УДК 517.95

В. П. Бурский (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ ОБЩЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

In a plane bounded domain with smooth boundary, we consider problems of the Fredholm property and well-posedness of a general differential boundary-value problem for the general nonproperly elliptic equation.

У плоскій обмеженій області з гладкою межею розглядаються проблеми фредгольмовості і коректності загальної диференціальної граничної задачі для загального неправильно еліптичного рівняння.

1. Введение. Известно, что математическое моделирование протяженных процессов приводит, как правило, к постановке граничной задачи для дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений. И прежде чем приступать к использованию полученной математической модели, следует убедиться, что граничная задача хорошо поставлена. Исследования корректности граничных задач восходят к Ж. Адамару, впервые заметившему, что зависимость решения задачи Коши для уравнения Лапласа в полуплоскости от начальных данных не является непрерывной. Этот пример позволил Ж. Адамару дать общепринятое сегодня определение корректности линейной граничной задачи

$$Lu = f, \quad Bu|_{\partial\Omega} = g \tag{1.1}$$

с линейными (возможно, матричными) дифференциальными операторами L и B в виде оценки

$$\|u\|_S \leq \|f\|_R + \|g\|_B, \tag{1.2}$$

где S, R и $B-$ банаховы пространства решений и правых частей уравнения и граничных данных соответственно. Неединственность решения граничной задачи (1.1), т. е. существование нетривиального решения $u \in S$ однородной задачи (1.1) с $f = 0,\ g = 0$, означает отсутствие оценки (1.2) и потому некорректность такой граничной задачи.

Во многих случаях не удается доказать корректность, но удается получить свойство фредгольмовости (в советской литературе — нетеровости) граничной задачи, что означает конечномерность ядра и коядра оператора граничной задачи $L_B : S_B \to R$, где S_B — подпространство функций из S таких, что $Bu|_{\partial\Omega} = 0$, а $L_B = L|_{S_B}$. Именно свойство фредгольмовости считается признаком хорошо поставленной граничной задачи для дифференциального уравнения, в котором младшие члены не подчинены специально оговоренным условиям, поскольку, например, спектральные задачи дают многочисленные примеры нарушения единственности решения. Напомним, что критерием фредгольмовости линейной дифференциальной граничной задачи для правильно эллиптического уравнения в ограниченной области является условие Я .Б. Лопатинского (см. ниже).

В настоящей работе получен критерий фредгольмовости линейной дифференциальной граничной задачи для скалярного неправильно эллиптического уравнения в ограниченной области с гладкой границей.

Напомним основные определения.

2. Условие Лопатинского. Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ называется эллиптическим в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если его старший символ $l(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ для всех $x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и правильно (или собственно) эллиптическим в открытой или замкнутой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если m четно, $m = 2k$, и для любого $x \in \Omega$, для каждой пары линейно независимых векторов действительных векторов ξ и η среди корней полинома $l(x, \xi + t\eta)$ от параметра t имеется ровно k корней $t_+^1, t_+^2, \ldots, t_+^k$ с положительной мнимой частью $\operatorname{Im} t_+^j > 0$ и k корней $t_-^1, t_-^2, \ldots, t_-^k$ с отрицательной мнимой частью $\operatorname{Im} t_-^j < 0$. Ясно, что каждый правильно эллиптический линейный дифференциальный оператор является эллиптическим. Отметим, что при $n \geq 3$ каждый эллиптический линейный дифференциальный оператор является правильно эллиптическим, но при $n = 2$ это не так (пример: оператор Коши – Римана $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$), и что то же справедливо для любых n в случае, когда коэффициенты оператора вещественны [1] (см. также [2, 3]).

Пусть даны: ограниченная область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu(x)-$ векторное поле единичной нормали к $\partial\Omega$, заданное в некоторой окрестности границы, линейный дифференциальный оператор L порядка $m = 2k$ и некоторый набор из k линейных дифференциальных операторов $B_j = \sum_{|\beta_j|\leq m_j} b_{j\beta}(x)D^\beta,\ j = 1, \ldots, k$, с гладкими комплекснозначными коэффициентами $b_{j\beta}(x)$, заданными на границе (и которые мы при желании можем считать гладко продолженными на некоторую окрестность границы). При этом граничная задача $Bu|_{\partial\Omega} = g$ из (1.1) записывается в виде

