УДК 517.919

В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко (Тернопіл. нац. екон. ун-т)

КВАЗІПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We establish sufficient conditions for the existence of quasiperiodic solution of a system of ordinary second-order differential equations having a singular symmetric matrix with second-order derivatives for the case of arbitrary quasiperiodic inhomogeneity.

Установлены достаточные условия существования квазипериодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырожденной симметрической матрицей при производных второго порядка для произвольной квазипериодической неоднородности.

1. Об'єктом дослідження в даній роботі є система диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \varepsilon A(\varphi)\ddot{x} + B(\varphi)\dot{x} + C(\varphi)x = f(\varphi), \tag{1}$$

де $\varphi \in R^m$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — частотний базис, $x \in R^n$; дійсні квадратні матриці $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ та n-вимірний вектор $f(\varphi)$ визначені при всіх $\varphi \in R^m$ і 2π-періодичні за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1,m}$, тобто задані на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$; крапка означає диференціювання по незалежній змінній t, ε — малий додатний параметр. При цьому матриця $A(\varphi)$ є симетричною і вироджується на множині довільної структури.

Вивчається задача про існування гладкого квазіперіодичного розв'язку системи (1) для довільної неоднорідності $f(\varphi)$.

Система вигляду (1) для випадку $\varphi = t \in [a,b]$ і несиметричної матриці $A(t)$ досліджувалася в [1] при певних припущеннях, одним із яких є сталість рангу матриці $A(t)$. Для випадку $\varphi \in R^m$, $x \in R^1$ у повідомленні [2] наведено достатні умови існування квазіперіодичного розв'язку на основі вивчення виродженого скалярного рівняння Ріккаті. У даній роботі виконано узагальнення останнього результату.

Нехай $C^r(\mathcal{T}_m)$ — простір векторних або матричних функцій $F(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, що набувають дійсних значень, періодичних із періодом 2π по кожній із змінних φ_i, $i = \overline{1,m}$, і таких, що є неперервними разом з усіма похідними до порядку r включно; $H^r(\mathcal{T}_m)$ — простір функцій, інтегровних із квадратом на $\mathcal{T}_m$ разом з усіма узагальненими похідними до порядку r включно; $(\,.\,,\,.\,)_r$ — скалярний добуток у просторі $H^r(\mathcal{T}_m)$, $\|\,.\,\|_r^2 = ((1-\Delta)^r\,.\,,\,.\,)_\circ$, $\Delta = \sum_{i=1}^m \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi_i^2}$, $(\,.\,,\,.\,)_\circ = \dfrac{1}{(2\pi)^m}\displaystyle\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\langle\,.\,,\,.\,\rangle d\varphi_1\ldots d\varphi_m$, $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ — скалярний добуток у R^n, $|F(\varphi)|_r = \max\limits_{0\le|\rho|\le r}\max\limits_{\varphi\in\mathcal{T}_m,}\|D^{(\rho)}F(\varphi)\|$, де $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ — цілочисловий вектор із невід'ємними координатами, $|\rho| = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m$ і $D^\rho = \dfrac{\partial^{|\rho|}}{\partial\varphi_1^{\rho_1}\partial\varphi_2^{\rho_2}\ldots\partial\varphi_m^{\rho_m}}$, $\|\,.\,\|$ — евклідова векторна або узгоджена матрична норма.

2. Система рівнянь (1) рівносильна системі

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \varepsilon A(\varphi) \end{pmatrix}\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -C(\varphi) & -B(\varphi) \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 0 \\ f(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де I_n — одинична n-вимірна матриця, $X = \mathrm{col}(x, \dot{x})$.

Позначимо

$$V(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} I_n + \varepsilon A(\varphi) Z(\varphi, \varepsilon) & 0 \\ -\varepsilon A(\varphi) Z(\varphi, \varepsilon) & I_n \end{pmatrix}, \quad W(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ Z(\varphi, \varepsilon) & I_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $Z(\varphi, \varepsilon)$ — $(n \times n)$-матриця, яка задовольняє матричне рівняння Ріккаті

$$\varepsilon A(\varphi) \dot{Z} + B(\varphi) Z + \varepsilon A(\varphi) Z^2 + C(\varphi) = 0. \tag{4}$$

Якщо це рівняння має гладкий розв'язок $Z_0(\varphi, \varepsilon)$ такий, що матриця $I_n + \varepsilon A(\varphi) \times \times Z_0(\varphi, \varepsilon)$ є невиродженою, то внаслідок множення зліва другого з рівнянь (2) на $V(\varphi, \varepsilon)$ та заміни $X = W(\varphi, \varepsilon) Y$ отримуємо рівносильну систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \varepsilon A(\varphi) \end{pmatrix} \dot{Y} = \begin{pmatrix} Z_0(\varphi, \varepsilon) & I_n \\ 0 & -\varepsilon A(\varphi) Z_0(\varphi, \varepsilon) - B(\varphi) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ f(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

що має блочно-трикутний вигляд і для вивчення якої необхідна інформація про матрицю $Z_0(\varphi, \varepsilon)$.

