УДК 517.946

С. С. Мирзоев, С. Г. Велиев (Бак. гос. ун-т, Азербайджан)

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ГОЛОМОРФНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

We establish sufficient conditions of the completeness of a part of root vectors of one class of second-order operator bundles, corresponding to the characteristic numbers from a certain sector, and prove the theorem on the completeness of a system of elementary holomorphic solutions of corresponding second-order homogeneous operator differential equations. We also indicate the correct and one-valued solvability of a boundary-value problem for the considered equation, whose boundary condition contains a linear operator, and estimate the norm of an operator of intermediate derivative present in the perturbed part of the equation.

Встановлено достатні умови повноти частини кореневих векторів одного класу операторних жмутків другого порядку, що відповідають характеристичним числам із деякого сектора, та доведено теорему про повноту системи елементарних голоморфних розв'язків відповідного однорідного операторно-диференціального рівняння другого порядку. При цьому вказано коректну та однозначну розв'язність крайової задачі для даного рівняння, крайова умова якої містить лінійний оператор, та проведено оцінку норми оператора проміжної похідної, що входить до збуреної частини рівняння.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим полиномиальный операторный пучок второго порядка

$$P(\lambda) = -\lambda^2 E + \lambda A_1 + A^2, \tag{1}$$

где E — единичный оператор, а остальные операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A — положительно определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1};

2) оператор $B_1 = A_1 A^{-1}$ ограничен в H.

Очевидно, что область определения оператора A^γ, $\gamma \geq 0$, является гильбертовым пространством H_γ относительно скалярного произведения $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in H_\gamma$, а при $\gamma = 0$ полагаем $H_0 = H$.

Обозначим через $L_2(R_+; H)$ гильбертово пространство всех вектор-функций $f(t)$, определенных почти всюду в $R_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int\limits_0^\infty \|f(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее, определим пространство

$$W_2^2(R_+; H) = \left\{ u(t)\colon\ u''(t) \in L_2(R_+; H),\quad A^2 u(t) \in L_2(R_+; H) \right\}$$

с нормой (см. [1, 2])

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} = \left(\left\| A^2 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|u''\|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}.$$

Здесь производные понимаются в смысле теории распределений [1].

Следуя работе [3], обозначим через $H_{2,\alpha}$ линейное множество вектор-функций $f(z)$ со значениями в H, которые голоморфны в секторе

$$S_\alpha = \left\{z\colon\ |\arg z| < \alpha\right\}, \quad 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2},$$

и при каждом $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ вектор-функция $f_\beta(t) = f\left(te^{i\beta}\right) \in L_2(R_+; H)$, причем

$$\sup_{|\beta|<\alpha} \int\limits_0^\infty \left\|f\left(te^{i\beta}\right)\right\|^2 dt < \infty.$$

Оказывается, функции $f(z)$ из $H_{2,\alpha}$ имеют граничные значения (почти всюду или в $L_2(R_+; H)$) $f_{\pm\alpha}(t) \in L_2(R_+; H)$ на лучах $\Gamma_{\pm\alpha} = te^{\pm i\alpha}, t> 0$, и $H_{2,\alpha}$ превращается в гильбертово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{H_{2,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,\|f_\alpha(t)\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|f_{-\alpha}(t)\|^2_{L_2(R_+;H)}\Big)^{1/2}.$$

При $\alpha = 0$ считаем, что $H_{2,0} = L_2(R_+; H)$.

Далее, пусть $L(X; Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пространства X в пространство Y, σ_∞ — идеал вполне непрерывных операторов в $L(H; H)$, а σ_ρ — идеал вполне непрерывных операторов Шаттена [4].

Введем гильбертово пространство

$$W^2_{2,\alpha} = \left\{u(z)\colon\ u''(z) \in H_{2,\alpha}, A^2u \in H_{2,\alpha}\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W^2_{2,\alpha}} = \left(\|u''(z)\|^2_{H_{2,\alpha}} + \left\|A^2u(z)\right\|^2_{H_{2,\alpha}}\right)^{1/2}.$$

Предположим выполнение следующего условия: 3) линейный оператор T принадлежит $L\left(H_{1/2}, H_{3/2}\right)$ и введем подпространство пространства $W^2_{2,\alpha}$

$$W^2_{2,\alpha}(T) = \left\{u(z)\colon\ u(z) \in W_{2,\alpha},\ \ u(0) = Tu'(0)\right\}.$$