$$B_j u = \sum_{|\beta_j|\leq m_j} b_{j\beta}(x)D^\beta u = g_j, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Говорят, что *набор* $B_j,\ j = 1, \ldots, k$, *нормален на* $\partial\Omega$, если $m_i \neq m_j$ при $i \neq j$ и выполнены условия $\forall x \in \partial\Omega\ \ \forall \nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}:\ \tilde{B}_j(x,\nu) = \sum_{|\beta_j|=m_j} b_{j\beta}(x)\nu^\beta \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Далее, для заданного правильно эллиптического в области Ω оператора L со старшим символом $l(x,\xi)$ для любого $x \in \Omega$ и для каждой пары линейно независимых действительных векторов ξ и η введем полином $l_+(x,\xi,\eta,t)$ одной переменной t, построенный как $l_+(x,\xi,\eta,t) = \prod_{i=1}^k (t - t_+^i(x,\xi,\eta))$, где $t_+^i(x,\xi,\eta)$ – набор корней полинома $l(x,\xi+t\eta)$ одной переменной t, имеющих положительную мнимую часть. Говорят, что *набор* $B_j,\ j = 1, \ldots, k$, *накрывает оператор* L *на* $\partial\Omega$, или что *система операторов* $\{L, B_j\}$ *удовлетворяет условию дополнительности,* или что *граничная задача* (1.1) *с выражениями* (2.1) *удовлетворяет условию Лопатинского в узком смысле*, если для любого $x \in \partial\Omega$, для любого касательного в точке x к $\partial\Omega$ (вещественного) вектора τ и для нормального в точке x к $\partial\Omega$ (вещественного) вектора ν набор полиномов $\tilde{B}_j(x, \tau + t\nu) = \sum_{|\beta_j|=m_j} b_{j\beta}(x)(\tau + t\nu)^\beta,\ j = 1, \ldots, k$, одной переменной t является линейно независимым по модулю полинома $l_+(x,\tau,\nu,t)$, т. е. никакая линейная комбинация полиномов одной переменной $\tilde{B}_j(x, \tau + t\nu)$, $j = 1, \ldots, k$, не делится на $l_+(x,\tau,\nu,t)$.

Говорят, что *граничная задача* (1.1) *с выражениями* (2.1) *регулярна* или что она *удовлетворяет условию Лопатинского* (в широком смысле), если [2]:

1) оператор L правильно эллиптический в области Ω,

2) набор $B_j,\ j = 1, \ldots, k$, нормален на $\partial\Omega$ и $0 \leq m_j \leq 2k - 1$,

3) набор B_j, $j = 1, \ldots, k$, накрывает оператор L на $\partial\Omega$.

Условие Лопатинского в различных его формах было введено в 1953 г. как достаточное условие сводимости граничной задачи (1.1) с выражениями (2.1) к системе интегральных уравнений [1]. Позже было показано, что это условие является и необходимым [4] (точнее, что условие 3 при выполнении условий 1, 2 необходимо для фредгольмовости оператора граничной задачи). Независимо и почти одновременно это же условие, используемое с той же целью, но для частного случая, было опубликовано представительницей московской школы З. Я. Шапиро, поэтому часто условие Лопатинского называют условием Шапиро – Лопатинского. Это же условие часто называют условием регулярности граничной задачи, условием дополнительности, условием согласования или условием накрывания. Наиболее часто условие Лопатинского используется в форме априорных оценок в пространствах Соболева W_p^q и Бесова B_p^q или в классических пространствах Гельдера $C^{q+\gamma}$. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [2, 4]. *Если граничная задача* (1.1) *вида* (2.1) *удовлетворяет условию Лопатинского, то для любого $q \geq 2k$ и $p > 1$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждой $u \in W_p^q(\Omega)$ выполнена оценка (называемая оценкой коэрцитивности)*

$$\|u\|_{W_p^q(\Omega)} \leq C\left(\|Lu\|_{W_p^{q-2k}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|B_j u\|_{B_p^{q-m_j-1/p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)}\right). \qquad (2.2)$$