3. Дослідимо умови існування періодичного розв'язку матричного рівняння (4), яке з урахуванням першого рівняння системи (2) запишемо у вигляді

$$\varepsilon A(\varphi) \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial Z}{\partial \varphi_i} + B(\varphi) Z + \varepsilon A(\varphi) Z^2 + C(\varphi) = 0. \tag{6}$$

Нехай матриця $B(\varphi)$ невироджена. Виконавши у рівнянні (6) заміну

$$Z = Z_1 - B^{-1}(\varphi) C(\varphi), \tag{7}$$

отримаємо

$$\varepsilon A \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial Z_1}{\partial \varphi_i} + (B - \varepsilon A B^{-1} C) Z_1 - \varepsilon A Z_1 B^{-1} C + \varepsilon A Z_1^2 + \\ + \varepsilon A \left[(B^{-1} C)^2 - \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (B^{-1} C) \right] = 0. \tag{8}$$

Це матричне рівняння розглянемо як скорочений запис для n^2 скалярних диференціальних рівнянь відносно n^2 невідомих елементів матриці Z_1 і подамо його у вигляді векторного рівняння. Для цього запишемо n^2-вимірні вектори у вигляді

$$u = \begin{pmatrix} z'_{1*} \\ z'_{2*} \\ \dots \\ z'_{n*} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g'_{1*} \\ g'_{2*} \\ \dots \\ g'_{n*} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де $z_{1*}, z_{2*}, \dots, z_{n*}$ — відповідні рядки матриці Z_1, штрих позначає операцію транспонування матриці,

$$\begin{pmatrix} g_{1*} \\ g_{2*} \\ \ldots \\ g_{n*} \end{pmatrix} = A\left[-(B^{-1}C)^2 + \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(B^{-1}C)\right]. \tag{10}$$

Тоді матричне рівняння (8) рівносильне [3, с. 239] векторному рівнянню

$$\varepsilon(A \otimes I_n)\sum_{i=1}^{m}\omega_i \frac{\partial u}{\partial \varphi_i} +$$

$$+\left[(B - \varepsilon AB^{-1}C) \otimes I_n - \varepsilon A \otimes (B^{-1}C)' + \varepsilon A Z_1 \otimes I_n\right] u = \varepsilon g, \tag{11}$$

де $K \otimes M$ — прямий добуток [3, с. 235] $(n \times n)$-матриць K та M, тобто

$$K \otimes M = \begin{pmatrix} k_{11}M & k_{12}M & \cdots & k_{1n}M \\ k_{21}M & k_{22}M & \cdots & k_{2n}M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}M & k_{n2}M & \cdots & k_{nn}M \end{pmatrix}, \quad K = \{k_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}\,.$$

Використавши позначення

$$a(\varphi) = A(\varphi) \otimes I_n, \quad P(\varphi, \varepsilon) = \left[B(\varphi) - \varepsilon A(\varphi) B^{-1}(\varphi) C(\varphi)\right] \otimes I_n -$$

$$-\varepsilon A(\varphi) \otimes [B^{-1}(\varphi)C(\varphi))]', \quad P_1(\varphi, u) = A(\varphi) Z_1 \otimes I_n, \tag{12}$$

рівняння (11) запишемо у вигляді

$$\varepsilon a(\varphi)\sum_{i=1}^{m}\omega_i \frac{\partial u}{\partial \varphi_i} + [P(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon P_1(\varphi, u)]\, u = \varepsilon g(\varphi). \tag{13}$$

Якщо матричні функції $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ належать просторам $C^r(\mathcal{T}_m)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$ відповідно, то згідно з (10) і (12) $a(\varphi)$, $P(\varphi, \varepsilon)$, $P_1(\varphi, u)$, $g(\varphi)$ належать простору $C^r(\mathcal{T}_m)$.