Отметим, что подпространство $W^2_{2,\alpha}(T)$ определено корректно, поскольку для вектор-функции из $W^2_{2,\alpha}$ имеют место аналоги теорем о промежуточных производных и о следах, т. е. если $u \in W^2_{2,\alpha}$, то $Au'(z) \in H_{2,\alpha}$, $u(0) \in H_{3/2}$, $u'(0) \in H_{1/2}$ и имеют место неравенства

$$\|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \le \mathrm{const}\, \|u\|_{W^2_{2,\alpha}}, \qquad \left\|u^{(j)}(0)\right\|_{2-j-\frac{1}{2}} \le \mathrm{const}\, \|u\|_{W^2_{2,\alpha}}, \quad j = 0, 1.$$

С другой стороны, при $u \in W^2_{2,\alpha}$ граничные значения $u_{\pm\alpha}(t) \in W^2_2(R_+; H)$. Необходимо отметить, что если e^{-zA} — полугруппа ограниченных операторов, то $e^{-zA}\varphi$ принадлежит $W^2_{2,\alpha}$ тогда и только тогда, когда φ принадлежит $H_{3/2}$. Этот факт доказывается элементарно, с использованием аналогичных выкладок из книги [2].

Теперь свяжем пучок операторов (1) с краевой задачей

$$P\left(d/dz\right)u(z) = 0, \quad z \in S_\alpha, \tag{2}$$

$$u(0) - Tu'(0) = \varphi, \quad \varphi \in H_{3/2}, \tag{3}$$

где производные понимаются в смысле комплексного анализа в пространстве H, а оператор T удовлетворяет условию 3.

Определение 1. *Если при* $\varphi \in H_{3/2}$ *существует вектор-функция* $u(z) \in \in W_{2,\alpha}^2$, *удовлетворяющая уравнению* (2) *тождественно в* S_α, *то будем называть ее регулярным решением уравнения* (2).

Определение 2. *Если при любом* $\varphi \in H_{3/2}$ *существует регулярное решение уравнения* (2), *удовлетворяющее граничному условию* (3) *в смысле сходимости*

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ |\arg z|<\alpha}} \|u(z) - Tu'(z) - \varphi\|_{3/2} = 0$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^2} \le \mathrm{const}\, \|f\|_{H_{2,\alpha}},$$

то задачу (2), (3) *будем называть регулярно разрешимой.*

Определение 3. *Если уравнение* $P(\lambda_n)\, x_{0,n,j} = 0$ *имеет ненулевое решение* $x_{0,n,j}$, *то* λ_n *называется характеристическим числом, а* $x_{0,n,j}$ — *собственным вектором операторного пучка* $P(\lambda)$, *соответствующим* λ_n. *Если векторы* $x_{0,n,j}, x_{1,n,j}, \ldots, x_{h,n,j}$, $h = \overline{0, m_{n,j}}$, $j = \overline{1, q_n}$, *удовлетворяют уравнениям*

$$P(\lambda_n)\, x_{0,n,j} = 0, \qquad P(\lambda_n)\, x_{1,n,j} + P'(\lambda_n)\, x_{0,n,j} = 0,$$

$$P(\lambda_n)\, x_{h,n,j} + P'(\lambda_n)\, x_{h-1,n,j} - 2x_{h-2,n,j} = 0, \quad h = 2, \ldots, m_{n,j},$$

то $x_{0,n,j}$, $x_{1,n,j}, \ldots, x_{h,n,j}$ *называют корневыми векторами пучка* $P(\lambda)$, *соответствующими характеристическому числу* λ_n.

Очевидно, что если

$$\lambda_n \in \tilde{S}_\alpha = \big\{\lambda\colon\ |\arg\lambda - \pi| < \alpha\big\},$$

то вектор-функции

$$u_{h,n,j}(z) = e^{\lambda_n z}\left(\frac{z^h}{h!}x_{0,n,j} + \frac{z^{h-1}}{(h-1)!}x_{1,n,j} + \ldots + x_{h,n,j}\right),$$

$$h = \overline{0, m_{n,j}}, \quad j = \overline{1, q_n},$$

принадлежат пространству $W_{2,\alpha}^2$, удовлетворяют уравнению (2) и называются элементарными голоморфными в секторе S_α решениями уравнения (2). Обратно, если $u_{h,n,j}(z)$ принадлежат $W_{2,\alpha}^2$, $h = \overline{0, m_{n,j}}$, $j = \overline{1, q_n}$, и удовлетворяют уравнению (2), то λ_n принадлежат $\widetilde{S}_\alpha$, а векторы $x_{0,n,j}, x_{1,n,j}, \ldots, x_{h,n,j}$ являются корневыми векторами пучка $P(\lambda)$, соответствующими собственному числу λ_n.