Наоборот, если для правильно эллиптического уравнения задана граничная задача (1.1) *вида* (2.1) *с нормальным набором B_j и выполнена оценка* (2.2) *для каких-нибудь $q \geq 2k$ и $p > 1$, то набор B_j, $j = 1, \ldots, k$, накрывает оператор L на $\partial\Omega$, т. е. выполнено условие Лопатинского. Вместо* (2.2) *можно использовать оценку* (*называемую шаудеровской оценкой, здесь $0 < \gamma < 1$ — любое, q — неотрицательное целое число*)

$$\|u\|_{C^{q+\gamma}(\Omega)} \leq C_{q+\gamma}\left(\|Lu\|_{C^{q-2k+\gamma}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|B_j u\|_{C^{q-m_j+\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_{C(\Omega)}\right). \qquad (2.3)$$

Из теоремы 1 непосредственно следует фредгольмовость оператора рассматриваемой граничной задачи $L_{B,\,q} : W_p^q(\Omega) \to W_p^{q-2k}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k} B_p^{q-m_j}(\partial\Omega)$ и, аналогично, фредгольмовость оператора в классических пространствах. Здесь под фредгольмовостью мы понимаем конечномерность и ядра, и коядра, а индекс задачи есть разность их размерностей.

3. Некоторые факты общей теории. Пусть $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $\quad a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\ D^\alpha = \dfrac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ — дифференциальная операция общего вида с $(j \times l)$-матрицами a_α, элементами которых являются гладкие комплекснозначные функции, и Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Операция $\mathcal{L}$ порождает формально сопряженную операцию $\mathcal{L}^+ = \sum_{|\alpha|\leq l} D^\alpha (a_\alpha^*(x)\ \cdot)$, где $a_\alpha^*(x)$ — сопряженная матрица. Минимальный оператор L_0, определяемый как замыкание оператора $\mathcal{L}$, первоначально заданного на $C_0^\infty(\Omega)$, в норме графика $\|u\|_L^2 = \|u\|^2_{L_2^j(\Omega)} + \|\mathcal{L}u\|^2_{L_2^l(\Omega)}$ и аналогичный минимальный оператор L_0^+ порождают максимальные операторы $L = (L_0^+)^*, L^+ = L_0^*$ с помощью сопряжения в гильбертовых пространствах. Области определения $D(L_0), D(L_0^+), D(L), D(L^+)$ этих операторов являются гильбертовыми пространствами в соответствующей норме графика.

Введем (см. [5]) граничное пространство $C(L) = D(L)/D(L_0)$, а также фактор-отображение $\Gamma : D(L) \to C(L)$ и аналогично $C(L^+) = D(L^+)/D(L_0^+)$ и $\Gamma^+ : D(L^+) \to C(L^+)$. Рассмотрим следующие условия [6]):

i) оператор $L_0 : D(L_0) \to L_2^l(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный;

ii) оператор $L_0^+ : D(L_0^+) \to L_2^j(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный.

Заметим, что условие ii) равносильно сюрьективности оператора $L : D(L) \to$ $\to L_2^l(\Omega)$, а условие i) — сюрьективности оператора $L^+ : D(L^+) \to L_2^j(\Omega)$.

Однородной граничной задачей [5, 6] называется задача нахождения решения соотношений

$$Lu = f, \quad \Gamma u \in B, \tag{3.1}$$

где B — линейное подпространство в пространстве $C(L)$, определяющее граничную задачу. Задача (3.1) называется корректной, если оператор $L_B = L|_{D(L_B)}$, $D(L_B) = \Gamma^{-1}B$ является разрешимым расширением оператора L_0, т. е. если оператор $L_B : D(L_B) \to L_2^l(\Omega)$ имеет непрерывный обратный (который является правым обратным к L). Известно [6] (в интерпретации [5]), что оператор L_0 имеет разрешимое расширение (и для оператора L существует корректная граничная задача (3.1)) тогда и только тогда, когда выполнены условия i) и ii). Сопряженной к (3.1) называется граничная задача

$$L^+v = g, \quad \Gamma^+v \in B^+,$$

где пространство $B^+ = \Gamma^+ D(L_{B^+}^+) \subset C(L^+) = D(L^+)/D(L_0^+)$ и область определения $D(L_{B^+}^+) = \{v \in D(L^+) | \ \forall u \in \Gamma^{-1}(B), [u,v] = 0\}$ соответствующего расширения $L_{B^+}^+ = L^+|_{D(L_{B^+}^+)}$ минимального оператора L_0^+ порождены формой Грина

$$[u,v] = \int\limits_{\Omega} (Lu \cdot \bar{v} - u \cdot \overline{L^+v})\, dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(m-k-1)} u \, \partial_\nu^k \overline{v}(s)\, ds_x$$

с некоторыми линейными дифференциальными выражениями $L_{(p)}u$ порядка p.