Розглянемо квазілінійний оператор

$$L(u_1)u_2 = \varepsilon a(\varphi)\sum_{i=1}^{m}\omega_i \frac{\partial u_2}{\partial \varphi_i} + [P(\varphi,\varepsilon) + \varepsilon P_1(\varphi, u_1)]\, u_2 \tag{14}$$

на множині функцій $u \in C^r(\mathcal{T}_m)$, яка визначається нерівностями

$$|u|_0 \le d, \quad |u|_r \le K.$$

Гладкий періодичний розв'язок $u(\varphi, \varepsilon)$ рівняння (13) є розв'язком рівняння

$$L(u)u = \varepsilon g(\varphi). \tag{15}$$

Цей розв'язок можна знайти з допомогою лінійної модифікації методу Гальоркіна побудови періодичного розв'язку нелінійної системи рівнянь [4, с. 270]. З урахуванням малості правої частини рівняння (15) за нормою простору $C^r(\mathcal{T}_m)$ умови існування і збіжності наближень Гальоркіна визначаються головною частиною оператора $L(u)$, яка є рівною оператору

$$L(0) = \varepsilon a(\varphi) \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + P(\varphi, \varepsilon).$$

З'ясуємо умови відносно матричних коефіцієнтів вихідного рівняння (1), при яких система (13) стає нелінійним узагальненням додатної симетричної системи диференціальних рівнянь [4, 5].

Лінійна система

$$L(0)u = \varepsilon g(\varphi) \tag{16}$$

називається додатною симетричною [5], якщо матриця $a(\varphi)$ симетрична, а матриця $P(\varphi,\varepsilon) + P'(\varphi,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{m} \omega_i \dfrac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi_i}$ додатно означена для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Лема 1. *Нехай для будь-якого* $\varphi \in \mathcal{T}_m$

$$\begin{gathered}\min_{\|x\|=1} \left\langle \left\{ B(\varphi) - \varepsilon \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_i} + A(\varphi) B^{-1}(\varphi) C(\varphi) \right] \right\} x, x \right\rangle \geq \beta_0(\varphi, \varepsilon), \\ \max_{\|x\|=1} \langle A(\varphi)x, x \rangle \leq \alpha(\varphi), \quad \max_{\|x\|=1} \langle B^{-1}(\varphi) C(\varphi) x, x \rangle \leq \beta(\varphi).\end{gathered} \tag{17}$$

Тоді для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}_m$

$$\min_{\|\xi\|=1} \left\langle \left[P(\varphi,\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right] \xi, \xi \right\rangle \geq \beta_0(\varphi,\varepsilon) - \varepsilon \alpha(\varphi) \beta(\varphi). \tag{18}$$

Доведення. Якщо M та K — квадратні матриці порядку n, то [3, с. 237] власні значення матриці $M \otimes K$ збігаються із n^2 числами $\lambda_r \mu_s$, $r = \overline{1,n}, s = \overline{1,n}$, де λ_r та μ_s — власні значення матриць M та K відповідно.

З урахуванням цієї властивості прямого добутку матриць, симетричності $A(\varphi)$, рівностей (12), а також рівностей [3, с. 235]

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B', \quad (A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \tag{19}$$

отримуємо

$$P + P' - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial a}{\partial \varphi_i} = (B - \varepsilon A B^{-1} C) \otimes I_n - \varepsilon A \otimes (B^{-1}C)' +$$

$$+ [(B - \varepsilon A B^{-1} C) \otimes I_n]' - \varepsilon [A \otimes (B^{-1}C)']' - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (A \otimes I_n) =$$

$$= \left\{ B + B' - \varepsilon \left[AB^{-1}C + (AB^{-1}C)' + \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} \right] \right\} \otimes I_n - \varepsilon \{ A \otimes [B^{-1}C + (B^{-1}C)'] \},$$

$$\min_{\|x\|=1} \left\langle \left[P(\varphi,\varepsilon) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right] \xi, \xi \right\rangle \geq$$

$$\geq \min_{\|x\|=1} \left\langle \left\{ B(\varphi,\varepsilon) - \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_i} + A(\varphi)B^{-1}(\varphi)C(\varphi) \right] \right\} x, x \right\rangle -$$

$$-\varepsilon \max_{\|x\|=1} \langle A(\varphi)x, x\rangle \max_{\|x\|=1} \langle B^{-1}(\varphi)C(\varphi)x, x\rangle \geq \beta_0(\varphi,\varepsilon) - \varepsilon\alpha(\varphi)\beta(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

що і завершує доведення леми 1.

Отже, система рівнянь (16) є додатною симетричною, якщо для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\beta_0(\varphi,\varepsilon) - \varepsilon\alpha(\varphi)\beta(\varphi) \geq \gamma, \tag{20}$$

де γ — як завгодно мале додатне число, а скалярні функції $\beta_0(\varphi,\varepsilon)$, $\alpha(\varphi)$ та $\beta(\varphi)$ визначені співвідношеннями (**??**).

