УДК 519.21

В. С. Королюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРОБЛЕМА ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ ДЛЯ МАРКОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ У СХЕМІ АСИМПТОТИЧНО МАЛОЇ ДИФУЗІЇ*

The large deviation problem for random evolutions with independent increments in a scheme of asymptotically small diffusion is solved by the limiting transition in the nonlinear (exponential) generator of semigroups with the use of a solution of singular perturbation problem for reducible invertible operator.

Проблема больших отклонений для случайных эволюций с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии решается граничным переходом в нелинейном (экспоненциальном) генераторе полугрупп с использованием решения проблемы сингулярного возмущения для приводимо обратимого оператора.

1. Вступ. *Проблема великих відхилень* для випадкових процесів є однією з трьох основних проблем теорії збіжності випадкових процесів, серед яких:

1) проблема усереднення або закон великих чисел;

2) проблема дифузійної апроксимації або центральна гранична теорема;

3) проблема великих відхилень або асимптотична поведінка експоненціально малих імовірностей.

Проблема великих відхилень має давню історію. Існують різноманітні методи дослідження, які описано у багатьох монографіях. Ми будемо використовувати монографію [1], в якій розвинуто ефективний метод, що ґрунтується на теорії збіжності нелінійних (експоненціальних) напівгруп. У монографії [2] для *випадкових еволюцій* наведено схеми алгоритмів фазового укрупнення (усереднення та дифузійної апроксимації), в яких використано *розв'язок проблеми сингулярного збурення* звідно оборотних операторів.

У даній роботі пропонується поєднання цих алгоритмів для розв'язування проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії. Відповідна випадкова еволюція задається стохастичним адитивним функціоналом [2] (§ 2.6)

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Тут $x(t)$, $t \geq 0$, — марковський стрибковий процес перемикань у вимірному (польському) просторі $(E, \mathcal{E})$, що визначається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, dy), \quad x \in E. \tag{2}$$

Марковські процеси з незалежними приростами в евклідовому просторі R^d, $d \geq 1$, $\eta(t; x)$, $t \geq 0$, $x \in E$, задаються генераторами

*Виконано за підтримки гранта DFG Німеччини 436 UKR 113/94 та 113/97.

$$\Gamma(x)\varphi(u) = \int\limits_{R^d} [\varphi(u+z) - \varphi(u)]\Gamma(dz;x), \quad u \in R^d, x \in E. \tag{3}$$

Випадкова еволюція (1) визначається генератором двокомпонентного марковського процесу $\xi(t)$, $x(t)$, $t \geq 0$, у вигляді [2] (лема 2.5)

$$L\varphi(u,x) = Q\varphi(\cdot,x) + \Gamma(x)\varphi(u,\cdot).$$

Схема усереднення для випадкової еволюції у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ визначається нормуванням [2] (§ 3.3)

$$\varepsilon\xi(t/\varepsilon), \qquad x(t/\varepsilon), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

Схема дифузійної апроксимації для випадкової еволюції у схемі серій визначається нормуванням [2] (§ 3.4)

$$\varepsilon\xi(t/\varepsilon^2), \qquad x(t/\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

У роботі вивчається проблема великих відхилень для випадкових еволюцій (1) – (3) *у схемі серій* з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$, що визначається нормуванням (див. [3], а також [1] (§ 10.1.6)):

$$\varepsilon^2\xi(t/\varepsilon^3), \qquad x(t/\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon > 0). \tag{4}$$

У другому пункті демонструється ефективність схеми серій з малим параметром серії для розв'язування проблеми великих відхилень для процесів з незалежними приростами з нормуванням

$$\varepsilon^2\eta(t/\varepsilon^3), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon > 0).$$

У пункті 3 обчислюється граничний експоненціальний (нелінійний) оператор для випадкової еволюції (1) – (3) з нормуванням (4) при додатковій умові (тотального) балансу.

У пункті 4 обчислюється граничний експоненціальний оператор великих відхилень для випадкової еволюції з нормуванням (4) при додатковій умові (локального) балансу.

***Зауваження* 1.** Розв'язок проблеми великих відхилень вимагає реалізації чотирьох етапів (див. [1], розділ 2):

1. Обчислення граничного експоненціального (нелінійного) оператора, що визначає великі відхилення.
2. Визначення експоненціальної компактності.
3. Визначення *принципу порівняння* для граничного оператора.
4. Конструкція варіаційного зображення функціонала дії, що визначає великі відхилення.

У зв'язку з тим, що граничний оператор великих відхилень для випадкової еволюції (1) є таким самим, як і для *асимптотично малої дифузії* (див. [1], § 10.1), етапи 2 – 4 у розглядуваному випадку реалізовано в монографії [1] (частина 1).

