases} W_j(x,\varepsilon), & \text{якщо } 0<\varepsilon\le\varepsilon_0, \\ 0, & \text{якщо } \varepsilon=0. \end{cases}$$

Тоді

$$\left.\frac{\partial \widetilde{W}_j(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\widetilde{W}_j(x,\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to}\varepsilon^{m_j-1}\widetilde{C}_j(x,\varepsilon),$$

де $\widetilde{C}_j(x,\varepsilon) = \lim\limits_{l\to\infty}\widetilde{C}_j^{(l)}(x,\varepsilon)$, $\widetilde{C}_j^{(l)}(x,\varepsilon) = \dfrac{W_j^{(l)}(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{m_j}}$, $j=\overline{1,4}$. Математичною індукцією можна довести нескінченну диференційовність по $x$ і $\varepsilon$ функції $\widetilde{W}_j(x,\varepsilon)$ при $|x|\le x_0$ і $\varepsilon=0$, до того ж

$$\left.\frac{\partial^k \widetilde{W}_j(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\left(\varepsilon^{m_j-k}\frac{\partial^k\widetilde{C}_j(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^k}\right)\right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Тоді із співвідношень (41) випливає нескінченна диференційовність розв'язків рівнянь (37) по $x$ і $\varepsilon$ при $|x|\le x_0$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, $\dfrac{\pi(m-1)}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \dfrac{\pi(m+3)}{m+1}$, $-\dfrac{3\pi}{m+1} < \arg(x\varepsilon^{-m/(m+1)}) < \dfrac{\pi}{m+1}$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

**Теорема 2.** *Якщо справджуються теорема* 1 *і нерівність* (49), *то матриця*

$$\begin{pmatrix} U(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x) & \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}$$

*є асимптотичним розвиненням при* $\varepsilon \to 0$ *матриці* $\Phi(x,\varepsilon)$ *у крузі* $|x| \le x_0$, *яка є розв'язком рівняння* (17). *Матриця* $\Phi(x,\varepsilon)$ *є нескінченно диференційовною по* $x$, $\varepsilon$ *в області* $|x| \le x_0$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ *дійсних змінних* $x$, $\varepsilon$.

**Висновки.** У даній статті за допомогою заміни змінних з матрицею перетворення $\Phi(x,\varepsilon)$, яка є нескінченно диференційовною по $x$ і $\varepsilon$ в області $|x| \le x_0$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ дійсних змінних $x$, $\varepsilon$, систему рівнянь (1) зведено до системи (4), (5), яка містить нескінченно диференційовні матриці $C_1(\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon)$ при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.


1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. *Wasow W.* Linear turning point theary. – New York Ins.: Springer, 1985. – 243 p.
3. *Найфэ А.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
4. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
5. *Kohno M., Ohkohchi S., Kohmoto T.* On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter // Hiroshima Math. J. – 1979. – **9**. – P. 747 – 767.
6. *Wasow W.* Simplification of turning point problems for systems of linear differential // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – **106**. – P. 100 – 114.
7. *Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегровании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1505 – 1516.
8. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
9. *Ключник І. Г.* Асимптотичні розв'язки лінійної системи з малим параметром при частині похідних // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 1. – С. 30 – 38.


Одержано 02.03.09