Ключовою умовою існування класичного періодичного розв'язку системи (16) для довільної неоднорідності є виконання [5] нерівностей

$$\left\langle \left[l\varepsilon \sum_{\nu,\mu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi_\mu} \xi_\nu \xi_\mu + P_0(\varphi,\varepsilon) \right] \eta, \eta \right\rangle \geq \gamma(l) = \text{const} > 0 \tag{21}$$

для достатньо великих додатних цілих чисел l і довільних векторів $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ та $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n^2})$, $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, де

$$P_0(\varphi,\varepsilon) = P(\varphi,\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi_i}. \tag{22}$$

Проте нерівності (21) рівносильні [6] нерівностям

$$\min_{\|\psi\|=1} \left\langle \left[l\varepsilon \hat{a}(\varphi) + \hat{P}_0(\varphi,\varepsilon) \right] \psi, \psi \right\rangle \geq \gamma(l) = \text{const} > 0, \tag{23}$$

де квадратні mn^2-вимірні матриці $\hat{a}$ та $\hat{P}_0$ визначаються рівностями

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \omega_1 \dfrac{\partial a}{\partial \varphi_1} & \omega_1 \dfrac{\partial a}{\partial \varphi_2} & \cdots & \omega_1 \dfrac{\partial a}{\partial \varphi_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_m \dfrac{\partial a}{\partial \varphi_1} & \omega_m \dfrac{\partial a}{\partial \varphi_2} & \cdots & \omega_m \dfrac{\partial a}{\partial \varphi_m} \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_0 = I_m \otimes P_0. \tag{24}$$

Оцінимо $\min\limits_{\|\psi\|=1} \langle \hat{a}(\varphi)\psi, \psi\rangle$. Згідно з означенням прямого добутку матриць та рівностями (12), (19), (24)

$$\hat{a} + \hat{a}' = \hat{A}' \otimes I_n + \hat{A}' \otimes I_n = (\hat{A} + \hat{A}') \otimes I_n,$$

де $\hat{A}$ визначається першою з рівностей (24) із заміною у правій частині a на A. А тому у відповідності з [3, с. 237]

$$\min_{\|\psi\|=1} \langle \hat{a}(\varphi)\psi, \psi\rangle = \min_{\|\xi\|=1} \langle \hat{A}(\varphi)\xi, \xi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{25}$$

Оцінка знизу правої частини (25) має вигляд [6]

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle \hat{A}(\varphi)\xi, \xi \rangle \geq (\|\omega\|^2/\omega_1^2)\alpha_0(\varphi), \tag{26}$$

де $\alpha_0(\varphi)$ — мінімальний корінь рівняння, яке в залежності від значення m набирає вигляду

$$\Delta_1(\lambda) = \det\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} - \lambda I_n\right) = 0, \quad m = 1,$$

$$\Delta_m(\lambda) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{\partial A}{\partial \varphi_i} - \lambda I_n & \frac{1}{2}\Big(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \varphi_2} - \omega_2 \frac{\partial A}{\partial \varphi_1}\Big) \cdots & \frac{1}{2}\Big(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \varphi_m} - \omega_m \frac{\partial A}{\partial \varphi_1}\Big) \\ \frac{1}{2}\Big(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \varphi_2} - \omega_2 \frac{\partial A}{\partial \varphi_1}\Big) & \lambda I_n \quad \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}\Big(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \varphi_m} - \omega_m \frac{\partial A}{\partial \varphi_1}\Big) & 0 \quad \cdots & -\lambda I_n \end{pmatrix} =$$

$$= 0. \tag{27}$$

Враховуючи співвідношення (22), (24), (18) та (26), робимо висновок, що нерівності (23) виконуються, якщо для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ мають місце нерівності

$$l\varepsilon(\|\omega\|^2/\omega_1^2)\alpha_0(\varphi) + \beta_0(\varphi, \varepsilon) - \varepsilon\alpha(\varphi)\beta(\varphi) \geq \gamma(l) > 0. \tag{28}$$

А тому згідно з лемою 3 [6] при виконанні нерівностей (28) для $l = 0, 1, \ldots, l_0$, $l_0 \leq r$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для довільного $u \in H^l(\mathcal{T}_m)$

$$(L(0)u, u)_0 \geq \gamma_0 \|u\|_0^2 \tag{29}$$

і для кожного l, $1 \leq l \leq l_0$, $l_0 \leq r$, та довільного $u \in H^{l+1}(\mathcal{T}_m)$

$$(L(0)u, u)_l \geq \gamma_1(l)\|u\|_l^2 - \delta(l)\|u\|_0^2, \tag{30}$$

де γ_0, $\gamma_1(l)$, $\delta(l)$ — додатні сталі, які не залежать від u. З урахуванням нерівностей (29), (30), рівняння (16) та нерівності Шварца отримуємо оцінки

$$\|u\|_0 \leq \varepsilon\gamma_0^{-1}\|g\|_0, \quad \gamma_1\|u\|_r^2 - \delta\|u\|_0^2 \leq \varepsilon\|g\|_r\|u\|_r,$$