***Зауваження* 2.** Обчислення граничного оператора великих відхилень для випадкових еволюцій (1) з асимптотично малою дифузією для простоти, не зменшуючи загальності, достатньо реалізувати в одновимірному евклідовому просторі R, тобто на числовій осі.

2. Процеси з незалежними приростами з асимптотично малою дифузією. Як відомо, генератор стрибкових процесів з незалежними приростами $\eta(t)$, $t \geq 0$, задається на тест-функціях $\varphi(u)$, $u \in R$, що належать банаховому просторові $\mathcal{B}(R)$ з нормою $\|\varphi\| := \sup_{u\in R} |\varphi(u)|$, у такому вигляді:

$$\Gamma\varphi(u) = \int\limits_R [\varphi(u+z) - \varphi(u)]\Gamma(dz).$$

Міра Леві $\Gamma(dz)$ для простоти задовольняє умову

$$\exists a > 0\colon \quad \int\limits_R e^{az}\Gamma(dz) < \infty.$$

Отже,

$$\Gamma(R) < \infty, \qquad b := \int\limits_R z\Gamma(dz) < \infty, \qquad B := \int\limits_R z^2\Gamma(z) < \infty.$$

Тоді у *схемі усереднення* має місце збіжність

$$\varepsilon\eta(t/\varepsilon) \Rightarrow bt, \quad \varepsilon \to 0.$$

Відповідний генератор процесу

$$\eta^\varepsilon(t) := \varepsilon\eta(t/\varepsilon), \quad t \geq 0,$$

має вигляд

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-1}\int\limits_R [\varphi(u+\varepsilon z) - \varphi(u)]\Gamma(dz).$$

Отже, на достатньо гладких тест-функціях має місце асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = b\varphi'(u) + \gamma^\varepsilon\varphi(u)$$

зі знехтуваним членом

$$\left|\gamma^\varepsilon\varphi(u)\right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in C^2(R). \tag{5}$$

У схемі дифузійної апроксимації має місце збіжність

$$\varepsilon\eta(t/\varepsilon^2) - bt/\varepsilon \Rightarrow w_\sigma(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

де $w_\sigma(t)$ — процес броунівського руху з дисперсією $\sigma^2 = B$. Відповідний генератор нормованого процесу

$$\eta^\varepsilon(t) := \varepsilon\eta(t/\varepsilon^2) - bt/\varepsilon, \quad t \geq 0,$$

має вигляд

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-2}\int\limits_R \big[\varphi(u+\varepsilon z) - \varphi(u) - \varepsilon z\varphi'(u)\big]\Gamma(dz).$$

Отже, на достатньо гладких тест-функціях має місце асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \frac{1}{2} B\varphi''(u) + \gamma^\varepsilon \varphi(u)$$

зі знехтуваним членом (5).

Розглянемо тепер процеси з незалежними приростами з *асимптотично малою дифузією*:

$$\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon^2 \eta(t/\varepsilon^3) - bt/\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon > 0), \tag{6}$$

що визначаються генератором

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-3} \int_R \big[\varphi(u + \varepsilon^2 z) - \varphi(u) - \varepsilon^2 z \varphi'(u)\big] \Gamma(dz). \tag{7}$$

Отже, на достатньо гладких тест-функціях має місце асимптотичне зображення

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon \frac{1}{2} B\varphi''(u) + \varepsilon \gamma^\varepsilon \varphi(u) \tag{8}$$

зі знехтуваним членом (5).

Основний член у (8) визначає *асимптотично малу дифузію*:

$$w_{\sigma\sqrt{\varepsilon}}(t), \quad t \geq 0,$$

з дисперсією εB.

Розв'язування проблеми великих відхилень для процесів (6) визначається граничним переходом в експоненціальному операторі у схемі серій (див. [1], розділ 1)

$$H^\varepsilon \varphi(u) = e^{-\varphi(u)/\varepsilon} \varepsilon \Gamma^\varepsilon e^{\varphi(u)/\varepsilon}.$$

Після перетворення з урахуванням вигляду (7) оператора Γ^ε маємо

$$H^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_R \big[e^{\Delta^\varepsilon \varphi} - 1 - \varepsilon z \varphi'(u)\big] \Gamma(dz),$$

де за означенням $\Delta^\varepsilon \varphi := \varepsilon^{-1}[\varphi(u + \varepsilon^2 z) - \varphi(u)]$.

Тепер, застосовуючи формулу Тейлора до достатньо гладких тест-функцій $\varphi(u)$, отримуємо асимптотичне зображення

$$H^\varepsilon \varphi(u) = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2 + h^\varepsilon \varphi(u)$$

зі знехтуваним членом

$$|h^\varepsilon \varphi(u)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^2(R).$$

Твердження 1. *Генератор*

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2} B[\varphi'(u)]^2 \tag{9}$$

розв'язує проблему великих відхилень для асимптотично малої дифузії процесів (6).