Очевидно, что если $u_{h,n,j}(z)$ принадлежат $W_{2,\alpha}^2$, то их следы удовлетворяют следующим условиям:

$$u_{0,n,j}(0) - Tu'_{0,n,j}(0) = x_{0,n,j} - \lambda_n T x_{0,n,j} \equiv \psi_{0,n,j},$$

$$u_{h,n,j}(0) - Tu'_{h,n,j}(0) = x_{h,n,j} - \lambda_n T x_{h-1,n,j} \equiv \psi_{h,n,j},$$

$$h = \overline{1, m_{n,j}}, \quad j = \overline{1, q_n}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать полноту системы $K\big(\widetilde{S}_\alpha\big) = \big\{\psi_{h,n,j}\big\}_{n=1, h=\overline{1,m_{n,j}}, j=\overline{1,q_n}}^{\infty}$ в пространстве $H_{3/2}$ и полноту системы элементарных голоморфных в секторе S_α решений $\big\{u_{h,n,j}(z)\big\}_{n=1, h=\overline{1,m_{n,j}}, j=\overline{1,q}}^{\infty}$ в пространстве регулярных решений задачи (2), (3).

Отметим, что при $T = 0$ полнота системы $\{x_{h,n,j}\}$ в пространстве H с конечномерным дефектом при условии $A^{-1} \in \sigma_\infty$ доказана в работах [3, 5]. А при $\alpha = 0$ полнота системы $K\big(\widetilde{S}_0\big)$ и полнота элементарных убывающих решений доказаны в работе [6].

Обозначим

$$\Re_0 u \equiv P_0\left(d/dz\right) u(z) = -u''(z) + A^2 u(z), \quad \Re_1 u = A_1 u'(z), \quad u \in W^2_{2,\alpha}(T),$$

и

$$P_0(\lambda) = -\lambda^2 E + A^2, P_1(\lambda) = \lambda A_1.$$

Сперва исследуем некоторые аналитические свойства операторного пучка $P(\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* 1, 2 *и имеет место неравенство*

$$\|B_1\| < 2\cos\alpha. \tag{4}$$

Тогда на лучах $\Gamma_\pm = \left\{\lambda\colon \lambda = te^{\pm i(\pi/2+\alpha)},\, t \geq 0\right\}$ *имеет место оценка*

$$\sum_{\mathrm{j}=0}^{2} \left\|\lambda^{\mathrm{j}} A^{n-j} P^{-1}(\lambda)\right\| \leq \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\lambda \in \Gamma_+$, $\lambda = te^{i(\pi/2+\alpha)}$. Тогда операторный пучок $P_0(\lambda) = -\lambda^2 E + A^2 = t^2 e^{2i\alpha} + A^2$ обратим и из представления

$$P(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) = \left(E + P_1(\lambda) P_0^{-1}(\lambda)\right) P_0(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma_+, \tag{6}$$

получаем, что операторный пучок $P(\lambda)$ также обратим на луче Γ_+, если $\left\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right\| < \theta < 1$ при $\lambda \in \Gamma_+$. Поскольку при $\lambda \in \Gamma_+$ выполняется неравенство

$$\left\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq \left\|A_1 \lambda P_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq \|B_1\| \left\|\lambda A P_0^{-1}(\lambda)\right\|, \tag{7}$$

используя спектральное разложение оператора A, находим

$$\left\|\lambda A P_0^{-1}(\lambda)\right\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left|\mu t \left(t^2 e^{2i\alpha} + \mu^2\right)^{-1}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\mu \geq 0} \left|\mu t \left(t^4 + \mu^4 + 2\mu^2 t^2 \cos 2\alpha\right)^{-1/2}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\mu \geq 0} \left|\mu t \left(2\mu^2 t^2 + 2\mu^2 t^2 \cos 2\alpha\right)^{-1/2}\right| = \frac{1}{2\cos\alpha}. \tag{8}$$

Тогда с учетом этого неравенства из (7) получаем, что при $\lambda \in \Gamma_+$ имеет место оценка

$$\left\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq \|B_1\| \frac{1}{2\cos\alpha} = k(\alpha) < 1.$$

Таким образом, на луче Γ_+ резольвента $P^{-1}(\lambda)$ существует и из (6) следует, что

$$P^{-1}(\lambda) = P_0^{-1}(\lambda) \left(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right)^{-1}. \tag{9}$$