Граничную задачу (3.1) будем называть дифференциальной и говорить, что граничное условие $\Gamma u \in B$ записано в виде

$$B_j u = \sum_{|\beta_j| \le m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta u = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{3.2}$$

где $b_{j\beta}(x)$ — гладкие функции на $\partial\Omega$, если область определения $D(L_B)$ расширения L_B получена замыканием в норме графика $\|\cdot\|_L$ линейного пространства гладких функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих на границе условиям (3.2).

Теорема 2. *Если граничная задача* (3.1) *дифференциальна, т. е. задана выражениями* (3.2), *и набор B_j нормален, то сопряженная граничная задача также дифференциальна, т. е. может быть задана выражениями типа* (3.2):

$$B_j^+ u = \sum_{|\beta_j| \le m_j} b_{j\beta}^+(x) D^\beta u = 0, \quad j = 1, \ldots, m-k, \tag{3.3}$$

с гладкими $b_{j\beta}^+$ и набор B_j^+ нормален.

Доказательство. В книге [2] (теорема 2.1 гл. 2) приводится доказательство этого факта для случая $k = m$, но при этом ограничение $k = m$ нигде в доказательстве этой теоремы не используется (хотя и является существенным в следствиях). Поэтому мы лишь отметим, что нужное доказательство получится некоторым изменением обозначений в доказательстве указанной теоремы из [2].

Рассмотрим теперь обобщенные постановки граничных задач. Ниже будут рассмотрены граничные задачи в обобщенной постановке для уравнений вида

$$\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}\, u = f \tag{3.4}$$

и их связь с теорией расширений операторов L и L^+ (подробности см. в [7]). Задача (3.1) порождает следующую граничную задачу для уравнения (3.4):

найти функцию $u \in D(L_B)$, называемую обобщенным решением этой задачи, такую, что для любой $v \in D(L_B)$ выполнено интегральное тождество

$$\langle L_B\, u,\, L_B\, v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad f \in D'(L_B), \tag{3.5}$$

которое можно понимать как задачу решения уравнения $Qu := L'_B \circ L_B\, u = f$, где $L'_B \,:\, L_2^l(\Omega) \to D'(L_B)-$ дуальный оператор в сопряженных оснащенных пространствах [3].

Если функция u такова, что $Lu \in D(L^+)$, то граничное условие здесь можно записать в виде $\Gamma u \in B,\ \Gamma^+ \mathcal{L}u \in B^+$, и если задача (1.1) дифференциальная, а граничное условие записано как (2.1) с $g_j = 0$, то в силу теоремы 2 граничное условие в задаче (3.5) (для уравнения (3.4)) будет иметь вид

$$B_j^+ \mathcal{L}u = \sum_{|\beta_j| \le m_j} b_{j\beta}^+(x) D^\beta \mathcal{L}u = 0, \quad j = 1, \ldots, m - k. \tag{3.6}$$

Задачу (3.5) естественно назвать задачей Дирихле, если $B = \{0\}$ (т. е. $\Gamma u = 0$, условие $\Gamma^+ \mathcal{L}u \in B^+$ опускается), и задачей Неймана, если $B = C(L)$ (т.е. $\Gamma^+ \mathcal{L}u = 0$, условие $\Gamma u \in B$ опускается), как это принято в обобщенных постановках для эллиптических уравнений.

Ясно, что пространство $\operatorname{Im} Q \subset D'(L_B)$ ортогонально ядру $\ker L_B \in D(L)$ через скалярное произведение центрального пространства $L_2^j(\Omega)$. Задачу (3.5) назовем *нормально разрешимой*, если пространство $\operatorname{Im} Q \subset D'(L_B)$ совпадает с пространством K, ортогональным к ядру $\ker L_B$, и существует непрерывный оператор $R : K \to D(L_B)$, правый обратный к оператору $Q : D(L_B) \to K$. Задачу (3.5) назовем *корректной*, если оператор $Q : D(L_B) \to D'(L_B)$ имеет непрерывный двусторонний обратный Q^{-1}.