***Зауваження* 3.** Відомо (див., наприклад, [1], розділ 10), що генератор (9) є розв'язком проблеми великих відхилень для броунівського руху $w_{\sigma\sqrt{\varepsilon}}(t),\ t \geq 0$, з асимптотично малою дисперсією $\varepsilon\sigma^2 = \varepsilon B$.

3. Випадкові еволюції з незалежними приростами з марковськими перемиканнями. Випадкові еволюції у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ задаються стохастичним адитивним функціоналом (1)–(3) з нормуванням (4). Основні припущення є такими:

Π_1. Марковський процес перемикань $x(t),\, t \geq 0$, що задається генератором (2), є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(A),\ A \in \mathcal{E}$.

Π_2. Умова тотального балансу:

$$b(x) := \int_R z\Gamma(dz; x) \equiv 0.$$

Твердження 2. *Розв'язок проблеми великих відхилень для випадкової еволюції*

$$\zeta^\varepsilon(t) := \varepsilon^2\xi(t/\varepsilon^3), \quad x^\varepsilon(t) := x(t/\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \tag{10}$$

що задається породжуючим генератором

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(\cdot,x) + \Gamma_\varepsilon(x)\varphi(u,\cdot), \tag{11}$$

де

$$\Gamma_\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-3}\int_R [\varphi(u+\varepsilon^2 z) - \varphi(u)]\Gamma(dz; x), \tag{12}$$

визначається експоненціальним генератором

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}B[\varphi'(u)]^2.$$

Тут

$$B = \int_E \pi(dx)B(x), \qquad B(x) = \int_R z^2\Gamma(dz; x).$$

***Доведення*.** Граничний перехід в експоненціальному нелінійному генераторі для випадкової еволюції (10) реалізується на збурених тест-функціях (див. [1], розділ 11)

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\ln[1 + \varepsilon\varphi_1(u,x)].$$

Отже, маємо відправну формулу

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon = e^{-\varphi/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1]^{-1}\varepsilon L^\varepsilon e^{\varphi/\varepsilon}[1+\varepsilon\varphi_1]. \tag{13}$$

В результаті обчислення асимптотичної поведінки в (13) з урахуванням (11), (12) отримуємо такий результат.

Лема 1. *Має місце асимптотичне зображення*

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon = Q\varphi_1 + \frac{1}{2}B(x)[\varphi'(u)]^2 + h^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

зі знехтуваним членом

$$|h^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^3(R).$$

Тепер з розв'язку проблеми сингулярного збурення для генератора Q одержуємо зображення [2] (розділ 5):

$$\begin{aligned} H^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} &= \frac{1}{2}B[\varphi'(u)]^2 + h^{\varepsilon}(x)\varphi(u), \\ \varphi_1(u,x) &= \frac{1}{2}\mathcal{R}_0\widetilde{B}(x)[\varphi'(u)]^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Тут $\widetilde{B}(x) := B(x) - B$, а потенціальний оператор $\mathcal{R}_0$ визначається розв'язком рівняння [2] (розділ 1)

$$Q\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0 Q = \Pi - I, \quad \Pi\varphi(x) := \int\limits_E \pi(dx)\varphi(x).$$

Зображення (14), а також очевидне співвідношення

$$|H^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} - H\varphi| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^3(R),$$

завершують доведення твердження 2.

4. Випадкові еволюції з незалежними приростами в умовах локального балансу. Тепер замість умови Π_2 тотального балансу має місце *умова локального балансу*

Π_2') $b := \int_E \pi(dx)b(x),\ b(x) := \int_R z\Gamma(dz;x).$

Випадкова еволюція при умові Π_2' задається у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ в такій формі:

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^2\xi(t/\varepsilon^3) - bt/\varepsilon, \qquad x^{\varepsilon}(t) = x(t/\varepsilon^3), \quad t \geq 0. \tag{15}$$

Відповідний лінійний породжуючий генератор має вигляд

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \left[\varepsilon^{-3}Q + \Gamma_b^{\varepsilon}(x)\right]\varphi(u,x), \tag{16}$$

$$\Gamma_b^{\varepsilon}(x)\varphi(u) =$$

$$= \varepsilon^{-1}\widetilde{b}(x)\varphi'(u) + \varepsilon^{-3}\int\limits_R \left[\varphi(u+\varepsilon^2 z) - \varphi(u) - \varepsilon^2 z\varphi'(u)\right]\Gamma(dz;x), \tag{17}$$

$$\widetilde{b}(x) := b(x) - b.$$

Твердження 3. *Розв'язок проблеми великих відхилень для випадкової еволюції* (15)–(17) *при умові* Π_2' *визначається експоненціальним генератором броунівського руху*

$$\begin{aligned} H\varphi(u) &= \frac{1}{2}B[\varphi'(u)]^2, \\ B &= B_1 + B_2, \\ B_k &= \int\limits_E \pi(dx)B_k(x), \quad k = 1,2, \end{aligned} \tag{18}$$

$$B_1(x) = \int_R z^2 \Gamma(dz; x), \quad B_2(x) = 2\widetilde{b}(x)\mathcal{R}_0\widetilde{b}(x).$$

Отже, перший доданок у (18) визначає вклад других моментів еволюції, а другий — вклад флюктуацій перших моментів.