Отсюда имеем

$$\left\|\lambda^2 P^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|\lambda A P^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|A^2 P^{-1}(\lambda)\right\| \leq$$

$$\leq \left(\left\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|\lambda A P_0^{-1}(\lambda)\right\| + \left\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\|\right)\frac{1}{1-k(\alpha)}.$$

Таким образом, из неравенства (8) следует, что мы должны оценить нормы $\left\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\|$ и $\left\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\|$. Оценим, например, норму $\left\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\|$ (норма $\left\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\|$ оценивается аналогично). Очевидно, что

$$\left\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq \sup_{\mu\in\sigma(A)} \left|\mu^2 \left(t^4 + \mu^4 + 2\mu^2 t^2 \cos 2\alpha\right)^{-1/2}\right|.$$

При $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ $\cos 2\alpha \geq 0$, следовательно, при $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\left\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq 1,$$

а при $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos 2\alpha < 0$, следовательно,

$$\left\|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq \sup_{\mu\in\sigma(A)} \left|\mu^2 \left(t^4 + \mu^4 + 2\mu^2 t^2 \cos 2\alpha\right)^{-1}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha} \sup_{\mu\geq 0} \frac{\mu^2}{\sqrt{t^4+\mu^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\right\| \leq c_0(\alpha) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha}, & \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда операторный пучок* $P(\lambda)$ *имеет только дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Кроме того, если* $A^{-1} \in \sigma_\rho$, $0 < \rho < \infty$, *то* $A^2P^{-1}(\lambda)$ *представляется в виде двух целых функций конечного порядка* ρ *и минимального типа при порядке* ρ.

Доказательство. Имеем

$$P(\lambda) = -\lambda^2 E + \lambda A_1 + A^2 = \left(-\lambda^2 A^{-2} + \lambda B_1 A^{-1} + E\right) A^2 = (E + L(\lambda))\, A^2. \quad (10)$$

Поскольку коэффициенты пучка $L(\lambda)$ — вполне непрерывные операторы, а $L(0) + E = E$ обратим, первая часть леммы следует из леммы М. В. Келдыша [7]. С другой стороны, при $A^{-1} \in \sigma_\rho$, $A^{-2} \in \sigma_{\rho/2}$, $B_1 A^{-1} \in \sigma_\rho$, следовательно, используя лемму М. В. Келдыша [7, 8], получаем, что $(E + L(\lambda))^{-1}$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ. Из представления (10) следует, что это относится и к $A^2P^{-1}(\lambda)$.

Лемма доказана.

Теперь займемся разрешимостью задачи (2), (3).

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* $1-3$, *оператор* $E+TA$ *обратим в пространстве* $H_{3/2}$, *т. е.* $(E+TA)^{-1} \in L\left(H_{3/2}; H_{3/2}\right)$. *Тогда задача*

$$P_0\,(d/dz)\,u(z) = -u''(z) + A^2 u(z) = 0, \quad z \in S_\alpha, \tag{11}$$

$$u(0) - Tu'(0) = \varphi, \quad \varphi \in H_{3/2}, \tag{12}$$

регулярно разрешима.

Доказательство. При $x \in H_{3/2}$ вектор-функция $u_0(z) = e^{-zA}x$ является общим решением уравнения (11) из пространства $W^2_{2,\alpha}$. Из условия (12) следует, что $(E+TA)\,x = \varphi$ или $x = (E+TA)^{-1}\varphi$. Таким образом, вектор-функция $u_0(z) = e^{-zA}\,(E+TA)^{-1}\,\varphi$ будет регулярным решением задачи (11), (12).

Для решения задачи (2), (3) после замены $u(z) \to u(z) - u_0(z)$, где $u_0(z)$ — регулярное решение задачи (11), (12), получаем следующую краевую задачу:

$$P\,(d/dz)\,u(z) = f(z), \quad z \in S_\alpha, \tag{13}$$

$$u(0) - Tu'(0) = 0, \tag{14}$$

где $f(z) = A_1 A e^{-zA}\,(E+TA)^{-1}\,\varphi$.

Очевидно, что

$$\|f(z)\|_{H_{2,\alpha}} = \left\|A_1 A^{-1} A^2 e^{-zA}\,(E+TA)^{-1}\,\varphi\right\| \le$$

$$\le \|B_1\| \left\|A^2 e^{-zA}\,(E+TA)^{-1}\,\varphi\right\|_{H_{2,\alpha}} \le \left\|e^{-zA}\,(E+TA)^{-1}\,\varphi\right\|_{W^2_{2,\alpha}} \le$$

$$\le \mathrm{const}\left\|(E+TA)^{-1}\,\varphi\right\|_{3/2} \le \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{3/2}\,, \tag{15}$$

т. е. $f(z) \in H_{2,\alpha}$.

