УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
М. В. Савчук (Ін-т підготовки кадрів держ. служби зайнятості України, Київ)

ПІДСУМОВУВАННЯ МЕТОДОМ АБЕЛЯ – ПУАССОНА p-ФАБЕРОВИХ РЯДІВ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

We find conditions on a boundary Γ of a bounded simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ under which a p-Faber series of arbitrary function from the Smirnov space $E_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, can be summed up by the Abel – Poisson method on the boundary of the domain up to the limit values of the function itself in the metric of the space $L_p(\Gamma)$.

Найдены условия на границу Γ ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, при которых p-фаберовый ряд любой функции из пространства Смирнова $E_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, суммируется методом Абеля – Пуассона на границе области до предельных значений самой функции в метрике пространства $L_p(\Gamma)$.

1. У даній роботі наведено результати досліджень, пов'язаних з таким питанням. Нехай Ω — обмежена однозв'язна область у комплексній площині $\mathbb{C}$ зі спрямлюваною жордановою межею $\Gamma = \partial\Omega$, функція $f \in L_p(\Gamma)$, $1 \le p \le \infty$, і

$$C(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega,$$

— її інтеграл типу Коші. Якщо відомо, що послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ аналітичних в Ω функцій, які мають майже скрізь на Γ кутові граничні значення, рівномірно збігається в Ω до $C(f)$, то що можна сказати про $\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta)$, коли $\zeta \in \Gamma$?

Більш точно, в роботі роль послідовності $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ відіграє послідовність $\big\{A_{\varrho,p}(f)\big\}_{0\le\varrho<1}$, $\varrho = 1 - 1/n$, середніх Абеля – Пуассона p-фаберового ряду функції f з простору Смірнова E_p, $1 \le p < \infty$, тобто

$$A_{\varrho,p}(f)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k \widehat{f}_{k,p} F_{k,p}(z), \quad 0 < \varrho < 1,$$

і з'ясовується, за яких умов на межу Γ послідовність $A_{\varrho,p}(f)$ збігатиметься в p-середньому на Γ до граничних значень функції $f \in E_p$, тобто матиме місце рівність

$$\lim_{\varrho\to 1-} \|f - A_{\varrho,p}(f)\|_{L_p(\Gamma)} = 0. \tag{1}$$

Розглянуто також питання: коли обмеженість величини

$$M_p(f) := \sup_{0<\varrho<1} \left(\int\limits_{\Gamma} |A_{\varrho,p}(f)(z)|^p \, |dz| \right)^{1/p}$$

є критерієм належності інтеграла типу Коші $C(f)$, $f \in L_p(\Gamma)$, простору E_p?

Опишемо коротко будову статті. В п. 2 наведено низку тверджень, які можна розцінювати як попередні відомості щодо питань збіжності середніх Абеля – Пуассона p-фаберових рядів. Основний результат цього пункту (теорема 1) стверджує, що для рівності (1) область Ω необхідно має бути областю Смірнова. В п. 3 досліджено величини $M_p(f)$ на предмет виконання еквівалентності: $M_p(f) < \infty$

$\forall f \in L_p(\Gamma) \Leftrightarrow C(f) \in E_p \ \forall f \in L_p(\Gamma)$. Основний результат цього пункту (теорема 2) стверджує, що така еквівалентність має місце при всіх скінченних $p > 1$, якщо межа Γ є регулярною кривою. В п. 4, який є основним у роботі, показано, що відома умова С. Я. Альпера на межу Γ є достатньою умовою виконання рівності (1) при $p = 1$ для всіх $f \in E_1$.

2. Нехай Φ — функція, яка конформно і однолисто відображає область $\Omega^- := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ на область $\mathbb{D}^- := \{w \in \mathbb{C} \colon |w| > 1\}$ так, що $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, і нехай $\Psi := \Phi^{-1}$ — функція, обернена до Φ. Скрізь далі довжина кривої Γ покладається рівною 2π, тобто $\int\limits_{\mathbb{T}} |\Psi'(w)||dw| = 2\pi$, де $\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C} \colon |w| = 1\}$ (щодо інтегровності функції Ψ' див., наприклад, [1, с. 173]).

Простір Смірнова $E_p = E_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ (див., наприклад, [1, с. 203]), — це простір усіх аналітичних в Ω функцій f, для кожної з яких знайдеться послідовність $\{\Omega_j\}_{j \ge 1}$, $\Omega_j \subset \Omega$, однозв'язних областей зі спрямлюваними жордановими межами $\partial\Omega_j$, яка вичерпує зсередини область Ω, така, що

$$\sup_j \int\limits_{\partial\Omega_j} |f(w)|^p |dw| < \infty.$$

Аналогічно означається простір $E_p(\Omega^-)$.

Через $E_\infty(\Omega)$ позначимо простір обмежених аналітичних в Ω функцій, а через $A(\overline{\Omega})$ — простір функцій, аналітичних в Ω і неперервних в $\overline{\Omega}$ з нормою $\|f\|_{A(\overline{\Omega})} = \max\left\{|f(z)| \colon z \in \overline{\Omega}\right\}$.

У випадку, коли $\Omega = \mathbb{D}$, простір Смірнова є простором Гарді і $E_p(\mathbb{D}) = H_p$.