Теорема 3. 1. *Задача* (3.5) *нормально разрешима тогда и только тогда, когда оператор* L_B *нормально разрешим.*

2. *Задача* (3.5) *корректна тогда и только тогда, когда она нормально разрешима и ядро* $\ker L_B$ *тривиально.*

3. *Задача* (3.5) *фредгольмова тогда и только тогда, когда оператор* L_B *нормально разрешим и ядро* $\ker L_B$ *конечномерно, в этом случае ее индекс равен нулю.*

Доказательство. 1. Пусть оператор L_B нормально разрешим, т. е. его образ замкнут, и пусть мы построили прямое разложение $D(L) = \ker L \oplus E$ с некоторым линейным замкнутым подпространством E, что возможно в силу гильбертовости $D(L)$ и замкнутости $\ker L$. Тогда оператор $M = p_{\operatorname{Im} L_B} \circ L_B \circ i_E$, где $i_E : E \to D(L_B)$ – вложение, а $p_{\operatorname{Im} L_B} : L_2^l(\Omega) \to \operatorname{Im} L_B$ – ортопроекция, осуществляет изоморфизм (в категории линейных топологических пространств) между пространствами E и $\operatorname{Im} L_B$, а потому дуальный оператор $M' : \operatorname{Im} L_B \to E'$ – изоморфизм. Значит, оператор $R = (M'M)^{-1}$ является правым обратным к Q. Кроме того, пространство E' является прямым слагаемым в сопряженном прямом разложении $D'(L_B) = (\ker L_B)' \oplus E'$, откуда следует, что E' замнуто в $D'(L_B)$. Осталось заметить, что $E' = \operatorname{Im} L'_B = \operatorname{Im} Q = K$, поскольку, как отмечалось выше, $M' = i'_E \circ L'_B \circ p'_{\operatorname{Im} L_B}$ – изоморфизм. Здесь $p'_{\operatorname{Im} L_B} : \operatorname{Im} L_B \to L_2^l(\Omega)$ – вложение, а $i'_E : D'(L_B) \to E'$ – проекция.

Наоборот, пусть задача (3.5) нормально разрешима. Если теперь последовательность $u_n \in \operatorname{Im} L_B$ сходится к некоторому $v \in L_2^l(\Omega)$, то, применяя к ней непрерывный оператор $\tilde{R} = L_B \circ R \circ L'_B$, получаем последовательность $v_n \in \operatorname{Im} L_B$, которая должна совпадать с u_n. Действительно, $L'_B u_n = L'_B v_n$, поэтому $u_n - v_n \in \ker L'_B$, но образ $\operatorname{Im} L_B$, в котором находятся элементы u_n и v_n, ортогонален ядру $\ker L'_B$. Итак, $u_n = v_n$. Но тогда $v_n \to v$ и $v = \tilde{R} v \in \operatorname{Im} L_B$, т. е. образ $\operatorname{Im} L_B$ замкнут.

Второе утверждение следует из п. 1 и определений.

Третье утверждение следует из п. 1 и того факта, что $\dim \ker L_B = \dim (\ker L_B)'$.

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекают полезные следствия.

***Следствие* 1.** *Задача Дирихле* (3.5) (*где* $D(L_B) = D(L_0)$) *корректна тогда и только тогда, когда выполнено условие Вишика* i).

Доказательство. Условие Вишика i) означает, что для финитных u выполнена априорная оценка $\|u\|_{L_2^j(\Omega)} \leq C\|Lu\|_{L_2^l(\Omega)}$, откуда следует и тривиальность ядра, и замкнутость образа оператора L_0. Осталось применить п. 2 теоремы. Обратное очевидно.

***Следствие* 2.** *Задача Неймана* (3.5) (*где* $D(L_B) = D(L)$) *нормально разрешима тогда и только тогда, когда оператор* L *нормально разрешим; в частности, это так, если выполнено условие Вишика* ii) (*в этом случае* $\operatorname{Im} L = L_2^l(\Omega)$).

***Пример* 1.** Рассмотрим обобщенную задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f : \mathcal{L} = \operatorname{grad}, \mathcal{L}^+ = \operatorname{div}, D(L) = W_2^1(\Omega), D(L_0) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), f \in [\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)]'$. Согласно следствию 1 в этом случае обобщенная задача Дирихле корректна, если и только если в области Ω выполняется неравенство Фридрихса $\|\nabla u\| \geq C\|u\| \ \ \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$, которое равносильно условию i) для оператора ∇ и выполнено в любой ограниченной области.