Таким образом, если мы докажем, что при любом $f(z) \in H_{2,\alpha}$ задача (13), (14) имеет регулярное решение, причем

$$\|u(z)\|_{W^2_{2,\alpha}} \le \mathrm{const}\,\|f(z)\|_{H_{2,\alpha}},$$

то мы докажем регулярную разрешимость задачи (2), (3) (регулярная разрешимость задачи (13), (14) определяется аналогично определению 2).

Сначала займемся регулярной разрешимостью простой задачи

$$P_0\,(d/dz)\,u(z) = f(z), \tag{16}$$

$$u(0) - Tu'(0) = 0. \tag{17}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1, 3 *и оператор* $E+TA$ *ограниченно обратим в* $H_{3/2}$. *Тогда оператор* $\Re_0 \equiv P_0\,(d/dz)$ *изоморфно отображает пространство* $W^2_{2,\alpha}(T)$ *на* $H_{2,\alpha}$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что $\Re_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $W^2_{2,\alpha}(T)$. С другой стороны, легко видеть, что вектор-функция

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} (-1)^k P_0^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda, \quad \Gamma_1 = \Gamma_+, \quad \Gamma_2 = \Gamma_-,$$

где $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функции $f(z)$, есть частное регулярное решение уравнения (16). Здесь мы принимаем во внимание, что $\hat{f}(\lambda)$ будет голоморфной вектор-функцией в секторе $\left\{\lambda\colon -\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \alpha\right\}$. Из леммы 1, в частности, следует, что $u_0(z) \in W_{2,\alpha}^2$. Тогда общее решение уравнения

$$P_0(d/dz)u(z) = u_0(z) + e^{-zA}x,$$

где $x \in H_{3/2}$. Отсюда, учитывая, что $u(0) - Tu'(0) = 0$, получаем относительно x уравнение

$$x + TAx = -u_0(0) - TAu'(0)$$

или

$$(E + TA)\, x = -\left(u_0(0) + TAu'(0)\right).$$

Так как $u_0(z) \in W_{2,\alpha}^2$, то $u_0(0) \in H_{3/2}$, $TAu'(0) \in H_{3/2}$, следовательно, $x = -(E+TA)^{-1}(u_0(0)+TAu'(0)) \in H_{3/2}$ и $u(z) \in W_{2,\alpha}^2(T)$. Таким образом, образ оператора $\Re_0$ совпадает с пространством $H_{2,\alpha}$. С другой стороны, при $u \in W_{2,\alpha}^2(T)$ имеет место неравенство

$$\|\Re_0 u\|_{H_{2,\alpha}} = \left\|-u'' + A^2 u\right\|_{H_{2,\alpha}} \le \operatorname{const} \|u\|_{W_{2,\alpha}^2},$$

поэтому из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $\Re_0$ является изоморфизмом.

Теорема доказана.

Для разрешимости задачи (13), (14) запишем его как уравнение

$$\Re u = \Re_0 u + \Re_1 u = f, \tag{18}$$

где $u \in W_{2,\alpha}^2(T)$, $f \in H_{2,\alpha}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* $1-3$, $E + TA$ *обратим в* $H_{3/2}$ *и имеет место неравенство*

$$\|B_1\| < \mathrm{N}_{1,\mathrm{T}}^{-1}(\alpha), \tag{19}$$

где

$$\mathrm{N}_{1,\mathrm{T}}(\alpha) = \sup_{0 \ne u \in W_{2,\alpha}^2(T)} \|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \|\Re_0 u\|_{H_{2,\alpha}}^{-1}. \tag{20}$$

Тогда уравнение (18) *корректно и однозначно разрешимо.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что нормы $\|u\|_{W_{2,\alpha}^2}$ и $\|\Re_0 u\|_{H_{2,\alpha}}$ эквивалентны в пространстве $W_{2,\alpha}^2(T)$, поэтому по теореме о промежуточных производных число, определенное равенством (20), конечно. Поскольку оператор $\Re_0$ изоморфно отображает пространство $W_{2,\alpha}^2(T)$ на $H_{2,\alpha}$, после замены $u = \Re_0^{-1} v$ получаем относительно v уравнение

$$v + \Re_1 \Re_0^{-1} v = f$$

в $H_{2,\alpha}$. А в силу того, что при любом $v \in H_{2,\alpha}$

$$\left\|\Re_1\Re_0^{-1}v\right\|_{H_{2,\alpha}} = \|A_1u'\|_{H_{2,\alpha}} \le \|B_1\|\,\|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \le$$

$$\le \|B_1\|\,N_{1,T}(\alpha)\,\|\Re_0u\|_{H_{2,\alpha}} = N_{1,T}(\alpha)\,\|B_1\|\,\|v\|_{H_{2,\alpha}} < k_1\,\|v\|_{H_{2,\alpha}}\,,$$