Відомо (див., наприклад, [1, с. 205]), що кожна функція $f \in E_p(\Omega)$ має майже скрізь на межі Γ кутові граничні значення, які позначатимемо тією самою літерою f. До того ж $f \in L_p(\Gamma)$ і

$$\|f\|_{E_p} = \|f\|_p := \|f\|_{L_p(\Gamma)} := \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{якщо} \quad 1 \le p < \infty,$$

і

$$\|f\|_{E_\infty} := \sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\Gamma)} := \operatorname{ess\,sup}_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Нехай $1 \le p \le \infty$. *p-Фаберовим многочленом степеня k, $k = 0, 1, \ldots,$ для області Ω називається многочлен $F_{k,p}$ (див., наприклад,* [2 – 4]), *який збігається з правильною частиною розкладу функції* $\Phi^k \cdot (\Phi')^{1/p}$ *в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки.* Таким чином,

$$F_{0,p}(z) = (\Phi'(\infty))^{1/p}, \quad z \in \Omega^-,$$

і

$$F_{k,p}(z) = \Phi^k(z) \cdot (\Phi'(z))^{1/p} - Q_{k,p}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad z \in \Omega^-,$$

де $Q_{k,p}$ — певна функція з $E_p(\Omega^-)$ така, що $Q_{k,p}(\infty) = 0$.

Для спрощення записів покладемо $F_k := F_{k,\infty}$.

Нехай $\Gamma_R := \{z \in \mathbb{C} \colon |\Phi(z)| = R\}$, $\Omega_R := \operatorname{int}\Gamma_R$ і $\Omega_R^- := \operatorname{ext}\Gamma_R$, $R \ge 1$.

Нагадаємо основні інтегральні рівності для p-фаберових многочленів, які випливають безпосередньо з означення та теореми Коші:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\Phi^k(\zeta)\left(\Phi'(\zeta)\right)^{1/p}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{R^{k+1}}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\zeta^k(\Psi'(R\zeta))^{1-1/p}}{\Psi(R\zeta)-z}d\zeta=$$

$$=\begin{cases}0, & z\in\Omega_R,\quad k=-1,-2,\ldots,\\ F_{k,p}(z), & z\in\Omega_R,\quad k=0,1,2,\ldots,\\ -\Phi^k(z)\cdot(\Phi'(z))^{1/p}, & z\in\Omega_R^-,\quad k=-1,-2,\ldots,\\ F_{k,p}(z)-\Phi^k(z)\cdot(\Phi'(z))^{1/p}, & z\in\Omega_R^-,\quad k=0,1,2,\ldots,\end{cases} \tag{2}$$

де $R\geq 1$, а інтегрування проводиться в додатному напрямку.

Зазначимо, що при $R=1$ під $\Psi'(\zeta)$, $\zeta\in\mathbb{T}$, розуміються кутові граничні значення функції Ψ', які внаслідок спрямлюваності кривої Γ існують майже в кожній точці кола $\mathbb{T}$.

З рівностей (2) легко отримати розвинення в ряд Лорана

$$\frac{(\Psi'(\zeta))^{1-1/p}}{\Psi(\zeta)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{k,p}(z)}{\zeta^{k+1}}, \tag{3}$$

який для даного фіксованого $z\in\Omega_R, R\geq 1$, збігається рівномірно й абсолютно відносно ζ в області $\{\zeta\colon|\zeta|>R\}$. До того ж для $\zeta\in\mathbb{T}$, тобто якщо $\zeta=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, ряд у правій частині (3) при $z\in\Omega$ є рядом Фур'є відповідної функції, тобто

$$\frac{(\Psi'(e^{it}))^{1-1/p}}{\Psi(e^{it})-z}\sim\sum_{k=0}^{\infty}F_{k,p}(z)e^{-i(k+1)t}.$$

Нехай $f\in L_p(\Gamma),\ 1\leq p\leq\infty$. Означимо послідовність чисел

$$\widehat{f}_{k,p}:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}(f\circ\Psi)(\zeta)(\Psi'(\zeta))^{1/p}\zeta^{-k-1}d\zeta,\quad k\in\mathbb{Z},$$

і покладемо $\widehat{f}_k:=\widehat{f}_{k,\infty}$.

Послідовності $\{\widehat{f}_{k,p}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ і $\{\widehat{f}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — це послідовності коефіцієнтів Фур'є функцій $f\circ\Psi\cdot(\Psi')^{1/p}$ і $f\circ\Psi$ відповідно, визначених та сумовних на колі $\mathbb{T}:=$ $:=\{w\in\mathbb{C}\colon|w|=1\}$.

Розглянемо інтеграл типу Коші

$$C(f)(z):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in\Omega,$$

в якому $f\in L_1(\Gamma)$.

Твердження 1. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею Γ і $f\in L_p(\Gamma)$, $p\geq 1$. Тоді ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_{k,p}F_{k,p} \tag{4}$$

збігається до $C(f)$ рівномірно всередині області Ω, якщо $1<p<\infty$, і поточково в Ω, якщо $p=1$.

Нагадаємо, що під рівномірною збіжністю всередині області розуміється рівномірна збіжність на будь-яких компактах, які лежать в області.

Позначимо через $d(z,\Gamma)$ відстань від точки z до кривої Γ і покладемо

$$d(K,\Gamma) := \min_{z\in K} d(z,\Gamma).$$

Доведення. Нехай $1 < p < \infty$. За формулою (2) маємо рівність

$$C(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_{k,p} F_{k,p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(f(\zeta) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \widehat{f}_{k,p} \Phi^k(\zeta) (\Phi'(\zeta))^{1/p} \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

з якої й випливає співвідношення

$$\left| C(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_{k,p} F_{k,p}(z) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{d(K,\Gamma)} \left\| (f\circ\Psi)(\cdot)(\Psi'(\cdot))^{1/p} - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \widehat{f}_{k,p} e_k(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{T})} \to 0, \quad n\to\infty,$$

для всіх z на будь-якому компакті $K \subset \Omega$. Тут покладено $e_k(\zeta) := \zeta^{-k}$, а також використано той факт, що ряди Фур'є функцій з $L_p(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$, збігаються до своїх функцій за L_p-нормою.