звідки

$$\gamma_1\|u\|_r^2 - \varepsilon^2\delta\gamma_1^{-2}\|g\|_r^2 \leq \varepsilon\|g\|_r\|u\|_r, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{31}$$

оскільки $\gamma_1 \leq \gamma_0$, $\|g\|_0 \leq \|g\|_r$. Розв'язуючи нерівність (31), знаходимо оцінку

$$\|u\|_r \leq \varepsilon\gamma_2^{-1}\|g\|_r, \tag{32}$$

де $\gamma_2 = 2\gamma_1/(1 + \sqrt{1 + 4\delta/\gamma_1})$.

Нехай $r > m/2 + 1$. Тоді за теоремою Соболєва про вкладення просторів [4, с. 15] $H^r(\mathcal{T}_m) \subset C^1(\mathcal{T}_m)$ і

$$|u|_1 \leq c\|u\|_r, \tag{33}$$

де c — додатна стала, що не залежить від u. З нерівностей (32), (33) отримуємо оцінку

$$|u|_1 \leq \varepsilon c_1 \|g\|_r, \tag{34}$$

де додатна стала c_1 не залежить від u.

Згідно з лемою Ю. Мозера [5, с. 199], якщо виконуються нерівності (28), то для довільного $u \in C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ мають місце оцінки

$$(L(0)u, u)_l \geq \gamma_2 \|u\|_l^2 - \delta_2(1 + \varepsilon\|a(\varphi)\|_l + \|P(\varphi, \varepsilon\|_l)^2, \tag{35}$$

де γ_2 і δ_2 — додатні сталі, які залежать лише від

$$C_0 \geq |a(\varphi)|_2 + |P(\varphi, \varepsilon)|_1 + |u|_1, \quad r \geq 2, \quad 1 \leq l \leq r.$$

Але з урахуванням нерівності (34) можна вважати, що в апріорних оцінках (35) сталі γ_2 і δ_2 вже не залежать від u.

Нехай $w(\varphi)$ — n^2-вектор із $C^r(\mathcal{T}_m)$, для якого $|w|_2 \leq 1$. Розглянемо лінійний оператор

$$L(w) = \varepsilon a(\varphi) \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + [P(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon P_1(\varphi, w)]$$

як оператор у просторі $C^\infty(\mathcal{T}_m)$. Оскільки нерівності (28) мають грубий характер, то з них випливають аналогічні нерівності для коефіцієнтів оператора $L(w)$ для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ та деякого $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. А тому з урахуванням леми Ю. Мозера отримуємо оцінки

$$(L(w)u, u) \geq \gamma_3 \|u\|_0^2, \quad (L(w)u, u)_l \geq \gamma_3 \|u\|_l^2 -$$

$$-\delta_3(1 + \varepsilon\|a(\varphi)\|_l \sum_{i=1}^{m} \omega_i + \|P(\varphi, \varepsilon)\|_l + \varepsilon\|P_1(\varphi, w)\|_l)^2, \quad l = \overline{1, r}, \tag{36}$$

де γ_3, δ_3 — додатні сталі, які не залежать від w, u і ε.

Згідно з оцінкою Ю. Мозера [4, с. 18] для суперпозиції функцій $P_1(\varphi, w(\varphi))$

$$\|P_1(\varphi, w)\|_l \leq c|P_1|_l(1 + \|w\|_l), \tag{37}$$

де c — додатна стала, що не залежить від P_1, w,

$$|P_1|_l = \max_{0 \leq \rho \leq l} \max_{(\varphi, w) \in \mathcal{T}_m \times T_{n^2}} \|D^\rho P_1(\varphi, w)\|,$$

D^ρ — довільна частинна похідна по φ, w порядку ρ, T_{n^2} — одинична куля в R^{n^2}. З урахуванням (37) оцінки (36) наберуть вигляду

$$(L(w)u, u)_0 \geq \gamma_3 \|u\|_0^2, \quad (L(w)u, u)_l \geq \gamma_3 \|u\|_l^2 - \delta_4(1 + \varepsilon\|w\|_l)^2, \quad l = \overline{1, r}, \tag{38}$$

де δ_4 не залежить від w, u і ε.