где k_1 <1, оператор $E+\Re_1\Re_0^{-1}$ обратим в $H_{2,\alpha}$ и

$$u = \Re_0^{-1}\big(E+\Re_1\Re_0^{-1}\big)^{-1}f.$$

Отсюда следует, что

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^2} \le \mathrm{const}\,\|f\|_{H_{2,\alpha}}.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы видно, что для нахождения условия разрешимости задачи (13), (14) надо найти точное значение $N_{1,T}(\alpha)$ или оценить его сверху.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $1-3$, *оператор* $E+TA$ *обратим в* $H_{3/2}$. *Тогда имеет место следующая оценка*:

$$N_{1,T}(\alpha) \le \alpha_T =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\cos\alpha} & \textit{при}\ \ \operatorname{Re}AT \ge 0\ \ \textit{в}\ \ H_{1/2}, \\ \dfrac{1}{2\cos\alpha}\left(1-4\left|\inf\limits_{\|y\|_{1/2}=1}\dfrac{Re(ATy,y)_{1/2}}{\|ATy\|_{1/2}^2+1}\right|^2\right)^{-1/2} & \textit{в противном случае}. \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство. Сначала покажем, что при $u\in W_{2,\alpha}^2(T)$ и $u'(0)=y\in H_{1/2}$ справедливо равенство

$$\|\Re_0u\|_{H_{2,\alpha}}^2 = \|u\|_{W_{2,\alpha}^2}^2 + 2\cos2\alpha\,\|Au'\|_{H_{2,\alpha}}^2 + 2\cos\alpha Re\,(ATy,y)_{1/2}\,. \tag{22}$$

Действительно,

$$\|\Re_0u\|_{H_{2,\alpha}}^2 = \left\|-u''(z)+A^2u(z)\right\|_{H_{2,\alpha}}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\left\|-u_\alpha''(t)e^{-2i\alpha}+A^2u_\alpha(t)\right\|_{L_2(R_+;H)}^2 +$$

$$+\left\|-u_{-\alpha}(t)e^{2i\alpha}+A^2u_{-\alpha}(t)\right\|_{L_2(R_+;H)}^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\|u_\alpha''(t)\|_{L_2(R_+;H)}^2 + \left\|A^2u_\alpha(t)\right\|_{L_2(R_+;H)}^2 +$$

$$+\left\|u_{-\alpha}''(t)\right\|_{L_2(R_+;H)}^2 + \left\|A^2u_{-\alpha}(t)\right\|_{L_2(R_+;H)}^2\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(2\operatorname{Re}\left(-u_\alpha''(t)e^{-2i\alpha},A^2u_\alpha(t)\right)_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+2\operatorname{Re}\left(u_{-\alpha}''(t)e^{2i\alpha},A^2u_{-\alpha}(t)\right)_{L_2(R_+;H)}\Big). \tag{23}$$

После интегрирования по частям имеем

$$-2\,\mathrm{Re}\left(u''_{\alpha}(t)e^{-2i\alpha}, A^2u_{\alpha}(t)\right)_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(A^{1/2}u'_{\alpha}(0)e^{-2i\alpha}, A^{3/2}u_{\alpha}(0)\right) + 2\cos 2\alpha \left\|Au'_{\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(A^{1/2}u'(0)e^{-i\alpha}, A^{3/2}u(0)\right) + 2\cos 2\alpha \left\|Au'_{\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \qquad (24)$$

Аналогично получаем

$$-2\,\mathrm{Re}\left(u''_{-\alpha}(t)e^{2i\alpha}, A^2u_{-\alpha}(t)\right)_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(A^{1/2}u'(0)e^{i\alpha}, A^{3/2}u(0)\right) + 2\cos 2\alpha \left\|Au'_{-\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \qquad (25)$$