Нехай тепер $p = 1$. Факт поточкової збіжності доводиться на основі формули

$$C(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_{k,1} F_{k,1}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f\circ\Psi)\,(e^{it}) \Psi'(e^{it}) \left(\frac{1}{\Psi(e^{it}) - z} - \sum_{k=0}^{n-1} F_{k,1}(z) e^{-i(k+1)t} \right) e^{it} dt$$

з урахуванням того, що для кожного фіксованого $z \in \Omega$ функція $t \mapsto (\Psi(e^{it}) - - z)^{-1}$ є абсолютно неперервною на відрізку $[0, 2\pi]$, а отже, її ряд Фур'є збігається рівномірно на $[0, 2\pi]$.

Ряд (4) називається p-фаберовим рядом, або рядом за p-фаберовими многочленами інтеграла типу Коші (аналітичної функції) $C(f)$. Аналогічно, якщо функція $f \in L_\infty(\Gamma)$, то інтегралу типу Коші $C(f)$ можна поставити у відповідність ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k F_k(z), \quad z\in\Omega, \tag{5}$$

який називається рядом Фабера функції $C(f)$.

Розглянемо середні Абеля – Пуассона рядів (4) і (5):

$$A_{\varrho,p}(f)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k \widehat{f}_{k,p} F_{k,p}(z), \quad 0 < \varrho < 1, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Твердження 2. *Нехай $1 \le p < \infty$, Ω — однозв'язна область, межею якої є замкнена жорданова спрямлювана крива Γ і $f \in L_p(\Gamma)$. Тоді середні $A_{\varrho,p}(f)$ при $\varrho \to 1-$ збігаються рівномірно всередині області Ω до $C(f)$.*

Доведення за суттю збігається з доведенням теореми 3 з [5] (гл. IX, § 3) із незначною модифікацією до випадку p-фаберових многочленів. Тому розглянемо лише ключові моменти.

Покладемо

$$f_\Psi := f_{\Psi,p} := f \circ \Psi \cdot (\Psi')^{1/p}$$

і

$$\omega(f_\Psi, t)_p := \sup_{|h|\le t} \left\| f_\Psi(\cdot) - f_\Psi(\cdot e^{ih}) \right\|_{L_p(\mathbb{T})}, \quad t \ge 0.$$

Тоді для будь-якого $z \in \Omega$

$$C(f)(z) - A_{\varrho,p}(f)(z) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left(f_\Psi(\zeta) - f_\Psi(\zeta e^{it}) \right) \frac{(\Psi'(\zeta))^{1/q}}{\Psi(\zeta) - z} d\zeta \right) \frac{1-\varrho^2}{|1-\varrho e^{it}|^2} dt,$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Внутрішній інтеграл оцінимо за допомогою нерівності Гельдера:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \left(f_\Psi(\zeta) - f_\Psi(\zeta e^{it}) \right) \frac{(\Psi'(\zeta))^{1/q}}{\Psi(\zeta) - z} d\zeta \right| \le$$
$$\le \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left| f_\Psi(\zeta) - f_\Psi(\zeta e^{it}) \right|^p |d\zeta| \right)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|\Psi'(\zeta)|}{|\Psi(\zeta) - z|^q} d\zeta \right)^{1/q} \le$$
$$\le \frac{1}{d(z,\Gamma)} \omega(f_\Psi, t)_p.$$

Отже, оскільки ядро Пуассона $(1-\varrho^2)/|1-\varrho w|^2$ є δ-подібним, для будь-якого компакта $K \subset \Omega$ маємо співвідношення

$$\max_{z\in K} \left| C(f)(z) - A_{\varrho,p}(f)(z) \right| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi d(K,\Gamma)} \int\limits_0^{2\pi} \omega(f_\Psi, t)_p \frac{1-\varrho^2}{|1-\varrho e^{it}|^2} dt \to 0, \quad \varrho \to 1-,$$

яке й доводить твердження 2.

В [6] показано, що для будь-якої функції $f \in A(\overline{\Omega})$ її ряд Фабера поточково підсумовується методом Абеля – Пуассона в $\overline{\Omega}$ до f, тобто для будь-якої функції $f \in A(\overline{\Omega})$

$$\lim_{\varrho\to 1-} A_{\varrho,\infty}(f)(z) = f(z) \quad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

Нашою метою є з'ясування умов на межу Γ області Ω, за яких рівність (1) справджується для будь-якої функції $f \in E_p(\Omega)$.

Для функцій f з простору $E_p(\Omega)$, $p > 0$, граничні значення яких належать $L_\infty(\Gamma)$, будемо досліджувати середні $A_{\varrho,\infty}(f)$ також на предмет їх збіжності в слабкій топології простору $L_\infty(\Gamma)$, тобто на предмет виконання рівності

$$\lim_{\varrho\to 1-} \int\limits_\Gamma A_{\varrho,\infty}(f) g d\sigma = \int\limits_\Gamma f g d\sigma, \tag{6}$$

де g — будь-яка функція з $L_1(\Gamma)$, σ — нормована міра Лебега на Γ.

На відміну від збіжності всередині області збіжність середніх $A_{\varrho,p}$ в $L_p(\Gamma)$ істотно залежить від геометричних властивостей кривої Γ. Ми покажемо, що кожна з рівностей (1) і (6) не може мати місця для всіх однозв'язних областей зі спрямлюваними жордановими межами.

Нагадаємо наступні означення і деякі факти.

Нехай ψ — конформне відображення круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Оскільки межа Γ є спрямлюваною кривою, то похідна ψ' належить H_1 і має канонічну факторизацію вигляду (див, наприклад, [1, с. 111, 220])

$$\psi' = \lambda S Q,$$

де λ — число, $|\lambda| = 1$,

$$S(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)\right),$$

μ — обмежена неспадна функція, для якої $\mu' = 0$ майже скрізь на $[0, 2\pi]$ і

$$Q(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|\psi'(e^{it})|dt\right).$$

Область Ω називається областю Смірнова, якщо $S \equiv 1$, тобто, коли $d\mu$ — нуль-міра.