***Пример* 2.** Рассмотрим обобщенную задачу Неймана для уравнения Пуассона. Из следствия 2 вытекает, в частности, что эта задача нормально разрешима в области Ω с конечномерным пространством первых вещественных когомологий (например, в области с гладкой границей). Действительно, в этом случае по теореме де Рама замкнутое в $L_2^l(\Omega)$ ядро непрерывного оператора rot (= внешний дифференциал d_1) шире образа оператора grad (= внешний дифференциал d_0) на конечномерное пространство, поэтому пространство потенциальных векторных полей $\nabla W_2^1(\Omega)$ замкнуто в $L_2^l(\Omega)$. При этом ядро $\ker L = \ker \nabla$ одномерно и состоит из констант.

4. Фредгольмовость общей граничной задачи для неправильно эллиптических уравнений. Наряду с граничной задачей (3.5) в обобщенной постановке рассмотрим также похожую задачу:

найти функцию $v \in D(L^+_{B+})$, называемую обобщенным решением этой задачи, такую, что для любой $w \in D(L^+_{B+})$ выполнено интегральное тождество

$$\langle L^+_{B+}\, u,\, L^+_{B+}\, v\rangle = \langle f, v\rangle, \qquad f \in D'(L^+_{B+}), \tag{4.1}$$

которое можно понимать как задачу решения уравнения $\tilde{Q}u := (L^+_{B+})' \circ L^+_{B+}\, v = g$, где $(L^+_{B+})' : L^l_2(\Omega) \to D'(L_B)$ – дуальный оператор в сопряженных оснащенных пространствах.

Из основной теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. 1. *Ядро* $\ker L_B$ (*ядро задачи* (3.1)) *конечномерно* (*тривиально*) *тогда и только тогда, когда задача* (3.5) *фредгольмова* (*соответственно корректна*).

2. *Коядро coker* L_B (*коядро задачи* (3.1)) *конечномерно* (*тривиально*) *тогда и только тогда, когда задача* (4.1) *фредгольмова* (*соответственно корректна*).

3. *Задача* (3.1) *фредгольмова тогда и только тогда, когда обе задачи* (3.5) *и* (4.1) *фредгольмовы.*

4. *Задача* (3.1) *корректна тогда и только тогда, когда обе задачи* (3.5) *и* (4.1) *корректны.*

Пусть теперь скалярный линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ эллиптичен в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, но не является правильно эллиптическим. Тогда оператор $\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}$ является правильно эллиптическим. Действительно, его старшим символом является произведение $l^+(x,\xi) l(x,\xi)$, где $l^+(x,\xi)$ — старший символ оператора $\mathcal{L}^+$, порядок четен и для каждой пары линейно независимых векторов действительных векторов ξ и η для каждого корня t^+_0 полинома $l(x, \xi + t\eta)$ с положительной мнимой частью $\operatorname{Im} t^+_0 > 0$ сопряженное число $\overline{t^+_0}$ будет корнем полинома $l^+(x, \xi + t\eta)$ с отрицательной мнимой частью. Ясно, что в этом случае оператор $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^+$ также является правильно эллиптическим.

Если граничная задача (3.1) дифференциальна, т. е. задана выражениями (3.2), и набор B_j нормален, то ее фредгольмовость, согласно п. 3 теоремы 4, равносильна фредгольмовости обеих задач (3.5) и (4.1).

Рассмотрим сначала задачу (3.5) и порожденный ею оператор Q_{2m} граничной задачи (3.2), (3.6) для уравнения (3.4), определенный на функциях из пространства $W^{2m}_2(\Omega)$. Фредгольмовость задачи (3.5), т. е. фредгольмовость оператора $Q : D(L_B) \to D'(L_B)$ (причем, как отмечалось выше, с нулевым индексом), влечет конечномерность ядра оператора $Q_{2m+r} : W^{2m+r}_2(\Omega) \supset D(Q_{2m}) \to W^r_2(\Omega)$ для $r \ge 0$. Но, как показано в книге [2], (гл. 2, пп. 5 – 7), это ядро, как и коядро, состоит из гладких функций и не зависит от r, более того, оператор Q_{2m+r} продолжается на соболевские пространства с любым вещественным r и теми же ядром и коядром. В частности, при $r = -m$ получим $Q_m = Q$, так как в силу эллиптичности $D(L) \subset W^m_2(\Omega)$. Коядро оператора Q изоморфно ядру и потому конечномерно. И, значит, выполнено условие Лопатинского 3 для задачи (3.2), (3.6) с уравнением (3.4). Отметим, что задача (3.2), (3.6) нормальна.