Учитывая (24) и (25), из (23) имеем

$$\left\|\Re_0 u\right\|^2_{H_{2,\alpha}} = \|u\|^2_{W^2_{2,\alpha}} + 2\cos 2\alpha \left\|Au'\right\|^2_{H_{2,\alpha}} + 2\cos\alpha\,\mathrm{Re}\left(A^{1/2}u'(0), A^{3/2}u(0)\right) =$$

$$= \|u\|^2_{W^2_{2,\alpha}} + 2\cos 2\alpha \left\|Au'\right\|^2_{H_{2,\alpha}} + 2\cos\alpha\,\mathrm{Re}\left(A^{1/2}u'(0), A^{3/2}Tu'(0)\right) =$$

$$= \|u\|^2_{W^2_{2,\alpha}} + 2\cos 2\alpha \left\|Au'\right\|^2_{H_{2,\alpha}} + 2\cos\alpha\,\mathrm{Re}\,(ATy, y)_{1/2}.$$

Теперь предположим, что параметр s принадлежит $\left[0, 4\cos^2\alpha\right)$, и определим операторный пучок в H_2:

$$\Phi\left(\lambda; s; A\right) = \lambda^2 E + \sqrt{4\cos^2\alpha - s}\,\lambda A + A^2.$$

Используя пучок $\Phi(\lambda; s; A)$, получаем следующее тождество, которое справедливо при всех $s \in \left[0, 4\cos^2\alpha\right)$ и $u \in W^2_{2,\alpha}(T)$:

$$\left\|\Re_0 u\right\|^2_{H_{2,\alpha}} - s\left\|Au'\right\|^2_{H_{2,\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|\Phi\left(d/dt; s; A\right)u_{\alpha}(t)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \right.$$

$$\left. + \left\|\Phi\left(d/dt; s; A\right)u_{-\alpha}(t)\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right) + Q(s, y), \quad y = u'(0). \qquad (26)$$

Здесь

$$Q(s, y) = 4\cos\alpha\,\mathrm{Re}\,(ATy, y)_{1/2} + \sqrt{4\cos^2\alpha - s}\left(\|ATy\|^2_{1/2} + \|y\|^2_{1/2}\right). \qquad (27)$$

Действительно,

$$\left\|\Phi\left(d/dt; s; A\right)u_{\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|u''_{\alpha} + \sqrt{4\cos^2\alpha - s}\,Au'_{\alpha} + A^2u_{\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \left\|u''_{\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|A^2u_{\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left(4\cos^2\alpha - s\right)\left\|Au'_{\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left(u''_{\alpha}, A^2u_{\alpha}\right)_{L_2(R_+;H)} + \sqrt{4\cos^2\alpha - s}\,2\,\mathrm{Re}\left(u''_{\alpha}, Au'_{\alpha}\right)_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+\sqrt{4\cos^2\alpha - s}2\operatorname{Re}\left(Au'_\alpha, A^2u_\alpha\right)_{L_2(R_+;H)}. \tag{28}$$

После интегрирования по частям имеем

$$(u''_\alpha, Au'_\alpha)_{L_2(R_+;H)} = -\left\|A^{1/2}u'_\alpha(0)\right\|^2 - (Au'_\alpha, u''_\alpha)_{L_2(R_+;H)},$$

т. е.

$$2\operatorname{Re}(u''_\alpha, Au'_\alpha) = -\left\|A^{1/2}u'_\alpha(0)\right\|^2 = -\left\|A^{1/2}e^{i\alpha}u'(0)\right\|^2 = -\|y\|^2_{1/2}. \tag{29}$$

Далее,

$$\operatorname{Re}\left(u''_\alpha, A^2u_\alpha\right) = -\operatorname{Re}\left(A^{1/2}u'_\alpha(0), A^{3/2}u(0)\right) - \|Au'_\alpha\|^2 =$$

$$= -\operatorname{Re}\left(A^{1/2}e^{i\alpha}u'(0), A^{3/2}Tu'(0)\right) -$$

$$-\|Au'_\alpha\|^2_{L_2(R_+;H)} = -\operatorname{Re}e^{i\alpha}(y, ATy)_{1/2} - \|Au'_\alpha\|^2_{L_2(R_+;H)}, \tag{30}$$

$$2\operatorname{Re}\left(Au'_\alpha, A^2u_\alpha\right) = -\left\|A^{3/2}u_\alpha(0)\right\|^2 = -\left\|A^{3/2}u(0)\right\|^2 =$$

$$= -\left\|A^{3/2}Tu'(0)\right\|^2 = -\|ATy\|^2_{1/2}. \tag{31}$$

Таким образом, учитывая равенства (29) – (31), из равенства (28) получаем

$$\|\Phi(d/dt; s; A)\, u_\alpha\|^2_{L_2(R_+;H)} = \|u_\alpha\|^2_{W_2^2(R_+;H)} + (2\cos 2\alpha - s)\|Au'_\alpha\|^2_{L_2(R_+;H)} -$$

$$-2\operatorname{Re}e^{i\alpha}(ATy, y)_{1/2} - \sqrt{4\cos^2\alpha - s}\left(\|y\|^2_{1/2} + \|ATy\|^2_{1/2}\right). \tag{32}$$