Відомо [7], що для щільності множини алгебраїчних многочленів у просторі $E_p(\Omega),\ 1 \le p < \infty$, необхідно і достатньо, щоб область Ω була областю Смірнова. Області Смірнова відіграють головну роль також і у принципі максимуму для аналітичних функцій з простору $E_p(\Omega),\ p > 0$. А саме, як показали В. І. Смірнов [8] (див. також [1, с. 260]) і П. Дюрен [9], для аналітичних функцій простору $E_p(\Omega)$, які мають граничні значення з простору $L_\infty(\Gamma)$, принцип максимуму виконується тоді і тільки тоді, коли Ω є областю Смірнова.

Як вперше показали М. В. Келдиш і М. О. Лаврентьєв [10] (див. також [1, с. 229]), існують обмежені однозв'язні області зі спрямлюваними жордановими межами, які не є областями Смірнова.

Теорема 1. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею. Для того щоб рівність* (1) *виконувалась для будь-якої функції $f \in E_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, а рівність* (6) *— для будь-якої функції $f \in E_p(\Omega)$, $p > 0$, такої, що її граничні значення f належать $L_\infty(\Gamma)$, необхідно, щоб область Ω була областю Смірнова.*

Наступне твердження потрібне для доведення теореми 1, проте воно має й самостійний інтерес.

Лема 1. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею, f — функція, аналітична в Ω, яка має кутові граничні значення на Γ з простору $L_\infty(\Gamma)$. Якщо можна вказати таку послідовність функцій $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, що*:

1) $f_n \in E_\infty(\Omega),\ n = \overline{1,\infty}$;
2) *в кожній точці $z \in \Omega$ $\quad f_n(z) \to f(z)$ при $n \to \infty$;*

3) *граничні значення* f_n *на межі* Γ *збігаються при* $n \to \infty$ *до граничних значень* f *у слабкій топології простору* $L_\infty(\Gamma)$,
то модуль функції f *не досягає свого найбільшого значення всередині області* Ω *і*

$$|f(z)| \leq \|f\|_{L_\infty(\Gamma)} \quad \forall z \in \Omega,$$

до того ж якщо хоча б в одній точці $z \in \Omega$ *виконується рівність, то* $f \equiv \mathrm{const}$.

***Наслідок* 1.** *Нехай* Ω *— обмежена однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею. Якщо для будь-якої функції* $f \in E_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *яка має граничні значення з* $L_\infty(\Gamma)$, *виконуються усі умови леми* 1, *то* Ω *— область Смірнова.*

***Доведення леми* 1.** Нехай $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — послідовність, яка задовольняє умови 1–3, z — довільна точка в Ω і φ — будь-яке конформне відображення Ω на $\mathbb{D}$. Тоді функція

$$\varphi_z(\cdot) = \frac{\varphi(\cdot) - \varphi(z)}{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(\cdot)}$$

здійснює конформне відображення Ω на $\mathbb{D}$ так, що $\varphi_z(z) = 0$. Нехай ψ_z — конформне відображення, обернене до φ_z. Тоді для кожної функції f_n, $n = 1, 2, \ldots$, внаслідок того, що $f_n \circ \psi_z \in H_\infty$, за теоремою про середнє справджується рівність

$$f_n(z) = (f_n \circ \psi_z)(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} (f_n \circ \psi_z)(w) \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f_n(\zeta) \frac{\varphi_z'(\zeta)}{\varphi_z(\zeta)} d\zeta = \int\limits_{\Gamma} f_n(\zeta) |\varphi_z'(\zeta)| d\sigma(\zeta), \tag{7}$$

де

$$d\sigma(\zeta) = \frac{\varphi_z'(\zeta)}{2\pi i |\varphi_z'(\zeta)| \varphi_z(\zeta)} d\zeta \geq 0 \qquad \text{і} \qquad \int\limits_{\Gamma} d\sigma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} |\psi_z'(w)| \frac{dw}{w} = 1.$$

На підставі умов 2 і 3 граничним переходом при $n \to \infty$ в рівностях (7) отримуємо формулу

$$f(z) = \int\limits_{\Gamma} f(\zeta) |\varphi_z'(\zeta)| d\sigma(\zeta) \quad \forall z \in \Omega.$$

Звідси маємо оцінку

$$|f(z)| \leq \int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)| |\varphi_z'(\zeta)| d\sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} |f(\zeta) \varphi'(\zeta)| \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{\left|1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(\zeta)\right|^2} d\sigma(\zeta) \leq \|f\|_{L_\infty(\Gamma)} \quad \forall z \in \Omega. \tag{8}$$

Оскільки останній інтеграл є гармонічною мажорантою субгармонічної функції $|f|$, то за принципом максимуму для субгармонічних функцій усі рівності в (8) можливі лише у випадку, коли $f \equiv \mathrm{const}$.

***Доведення теореми* 1.** Нехай f — довільна функція з $E_p(\Omega)$. Покладемо $f_\varrho = \sum_{k=0}^\infty \varrho^k \widehat{f}_{k,p} F_{k,p}$. Для даного $\varepsilon > 0$ виберемо $\varrho \in (0,1)$ так, щоб $\|f - f_\varrho\|_{E_p(\Omega)} < \epsilon$. Оскільки функція f_ϱ є аналітичною в області $\Omega_{1/\varrho}$, то за теоремою Уолша (див., наприклад, [11, с. 53]) знайдеться алгебраїчний многочлен P_ϱ такий, що $\|f_\varrho - P_\varrho\|_{A(\overline{\Omega})} \le \varepsilon$ і тим більше $\|f_\varrho - P_\varrho\|_{E_p(\Omega)} < \epsilon$. Тому

$$\|f - P_\varrho\|_{E_p(\Omega)} \le \|f - f_\varrho\|_{E_p(\Omega)} + \|f_\varrho - P_\varrho\|_{E_p(\Omega)} < 2\varepsilon.$$

Отже, множина алгебраїчних многочленів є щільною в $E_p(\Omega)$, звідки й випливає за теоремою В. І. Смірнова, що Ω — область Смірнова.