Метод Гальоркіна визначає N-те наближення до розв'язку $u(\varphi, \varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ рівняння (15) виразом

$$w_N(\varphi, \varepsilon) = \sum_{\|k\| \leq N} w_k^{(N)} e^{i(k, \varphi)}, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

коефіцієнти якого $w_k^{(N)}$ є розв'язком системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Big(L(w_N(\varphi,\varepsilon))w_N(\varphi,\varepsilon), e^{i(k,\varphi)}\Big)_0 = \varepsilon(g(\varphi), e^{i(k,\varphi)})_0, \quad \|k\| \le N.$$

Дотримуючись [4], лінійну модифікацію методу Гальоркіна визначимо, виходячи з початкового наближення $u_0(\varphi) = 0$ для $\varphi \in \mathcal{T}_m$ і обраного набору цілих чисел $N_j, j = 0, 1, \ldots$, для якого $N_j \ge N_{j-1}$, $j = 0, 1, \ldots$, з тим що N_j-те лінійне наближення Гальоркіна до розв'язку $u(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ рівняння (15) задамо виразом

$$u_j(\varphi,\varepsilon) = \sum_{\|k\| \le N_j} u_k e^{i(k,\varphi)},$$

коефіцієнти якого $u_k = u_k^{(j)}$ є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Big(L(u_{j-1}(\varphi,\varepsilon))u_j(\varphi,\varepsilon), e^{i(k,\varphi)}\Big)_0 = \varepsilon(g, e^{i(k,\varphi)})_0, \quad \|k\| \le N_j.$$

Розглянемо перше лінійне наближення Гальоркіна $u_1(\varphi,\varepsilon)$. Його коефіцієнти $u_k^{(1)}$ визначаються з системи рівнянь, яка рівносильна рівнянню

$$S_{N_1} L(0) u_1(\varphi,\varepsilon) = \varepsilon S_{N_1} g(\varphi), \tag{39}$$

де S_{N_1} — оператор зрізки ряду Фур'є функції $f(\varphi) \simeq \sum_k f_k e^{i(k,\varphi)}$, який визначається рівністю $S_N f(\varphi) = \sum_{\|k\| \le N} f_k e^{i(k,\varphi)}$.

Нерівності (29), (30) для оператора $L(0)$ забезпечують існування розв'язку рівняння (39) такого, що при $r > m/2 + 2$ за теоремою Соболєва про вкладення просторів для достатньо малого $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ і всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ виконується нерівність $|u_1(\varphi,\varepsilon)|_2 \le 1$. Тоді оператор $L(u_1)$ визначений для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$ і задовольняє нерівності (38) при $w = u_1$, що забезпечує існування наближення $u_2(\varphi,\varepsilon) = \sum_{\|k\| \le N_2} u_k^{(2)} e^{i(k,\varphi)}$ і оцінку $|u_2(\varphi,\varepsilon)|_2 \le 1$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$, якщо ε_3 є достатньо малим.

Доведення існування наближень $u_j(\varphi,\varepsilon)$ для довільного $j \ge 3$, а також збіжність послідовності $u_j(\varphi,\varepsilon)$, $j = 1, 2, \ldots$, в $H^l(\mathcal{T}_m) \cap C^s(\mathcal{T}_m)$ при $l < r$, $r > m/2 + s$, $s \ge 2$, до періодичного розв'язку рівняння (15) проводиться за схемою доведення теореми 1 [4, с. 271]. Таким чином отримуємо наступне твердження.

Лема 2. *Нехай $A'(\varphi) \equiv A(\varphi)$, матричні функції $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ належать просторам $C^r(\mathcal{T}_m)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$ відповідно, де*

$$r > m/2 + s, \quad s \ge 2, \tag{40}$$

і виконуються нерівності (28) *для $l = 0$, $l = r$ і всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де скалярні функції $\beta_0(\varphi,\varepsilon)$, $\alpha(\varphi)$, $\beta(\varphi)$ визначені співвідношеннями* (17), *а $\alpha_0(\varphi)$ — мінімальний корінь рівняння* (27).

Тоді можна вказати достатньо мале $\varepsilon^0 > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ система рівнянь (13) *має розв'язок $u^0(\varphi,\varepsilon) \in C^s(\mathcal{T}_m)$, $s \ge 2$, який задовольняє нерівності*

$$\|u^0(\varphi,\varepsilon)\|_0 \le \varepsilon\|g(\varphi)\|_0/\overline{\gamma}, \quad \|u^0(\varphi,\varepsilon)\|_s \le \delta^0, \quad |u^0(\varphi,\varepsilon)|_2 \le 1, \tag{41}$$

де $\overline{\gamma}$ — додатне число, $\delta^0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

4. Повернемося до матричного рівняння Ріккаті (4). При виконанні умов леми 2 розв'язком рівняння (8) є матриця $Z_1(\varphi,\varepsilon)$, рядки якої згідно з (9) є відповідними компонентами n^2-вектора $u^0(\varphi,\varepsilon)$. При цьому $Z_1(\varphi,\varepsilon)$ належить простору $C^s(\mathcal{T}_m)$, $s \geq 2$, і з урахуванням (41) та (10)

$$\begin{gathered} \|Z_1(\varphi,\varepsilon)\|_0 \leq \varepsilon \left\| A\left[-(B^{-1}C)^2+\sum_{i=1}^{m}\omega_i\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(B^{-1}C)\right]\right\|_0 \Big/\overline{\gamma}, \\ \|Z_1(\varphi,\varepsilon)\|_s \leq \delta^0, \quad |Z_1(\varphi,\varepsilon)|_2 \leq 1, \end{gathered} \tag{42}$$

де $\delta^0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$.