Точно так же выполнено условие Лопатинского 3 для похожей граничной задачи, порожденной обобщенной задачей (4.1), с уравнением $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^+\, v = g$.

Наоборот, пусть выполнено условие Лопатинского 3 для задачи (3.2), (3.6) с уравнением (3.4). Тогда согласно п. 1 теоремы 4 ядро задачи (3.1) конечномерно. Аналогично, условие Лопатинского для граничной задачи (4.1) дает конечномерность коядра по п. 2 теоремы 4.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Для того чтобы дифференциальная нормальная граничная задача* (3.1) *была фредгольмовой, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условие Лопатинского для задачи* (3.2), (3.6) *с уравнением* (3.4) *и условие Лопатинского для граничной задачи, порожденной обобщенной задачей* (4.1).

Кроме того, как отмечалось в теореме 4, корректность задачи (3.1) эквивалентна корректности обеих обобщенных задач.

***Пример* 3.** Рассмотрим граничную задачу $u|_{\partial\Omega} = 0,\ u''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения $\mathcal{L}u := (\partial/\partial x_1 - \mu_1\partial/\partial x_2)(\partial/\partial x_1 - \mu_2\partial/\partial x_2)(\partial/\partial x_1 - \mu_3\partial/\partial x_2)u = f$, где μ_1, μ_2, μ_3 — комплексные числа с $\operatorname{Im}\mu_j < 0$. Согласно определению сопряженной задачи сопряженная задача имеет вид $L^+v = g,\ L^+_{(1)}v|_{\partial\Omega} = 0$. Здесь $L^+ = \overline{L},\ L^+_{(1)}v = l(x,\nu(x))\,\partial_\nu v + \alpha(x)\,v$ с некоторой гладкой функцией α. Тогда задача (3.2), (3.6) для уравнения (3.4) будет иметь вид $u|_{\partial\Omega} = 0,\ u''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = 0,\ l(x,\nu(x))\,\partial_\nu L^+u + \alpha(x)\,L^+u|_{\partial\Omega} = 0$. Теперь полином $l_+(x,\tau,\nu,t)$ с точностью до множителя β, не зависящего от t, совпадет с полинимом $L_+(x,\tau + t\nu)$, а полиномы $\tilde{B}_j(x,\tau+t\nu)$ имеют вид $\tilde{B}_0(x,\tau+t\nu) = 1,\ \tilde{B}_1(x,\tau+t\nu) = l(x,\nu(x))\,\beta\,l_+(x,\tau,\nu,t)\,t,\ \tilde{B}_2(x,\tau+t\nu) = t^2$. Линейная зависимость полиномов $\tilde{B}_j$ по модулю полинома $l_+(x,\tau,\nu,t)$ эквивалентна линейной зависимости полиномов $1, t, t^2$, что, очевидно, невозможно. Таким образом, задача (3.2), (3.6) для уравнения (3.4) удовлетворяет условию Лопатинского. Граничная задача, порожденная обобщенной задачей (4.1), такова: $Lv|_{\partial\Omega} = 0,\ (Lv)''_{\nu\nu}|_{\partial\Omega} = 0,\ l(x,\nu(x))\,\partial_\nu v + \alpha(x)v|_{\partial\Omega} = 0$. Соответствующие полиномы $\tilde{B}^+$ имеют вид $\tilde{B}^+_0(x,\tau+t\nu) = L(x,\tau+t\nu),\ \tilde{B}^+_1(x,\tau+t\nu) = l(x,\nu(x))\,t,\ \tilde{B}^+_2(x,\tau+t\nu) = L(x,\tau+t\nu)\,t^2$, они линейно независимы по модулю полинома $l_+(x,\tau,\nu,t)$, поэтому исходная граничная задача фредгольмова.

1. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – **5**, № 2. – С. 123 – 151.
2. *Лионс Ж.-М., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965.
4. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
6. *Вишик М. Й.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **1**. – С. 187 – 246.
7. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002.

Получено 27.08.09