Нехай тепер f — довільна функція з $E_p(\Omega)$ така, що її граничні значення належать $L_\infty(\Gamma)$. Покладемо

$$f_n(z) = A_{\varrho,\infty}(f)(z), \quad z \in \Omega,$$

де $\varrho = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Зрозуміло, що функції f_n належать $A(\overline{\Omega}),\ n = 1, 2, \ldots,$ і

$$|f_n(z)| = |A_\varrho(f)(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{T}} (f \circ \Psi)(w) \frac{\Psi'(w/\varrho)}{\Psi(w/\varrho) - z} dw\right| \le$$

$$\le \frac{\|f\|_\infty}{d(n)} < \infty \quad \forall z \in \overline{\Omega},$$

де $d(n)$ — відстань від кривої Γ до лінії рівня $\Gamma_{1-1/n}$.

Збіжність $f_n(z) \to f(z)$ при $n \to \infty$ в області Ω випливає зі співвідношення

$$|f(z) - f_n(z)| \le \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left|\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} - \frac{\Psi'(w/\varrho)}{\Psi(w/\varrho) - z}\right| |dw| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

за теоремою Ф. Ріса (див., наприклад, [1, с. 89]) на підставі того факту, що для будь-якого фіксованого $z \in \Omega$ функція $w \mapsto \Psi'(w)/(\Psi(w) - z)$ належить простору Гарді $H_1(\mathbb{D}^-)$.

Отже, якщо до того ж для функції f виконується й рівність (6), то послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ задовольняє одночасно всі умови леми 1.

Внаслідок довільності функції f за наслідком 1 це означає, що Ω — область Смірнова.

3. Нехай $f \in L_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$. Покладемо

$$M_p(f) := M_p(f, \Omega) := \sup_{0<\varrho<1} \left(\int\limits_\Gamma |A_{\varrho,p}(f)(z)|^p \, |dz|\right)^{1/p}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\Omega = \mathbb{D}$

$$M_p(f) = \sup_{0<\varrho<1} \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(\varrho z)|^p \, |dz|\right)^{1/p},$$

і за означенням f належить H_p тоді і тільки тоді, коли $M_p(f) < \infty$.

Природно виникає питання: чи збережеться така характеристична властивість функціоналів $M_p(\cdot)$ і для функцій із простору Смірнова?

Нагадаємо наступне означення. *Спрямлювана жорданова крива* Γ *називається регулярною, якщо існує стала* $K > 0$ *така, що для будь-якого* $\zeta \in \Gamma$ *і* $r > 0$ *довжина тієї її частини, яка міститься у крузі* $\{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| \le r\}$, *не перевищує числа* Kr.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* Ω — *обмежена однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею* Γ. *Наступні твердження є рівносильними*:

1) Γ — *регулярна крива*;

2) $C(f) \in E_p(\Omega)$ *для будь-якої функції* $f \in L_p(\Gamma)$;

3) $M_p(f) < \infty$ *для будь-якої функції* $f \in L_p(\Gamma)$.

Рівносильність тверджень 1 і 2 – це відоме твердження Г. Давіда [12] (теорема 3).

Доведення імплікації 1) $\Longrightarrow$ 3). Покладемо

$$G_\varrho(f)(\zeta) := G_{\varrho,p,\Omega}(f)(\zeta) := (\Phi'(\zeta))^{1/p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varrho^{|k|} \widehat{f}_{k,p} \left(\Phi(\zeta)\right)^k, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Зрозуміло, що $G_\varrho(f) \in L_p(\Gamma)$ і згідно з (2)

$$A_{\varrho,p}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma G_\varrho(f)(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \forall z \in \Omega, \quad 0 \le \varrho < 1.$$

Оскільки у випадку регулярних кривих граничні значення інтеграла типу Коші для будь-якої функції з $L_p(\Gamma)$ існують майже скрізь на Γ, то за теоремою Привалова [1, с. 188] для майже всіх $z \in \Gamma$

$$A_{\varrho,p}(f)(z) = C(G_\varrho(f))(z) + \frac{1}{2} G_\varrho(f)(z), \tag{9}$$

де $C(G_\varrho)(f)$ — сингулярний інтеграл типу Коші функції $G_\varrho(f)$.

Згідно з [12] існує число $K > 0$, незалежне від ϱ і таке, що $\|C(G_\varrho(f))\|_{L_p(\Gamma)} \le$ $\le K \|G_\varrho(f)\|_{L_p(\Gamma)}$. Тут і далі символом K позначено константи в нерівностях, які можуть бути різними для кожного окремого випадку.

Для $L_p(\Gamma)$-оцінки другого доданка в правій частині (9) виконаємо заміну змінних інтегрування і зауважимо, що сума ряду $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varrho^{|k|} \widehat{f}_{k,p} w^k$, $w \in \mathbb{T}$, є інтегралом Пуассона функції $f \circ \Psi \cdot (\Psi')^{1/p}$. Тому

$$\|G_\varrho(f)\|_{L_p(\Gamma)}^p = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varrho^{|k|} \widehat{f}_{k,p} w^k \right|^p |dw| \le$$

$$\le \left\| f \circ \Psi \cdot (\Psi')^{1/p} \right\|_{L_p(\mathbb{T})}^p = \|f\|_{L_p(\Gamma)}^p \quad \forall \varrho \in [0, 1).$$