Згідно з (7) шуканий розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$Z_0(\varphi,\varepsilon) = Z_1(\varphi,\varepsilon) - B^{-1}(\varphi)C(\varphi) \tag{43}$$

і належить простору $C^s(\mathcal{T}_m)$, $s \geq 2$.

За теоремою Адамара [7, с. 406] матриця $I_n + \varepsilon A(\varphi)Z_0(\varphi,\varepsilon)$ є невиродженою для всіх $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_0]$ і достатньо малого $\overline{\varepsilon}_0 \leq \varepsilon^0$. А тому невиродженою є і матриця $V(\varphi,\varepsilon)$, означена рівністю (3), що приводить до рівносильності систем (2) і (5) для всіх $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_0]$.

Систему рівнянь (5) запишемо у вигляді

$$\dot{\varphi} = \omega, \tag{44}$$

$$\dot{Y}_1 = Z_0(\varphi,\varepsilon)Y_1 + Y_2, \tag{45}$$

$$\varepsilon A(\varphi)\dot{Y}_2 = -\big[B(\varphi) + \varepsilon A(\varphi)Z_0(\varphi,\varepsilon)\big]Y_2 + f(\varphi), \tag{46}$$

де $Y = \mathrm{col}(Y_1, Y_2)$, і дослідимо умови існування гладкого періодичного розв'язку рівняння (46) для довільної неоднорідності. З урахуванням (43) систему (44), (46) запишемо у вигляді рівняння

$$\varepsilon A(\varphi)\sum_{i=1}^{m}\omega_i\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi_i} + \big\{B(\varphi) - \varepsilon A(\varphi)[B^{-1}(\varphi)C(\varphi) - Z_1(\varphi,\varepsilon)]\big\}\,Y_2 = f(\varphi), \tag{47}$$

яке стає додатним симетричним, якщо для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_1]$, $\overline{\varepsilon}_1 \leq \overline{\varepsilon}_0$, виконується нерівність

$$\left\langle \left\{ B(\varphi) - \varepsilon\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\omega_i\frac{\partial A}{\partial\varphi_i} + A(\varphi)[B^{-1}(\varphi)C(\varphi) - Z_1(\varphi,\varepsilon)]\right]\right\} x, x\right\rangle \geq \gamma^{(1)} = \mathrm{const} > 0.$$

Але ця нерівність згідно з (17) та третьою з нерівностей (42) матиме місце, якщо

$$\beta_0(\varphi,\varepsilon) - \varepsilon|A(\varphi)|_0 \geq \gamma^{(1)}. \tag{48}$$

Оскільки коефіцієнти рівнянь (45), (46) у відповідності з лемою 2 належать $C^s(\mathcal{T}_m)$, де $2 \leq s \leq r - m/2 - 1$, то для достатньо великого r, згідно з [6], рівняння (47) для будь-якої неоднорідності $f(\varphi)$ матиме розв'язок $Y_2^0(\varphi) \in C^k(\mathcal{T}_m)$, якщо

$$s > k + m/2, \quad k \geq 1, \tag{49}$$

і для $l = 0$, $l = l_0 > k + m/2$ та всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon}_2]$, $\overline{\varepsilon}_2 \leq \overline{\varepsilon}_1$, виконуються нерівності

$$l\varepsilon(\|\omega\|^2/\omega_1^2)\alpha_0(\varphi) + \beta_0(\varphi,\varepsilon) - \varepsilon|A(\varphi)|_0 \geq \gamma_1^{(1)}(l) > 0, \tag{50}$$

де $\alpha_0(\varphi)$ — мінімальний корінь рівняння (27).

Зазначимо, що при виконанні нерівностей (50) справджується нерівність (48), оскільки $\alpha_0(\varphi)$ набуває від'ємних значень для деяких φ [6].

В результаті система (44) – (46) із урахуванням (43) набере вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = \omega, \\ &\dot{Y}_1 = [-B^{-1}(\varphi)C(\varphi) + Z_1(\varphi,\varepsilon)]Y_1 + Y_2^0(\varphi,\varepsilon). \end{aligned} \tag{51}$$

Згідно з (42) матрицю $Z_1(\varphi,\varepsilon)$ можна вважати „малою". А тому умови існування квазіперіодичного розв'язку системи (51) визначаються матрицею $-B^{-1}(\varphi)C(\varphi)$.