Доведення. Граничний перехід в експоненціальному генераторі для випадкової еволюції (15) – (17), як і при доведенні твердження 2, реалізується на збурених тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon \ln\left[1 + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x)\right].$$

Лема 2. *Має місце асимптотичне зображення експоненціального генератора випадкової еволюції* (15) – (17)

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\left[Q\varphi_1 + \widetilde{b}(x)\varphi'(u)\right] + \left[Q\varphi_2 + \frac{1}{2}B_1(x)[\varphi'(u)]^2 - \varphi_1 Q\varphi_1\right] + h^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

зі знехтуваним членом

$$|h^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^3(R).$$

Тепер розв'язок проблеми великих відхилень для випадкової еволюції (15) – (17) в умовах локального балансу Π_2'

$$\Pi\widetilde{b}(x) := \int_E \pi(dx)\widetilde{b}(x) = \int_E \pi(dx)[b(x) - b] = 0$$

дають розв'язки проблем сингулярного збурення (див. [2], розділ 5)

$$Q\varphi_1 + \widetilde{b}(x)\varphi'(u) = 0, \qquad \varphi_1 = \mathcal{R}_0\widetilde{b}(x)\varphi'(u), \tag{19}$$

$$Q\varphi_2 + \frac{1}{2}B(x)[\varphi'(u)]^2 = \frac{1}{2}B[\varphi'(u)]^2. \tag{20}$$

При побудові рівняння (20) використано рівність (див. (19))

$$\varphi_1 Q\varphi_1 = -\varphi_1\widetilde{b}(x)\varphi'(u) = \frac{1}{2}B_2(x)[\varphi'(u)]^2.$$

Висновок. Експоненціальний генератор випадкових еволюцій (15) – (17) допускає асимптотичне зображення

$$H^\varepsilon\varphi^\varepsilon = \frac{1}{2}B[\varphi'(u)]^2 + h^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

зі знехтуваним членом

$$|h^\varepsilon(x)\varphi(u)| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^3(R).$$

Твердження доведено.

***Зауваження* 4.** Твердження 1 – 3 справджуються в евклідовому просторі $R^d, d \geq$ ≥ 2, з інтерпретацією граничного експоненціального генератора в такій формі:

$$H\varphi(u) = \frac{1}{2}\varphi'^* B\varphi',$$

де $\varphi'^* := (\varphi_k'(u), 1 \leq k \leq d)$ — вектор-рядок, $\varphi' := (\varphi_k'(u), 1 \leq k \leq d)$ — вектор-стовпчик, $B := [B_{kr}; 1 \leq k, r \leq d]$ — матриця.

Отже, експоненціальний генератор великих відхилень для броунівського руху має зображення у вигляді квадратичної форми

$$H\varphi(u) = \sum_{k,i=1}^{d} B_{kr}\varphi'_k\varphi'_r, \qquad \varphi'_k := \partial\varphi(u)/\partial u_k. \tag{21}$$

***Зауваження* 5.** Замкнений щільно визначений оператор (21) розширюється на простір абсолютно неперервних функцій

$$C_b^1(R^d) := \left\{\varphi(u) \in C^1(R^d) \colon \ \exists \lim_{|u|\to\infty} \varphi(u) \equiv \varphi(\infty), \quad \lim_{|u|\to\infty} \varphi'(u) = 0\right\},$$

в якому реалізується варіаційне зображення функціонала дії, що визначає великі відхилення асимптотично малої дифузії (див. [1], частина 1).

***Зауваження* 6.** Аналогічно можна розв'язати проблему великих відхилень для випадкових еволюцій з локально незалежними приростами (див. [2], розділ 2) у схемі локальної асимптотично малої дифузії.

Автор висловлює подяку проф. Ю. Г. Кондратьєву, який звернув його увагу на монографію [1].

1. *Feng J., Kurtz T. G.* Large deviation for stochastic processes // Math. Surveys and Monographs. – 2006. – **131**.
2. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Sci. Publ., 2005.
3. *Mogulskii A. A.* Large deviation for processes with independent increments // Ann. Probab. – 1993. – **21**. – P. 202 – 215.

Одержано 04.02.10