Отже,

$$M_p(f) \le K \|f\|_{L_p(\Gamma)}.$$

***Доведення імплікації* 3) $\Longrightarrow$ 2).** Нехай $\varrho, r \in (0, 1)$ і ψ — будь-яке конформне відображення круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Покладемо для зручності $g_\varrho = A_{\varrho,p}(f)$. Відомо (див., наприклад, [1, с. 204]), що $g_\varrho \in E_p(\Omega) \Leftrightarrow g_\varrho \circ \psi \cdot (\psi')^{1/p} \in H_p$. З останнього випливає низка нерівностей

$$\int\limits_{\Gamma_r} |A_{\varrho,p}(f)(z)|^p \, |dz| = \int\limits_{\mathbb{T}} |(g_\varrho \circ \psi)(rw)|^p |\psi'(rw)| |dw| \le$$

$$\le \sup_{0<r<1} \int\limits_{\mathbb{T}} |(g_\varrho \circ \psi)(rw)|^p |\psi'(rw)| |dw| =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} |(g_\varrho \circ \psi)(w)|^p |\psi'(w)||dw| =$$

$$= \int_{\Gamma} |A_{\varrho,p}(f)(z)|^p \, |dz| \leq M_p^p(f) < \infty.$$

Згідно з твердженням 2 $A_{\varrho,p}(f) \rightrightarrows f$ в області Ω. Тому, переходячи до границі при $\varrho \to 1-$ у вищенаведених нерівностях, за лемою Фату отримуємо співвідношення

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p \, |dz| \leq M_p^p(f) < \infty \quad \forall r \in (0,1),$$

з якого й випливає, що $f \in E_p(\Omega)$.

***Зауваження* 1.** Імплікація $f \in E_p(\Omega) \Longrightarrow M_p(f) < \infty$, взагалі кажучи, не має місця для областей Ω, які не є областями Смірнова (області з регулярними межами складають підклас областей Смірнова). Це видно з такого прикладу. Нехай $f = (\varphi')^{1/p}$, де φ — конформне відображення Ω на $\mathbb{D}$ і $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність функцій, які означаються формулою

$$f_n(z) = A_{\varrho,p}(f)(z), \quad z \in \Omega, \quad \varrho = 1 - 1/n.$$

Зрозуміло, що $f \in E_p(\Omega)$, $f_n \in A(\overline{\Omega})$ і згідно з твердженням 1 $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $n \to \infty$, в області Ω. Якщо припустити до цього, що й $M_p(f) < \infty$, то будуть виконані всі умови теореми 15.3.1 в [1, с. 253], за якою Ω є областю Смірнова.

***Зауваження* 2.** Якщо Γ — регулярна крива, то за теоремою Привалова згідно з рівністю (9) для будь-якої функції $f \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, маємо

$$f(z) - A_{\varrho,p}(f)(z) = \frac{1}{2}\Big(f(z) - G_\varrho(f)(z)\Big) + C\Big(f - G_\varrho(f)\Big)(z)$$

для майже всіх $z \in \Gamma$. Звідси на основі фактів, викладених в доведенні імплікації $1) \Rightarrow 3)$, отримуємо нерівність

$$\|f - A_{\varrho,p}(f)\|_{L_p(\Gamma)}^p \leq \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| (f \circ \Psi)(w)(\Psi'(w))^{1/p} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varrho^{|k|} \widehat{f}_{k,p} w^k \right|^p |dw|,$$

з якої випливає співвідношення (1).

4. Нехай $\theta(s)$ — кут між додатним напрямком дійсної осі і дотичною до гладкої кривої Γ у точці M, яка по довжині дуги на кривій Γ знаходиться на відстані s від фіксованої точки кривої.

Спрямлювана гладка крива Γ *називається кривою Альпера, якщо модуль неперервності* $\omega(t,\theta)$ *функції* $\theta(\cdot)$ *задовольняє умову*

$$\int_0^1 \omega(t,\theta) \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} \, dt < \infty.$$

Теорема 3. *Нехай* Ω *— обмежена однозв'язна область, межею якої є крива Альпера. Тоді для будь-якої функції* $f \in E_1(\Omega)$ *справджується рівність* (1) *і* $M_1(f) < \infty$.

Доведення теореми ґрунтується на наступних твердженнях, в яких використано такі позначення:

$$g_\varrho(w) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(e^{it})\frac{1-\varrho^2}{|1-\varrho e^{-it}w|^2}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\varrho^{|k|}\widehat{g}_k w^k, \quad w\in\mathbb{T}, \quad g\in L_1(\mathbb{T}),$$

і

$$F(w,\zeta) := \frac{\Psi'(w)\zeta}{\Psi(w)-\Psi(\zeta)} - \frac{\zeta}{w-\zeta}.$$

Лема 2. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область зі спрямлюваною жордановою межею і $R>1$. Тоді для будь-якої функції $f\in E_1(\Omega)$ у майже всіх точках $w\in\mathbb{T}$ справджуються рівності*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{R^k}\widehat{f}_{k,1}F_{k,1}(\Psi(w))\Psi'(w) =$$

$$= (f\circ\Psi\cdot\Psi')_{1/R}(w) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} f\circ\Psi(\zeta)\Psi'(\zeta)(F(Rw,\zeta)-F(w,R\zeta))\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{10}$$

Доведення. На основі розвинення (3) маємо рівність

$$\frac{R}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}(f\circ\Psi)(\zeta)\Psi'(\zeta)\left(\frac{\Psi'(w)}{\Psi(R\zeta)-\Psi(w)} - \frac{1}{R\zeta - w}\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{R^k}\widehat{f}_{k,1}F_{k,1}(\Psi(w))\Psi'(w) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{R^k}\widehat{f}_{k,1}w^k,$$

а на основі теореми Смірнова [1, c. 205] — рівність

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}(f\circ\Psi)(\zeta)\Psi'(\zeta)\left(\frac{\Psi'(Rw)}{\Psi(\zeta)-\Psi(Rw)} - \frac{1}{\zeta - Rw}\right)d\zeta =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{(f\circ\Psi)(\zeta)\Psi'(\zeta)}{\zeta - Rw}d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{R^k}\widehat{f}_{-k,1}w^{-k} \quad \forall R>1.$$

Віднявши від першої рівності другу, після елементарних перетворень отримаємо (10).