Нехай існує невироджена симетрична матриця $S(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ така, що для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$ матриця

$$\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)B^{-1}(\varphi)C(\varphi) - [B^{-1}(\varphi)C(\varphi)]'S(\varphi)$$

є від'ємно означеною. Тоді [4] система рівнянь

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{Y} = -B^{-1}(\varphi)C(\varphi)Y + Y_2^0(\varphi,\varepsilon) \tag{52}$$

для довільної неоднорідності має квазіперіодичний розв'язок $Y(\omega t,\varepsilon)$, гладкість якого збігається із гладкістю коефіцієнтів. Згідно з лемою 2 [4, с. 216], другою нерівністю (42) та теоремою Соболєва про вкладення просторів можна вказати таке $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, $\rho(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, що коли $|Z_1(\varphi,\varepsilon)|_k \leq \rho(\varepsilon)$, то система (51), „породжена" системою (52), матиме розв'язок $Y_1^0(\omega t,\varepsilon)$, $Y_1^0(\varphi,\varepsilon) \in C^k(\mathcal{T}_m)$.

Отже, система рівнянь (5) при виконанні наведених вище умов має для достатньо малих ε квазіперіодичний розв'язок $Y_0(\omega t,\varepsilon) = \mathrm{col}(Y_1^0(\omega t,\varepsilon), Y_2^0(\omega t,\varepsilon))$, $Y_0(\varphi,\varepsilon) \in C^k(\mathcal{T}_m)$, $k \geq 1$, де з урахуванням (40) та (49) $k \leq r - m - 1$. Тоді згідно з (3) $X_0(\omega t,\varepsilon) = W(\omega t,\varepsilon)Y_0(\omega t,\varepsilon) \in C^k(\mathcal{T}_m)$ — квазіперіодичний розв'язок системи рівнянь (2). Але оскільки $X_0(\omega t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x_0(\omega t,\varepsilon), \dot{x}_0(\omega t,\varepsilon))$, то робимо висновок, що $x_0(\omega t,\varepsilon) \in C^{k+1}(\mathcal{T}_m)$ — шуканий квазіперіодичний розв'язок вихідної системи рівнянь (1).

У підсумку отримуємо таке твердження.

Теорема. *Нехай стосовно вихідної системи рівнянь* (1) *виконуються такі умови:*

1) $A(\varphi) \equiv A'(\varphi)$ *і матричні функції* $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ *належать просторам* $C^r(\mathcal{T}_m)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$, $C^{r+1}(\mathcal{T}_m)$ *відповідно, де* $r \geq m + k + 1$, $k \geq 1$;

2) *матриця* $B(\varphi)$ *додатно означена і для всіх* $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$ *виконуються нерівності* (28), (50) *при* $l = 0$, $l = r$ *та* $l = 0$, $l \geq k + m/2 + 1$ *відповідно, де скалярні функції* $\beta_0(\varphi,\varepsilon)$, $\alpha(\varphi)$, $\beta(\varphi)$ *визначені співвідношеннями* (17), $\alpha_0(\varphi)$ — *мінімальний корінь рівняння* (27);

3) *існує невироджена симетрична матриця n-го порядку* $S(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$ *така, що матриця* $\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)B^{-1}(\varphi)C(\varphi) - [B^{-1}(\varphi)C(\varphi)]'S(\varphi)$ *є від'ємно означеною для всіх* $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Тоді можна вказати достатньо мале додатне число $\bar{\varepsilon}^*$ *таке, що для всіх* $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}^*]$ *і довільної неоднорідності* $f(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m)$ *система рівнянь* (1) *має квазіперіодичний розв'язок* $x_0(\omega t,\varepsilon)$, $x_0(\varphi,\varepsilon) \in C^{k+1}(\mathcal{T}_m)$.

Зауваження. Випадок від'ємної означеності матриці $B(\varphi)$ зводиться до розглянутого шляхом множення другого рівняння системи (1) на $-I_n$.

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
2. *Єрьоменко В. О.* Про квазіперіодичні розв'язки лінійних вироджених звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Нелінійні проблеми аналізу (IV Всеукр. наук. конф.: Тези доп.). – Івано-Франківськ: Плай, 2008. – С. 33.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, № 4. – С. 179 – 238.
6. *Самойленко А. М., Єрьоменко В. О., Давиденко А. А.* Гладкість квазіперіодичних розв'язків лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь із виродженою симетричною матрицею при похідних // Доп. НАН України. – 2001. – № 4. – С. 21 – 27.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Одержано 10.09.09