Лема 3. *Нехай Ω — обмежена однозв'язна область, межею якої є крива Альпера. Тоді*

$$\sup_{1<R\le 2}\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\|F(R\cdot,\zeta)\|_{L_1(\mathbb{T})} < \infty, \tag{11}$$

$$\sup_{1<R\le 2}\sup_{w\in\mathbb{T}}\|F(w,R\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} < \infty, \tag{12}$$

$$\sup_{1<R\le 2}\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\|F(\cdot,R\zeta)\|_{L_1(\mathbb{T})} < \infty \tag{13}$$

і для будь-якого $\zeta\in\mathbb{T}$

$$\lim_{R\to 1+}\big\|F(R\cdot,\zeta)-F(\cdot,R\zeta)\big\|_{L_1(\mathbb{T})} = 0. \tag{14}$$

Доведення. Співвідношення (11) по суті доведене в [13]. Для доведення (12) і (13) нагадаємо такі факти.

В [14, 15] (див. також [16], гл. VIII, § 1) показано, що за умов леми 3 похідна Ψ' є неперервною і відмінною від нуля в замкненій області $\mathbb{T} \cup \mathbb{D}^-$, а її модуль неперервності

$$\omega(t, \Psi') := \sup \left\{ |\Psi'(w) - \Psi'(\zeta)| : \ w, \zeta \in \mathbb{T} \cup \mathbb{D}^-, \ \ |w - \zeta| \le t \right\}$$

в цій області задовольняє умову

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(t, \Psi')}{t} dt < \infty. \tag{15}$$

Зрозуміло, що внаслідок цього існують дві сталі K_1 і K_2 такі, що

$$0 < K_1 \le |\Psi'(w)| \le K_2 < \infty \quad \forall w \in \mathbb{T} \cup \mathbb{D}^- \tag{16}$$

і, як наслідок останнього, існують дві сталі K_3 і K_4 такі, що

$$0 < K_3 \le \frac{|\Psi(w) - \Psi(\zeta)|}{|w - \zeta|} \le K_4 < \infty \quad \forall w, \quad \zeta \in \mathbb{T} \cup \mathbb{D}^-. \tag{17}$$

Повертаючись до доведення (12), зазначимо, що для будь-яких $w, \zeta \in \mathbb{T}$ і $R > 1$ справджується рівність

$$\Psi'(w)(w - R\zeta) - (\Psi(w) - \Psi(R\zeta)) =$$
$$= \int\limits_{R\zeta}^{w} (\Psi'(w) - \Psi'(\tau)) d\tau = - \left(\int\limits_{\gamma} + \int\limits_{I} \right) (\Psi'(w) - \Psi'(\tau)) d\tau,$$

в якій інтегрування проводиться вздовж кривої, яка складається з меншої дуги $\gamma := \overset{\frown}{(z_1, z_2)}$ кола $\mathbb{T}$, що з'єднує точки $z_1 = w$ і $z_2 = \zeta$, та відрізка $I := I[z_2, z_3]$, що з'єднує точки z_2 і $z_3 = R\zeta$. На основі цієї рівності та співвідношень (16) і (17) для будь-яких $w, \zeta \in \mathbb{T}$ і $R \in (1, 2]$ отримуємо оцінку

$$|F(w, R\zeta)| = R \frac{|\Psi'(w)(w - R\zeta) - (\Psi(w) - \Psi(R\zeta))|}{|w - R\zeta|^2} \frac{|w - R\zeta|}{|\Psi(w) - \Psi(R\zeta)|} \le$$
$$\le \frac{2}{K_3} \frac{|\Psi'(w)(w - R\zeta) - (\Psi(w) - \Psi(R\zeta))|}{|w - R\zeta|^2} \le$$
$$\le \frac{2}{K_3 |w - \zeta|^2} \int\limits_{\gamma} |\Psi'(w) - \Psi'(\tau)| |d\tau| + \frac{4K_2}{K_3} \frac{R - 1}{|w - R\zeta|^2} \le$$
$$\le \frac{2\omega\left(|1 - \overline{w}\zeta|, \Psi'\right)}{K_3 |1 - \overline{w}\zeta|} + \frac{12K_2}{K_3} \frac{R^2 - 1}{|1 - R\overline{w}\zeta|^2}.$$

Інтегруванням останніх нерівностей відносно w переконуємось у правильності (12), а інтегруванням відносно ζ — у правильності (13).

Покажемо тепер, що для будь-яких $w, \zeta \in \mathbb{T}$ і $R > 1$ справджується рівність

$$F(Rw, \zeta) - F(w, R\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(F(we^{-it}, \zeta) - F(w, \zeta e^{-it}) \right) \frac{R^2 - 1}{|R - e^{it}|^2} dt. \tag{18}$$

В [15] показано, що

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\|F(\cdot,\zeta)\|_{L_1(\mathbb{T})}<\infty. \tag{19}$$

Дослівним повторенням міркувань, використаних в доведенні цього співвідношення, можна показати, що й

$$\sup_{w\in\mathbb{T}}\|F(w,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})}<\infty.$$

Разом останні два факти доводять існування інтеграла у правій частині (18).

Доведені вище співвідношення (11) і (12) означають, що при кожному фіксованому $\zeta\in\mathbb{T}$ функція $F(\cdot,\zeta)$ є аналітичною в $\mathbb{D}^-$ і належить простору Гарді $H_1(\mathbb{D}^-)$. Її граничні значення існують в усіх точках $w\in\mathbb{T}$, оскільки похідна Ψ' є неперервною в $\mathbb{T}\cup\mathbb{D}^-$, можливо, за винятком точки $w=\zeta$, і збігаються з $F(w,\zeta)$. Аналогічно, при кожному фіксованому $w\in\mathbb{T}$ аналітична в $\mathbb{D}^-$ функція $F(w,\cdot)$ належить простору Гарді $H_1(\mathbb{D}^-)$. Її граничні значення існують в усіх точках $\zeta\in\mathbb{T}$, можливо, за винятком точки $\zeta=w$, і збігаються з $F(w,\zeta)$. Ці факти дозволяють застосувати теорему Фіхтенгольца (див., наприклад, [1, с. 98]) до функцій $F(\cdot,\zeta)$ і $F(w,\cdot)$ відповідно, за якою

$$F(Rw,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(e^{it},\zeta)\frac{R^2-1}{|R-e^{-it}w|^2}dt\quad\forall R>1,\quad w\in\mathbb{T},$$

$$F(w,R\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(w,e^{it})\frac{R^2-1}{|R-e^{-it}\zeta|^2}dt\quad\forall R>1,\quad \zeta\in\mathbb{T}.$$

Виконавши заміни змінних інтегрування в кожному з цих інтегралів і віднявши від першої рівності другу, отримаємо (18).

Оцінюючи праву частину (18) за інтегральною нерівністю Мінковського, отримуємо співвідношення

$$\left\|F(R\cdot,\zeta)-F(\cdot,R\zeta)\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\|F(\cdot e^{-it},\zeta)-F(\cdot,\zeta e^{-it})\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\frac{R^2-1}{|R-e^{it}|^2}dt.$$

Звідси внаслідок δ-подібності ядра Пуассона $(R^2-1)/|R-e^{it}|^2$ безпосередньо випливає (14), оскільки для будь-якого $\zeta\in\mathbb{T}$

$$\left\|F(\cdot e^{-it},\zeta)-F(\cdot,\zeta e^{-it})\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\to 0,\quad t\to 0.$$

Справді, для будь-якого $\zeta\in\mathbb{T}$

$$\left\|F(\cdot e^{-it},\zeta)-F(\cdot,\zeta e^{-it})\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\le$$
$$\le\left\|F(\cdot e^{-it},\zeta)-F(\cdot,\zeta)\right\|_{L_1(\mathbb{T})}+\left\|F(\cdot,\zeta)-F(\cdot,\zeta e^{-it})\right\|_{L_1(\mathbb{T})}.$$

Перший доданок у правій частині нерівності прямує до нуля внаслідок того, що функція $F(\cdot,\zeta)$ належить $L_1(\mathbb{T})$, і відомого твердження про інтегральний модуль гладкості. Прямування до нуля другого доданка доводимо, застосовуючи теорему Лебега про обмежену збіжність на підставі співвідношення (19) і той факт, що для всіх $w\in\mathbb{T}\setminus\{\zeta\}$ $F(w,\zeta)-F(w,\zeta e^{-it})\to 0$, $t\to 0$.

***Доведення теореми* 3.** З формули (10) за допомогою інтегральної нерівності Мінковського легко отримати оцінку

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k \widehat{f}_{k,1} F_{k,1} \right\|_{L_1(\Gamma)} \le \left\| f \circ \Psi \cdot \Psi' - (f \circ \Psi \cdot \Psi')_{1/R} \right\|_{L_1(\mathbb{T})} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |f \circ \Psi(\zeta) \Psi'(\zeta)| \, \|F(R\cdot, \zeta) - F(\cdot, R\zeta)\|_{L_1(\mathbb{T})} \, |d\zeta|,$$

де $\varrho = 1/R$, $R > 1$.

Перший доданок у правій частині цієї нерівності прямує до нуля при $R \to 1+$ за відомою теоремою (див., наприклад, [17, с. 54]). У другому доданку позначимо через $\varphi_R(\zeta)$ підінтегральний вираз. Згідно з лемою 3 $\varphi_R(\zeta) \to 0, R \to 1+$ для всіх точок $\zeta \in \mathbb{T}$, в яких модуль $|f \circ \Psi(\zeta)|$ є величиною скінченною, тобто майже скрізь на $\mathbb{T}$. До того ж для майже всіх $\zeta \in \mathbb{T}$ $\varphi_R(\zeta) \le K |f \circ \Psi(\zeta) \Psi'(\zeta)|$, де стала K є сумою величин у лівих частинах (11) і (13). Отже, за теоремою Лебега про обмежену збіжність і другий доданок прямує до нуля при $R \to 1+$.

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
2. *Кокилашвили В. М.* О приближении аналитических функций класса E_p // Докл. АН СССР. – 1967. – **177**, № 2. – С. 261 – 264.
3. *Дынькин Е. М.* Скорость полиномиальной аппроксимации в $E^p(G)$ // Докл. АН СССР. – 1976. – **231**, № 3. – С. 529 – 531.
4. *Andersson J.-E.* On the degree of polynomial approximation in $E^p(D)$ // J. Approxim. Theory. – 1977. – **19**. – P. 61 – 68.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 508 с.
6. *Tietz H.* Zur Summierbarkeit von Faber – Reihen // Abh. Braunschweig. wiss. Ges. – 1992. – **43**. – S. 35 – 43.
7. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
8. *Смирнов В. И.* Избранные труды: Комплексный анализ. Математическая теория дифракции. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 280 с.
9. *Duren P.* Smirnov domains and conjugate functions // J. Approxim. Theory. – 1972. – **5**. – P. 393 – 400.
10. *Keldysch, Lavrentieff.* Sur la représentation conforme des domaines limites par des courbes rectifiables // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1937. – **54**. – P. 1 – 38.
11. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 508 с.
12. *David G.* Operateurs integraux singulers sur certaines courbex du plan complexe // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1984. – **17**, № 4. – P. 157 – 189.
13. *Савчук М. В.* Підсумовування методом типу Абеля – Пуассона рядів за многочленами Фабера другого роду в інтегральній метриці // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 324 – 333.
14. *Warshawski S.* Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung // Math. Z. – 1932. – **35**. – P. 321 – 456.
15. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – **19**, № 6. – С. 423 – 444.
16. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
17. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 311 с.

Одержано 04.12.09