Аналогично

$$\|\Phi(d/dt; s; A)\, u_{-\alpha}\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \|u_{-\alpha}\|^2_{W_2^2(R_+;H)} + (2\cos 2\alpha - s)\left\|Au'_{-\alpha}\right\|^2_{L_2(R_+;H)} -$$

$$-2\operatorname{Re}e^{-i\alpha}(ATy, y)_{1/2} - \sqrt{4\cos^2\alpha - s}\left(\|ATy\|^2_{1/2} + \|y\|^2_{1/2}\right). \tag{33}$$

Принимая во внимание (32) и (33), из равенства (22) находим

$$\frac{1}{2}\left(\|\Phi(d/dt; s; A)\, u_\alpha\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|\Phi(d/dt; s; A)\, u_{-\alpha}\|^2_{L_2(R_+;H)}\right) =$$

$$= \|\Re_0 u\|^2_{H_{2,\alpha}} - s\|Au'\|^2_{H_{2,\alpha}} -$$

$$-4\cos\alpha\operatorname{Re}(ATy, y)_{1/2} - \sqrt{4\cos^2\alpha - s}\left(\|ATy\|^2_{1/2} + \|y\|^2_{1/2}\right),$$

следовательно, равенство (26) доказано. Из равенства (26) следует, что если $\operatorname{Re}(ATy, y)_{1/2} \geq 0$, то $Q(s, y) \geq 0$ при $s \in \left[0, 4\cos^2\alpha\right)$. Следовательно, при $s \in \left(0, 4\cos^2\alpha\right)$ для любого $u \in W^2_{2,\alpha}(T)$

$$\|\Re_0 u\|^2_{W^2_{2,\alpha}} - s\,\|Au'\|^2_{H_{2,\alpha}} \geq 0.$$

Значит, при $s \in \big(0, 4\cos^2\alpha\big)$ для любого $u \in W^2_{2,\alpha}(T)$ выполняется неравенство

$$\|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \leq \frac{1}{\sqrt{s}}\,\|\Re_0 u\|_{H_{2,\alpha}}.$$

Переходя к пределу при $s \to 4\cos^2\alpha$, получаем

$$\|Au'\|_{H_{2,\alpha}} \leq \frac{1}{2\cos\alpha}\,\|\Re_0 u\|_{H_{2,\alpha}},$$

т. е.

$$N_{1,T}(\alpha) \leq \alpha_T = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Теперь предположим обратное, т. е. существует вектор $y_0 \in H_{1/2}$ такой, что $\operatorname{Re}(ATy_0, y_0) < 0$. В этом случае легко видеть, что $\min\limits_{\|y\|_{1/2}=1} Q\big(\alpha_T^{-2}, y\big) = 0$. Очевидно, что $\alpha_T^{-2} \in \big(0, 4\cos^2\alpha\big)$. С другой стороны, $Q(0,y) > 0$. Действительно, при $s = 0$

$$Q(0,y) = 4\cos\alpha\operatorname{Re}(ATy,y)_{1/2} + 2\cos\alpha\left(\|ATy\|^2_{1/2} + \|y\|^2_{1/2}\right) \geq$$

$$\geq 2\cos\alpha\left(\|ATy\|^2_{1/2} + \|y\|^2_{1/2}\right) - 4\cos\alpha\left|(ATy,y)_{1/2}\right|^2 \geq$$

$$\geq 2\cos\alpha\left(\|ATy\|^2_{1/2} + \|y\|^2_{1/2}\right) - 2\cos\alpha\left(\|ATy\|^2_{1/2} + \|y\|^2_{1/2}\right) = 0,$$

но по теореме Коши – Буняковского здесь равенство имеет место тогда и только тогда, когда 1) $\operatorname{Im}(ATy,y)_{1/2} = 0$; 2) $ATy = \lambda y$; 3) $\|ATy\| = \|y\|$. Тогда получаем, что AT — самосопряженный оператор в $H_{1/2}$, поэтому $\lambda = \pm 1$. Но при $ATy = y$ имеем

$$Q(0,y) = 4\cos\alpha\|y\|^2_{1/2} + 4\cos\alpha\|y\|^2_{1/2} = 8\cos\alpha\|y\|^2_{1/2} > 0.$$

Поэтому $\lambda = -1$. В этом случае $ATy = -y$, т. е. существует вектор $y \in H_{1/2}$ такой, что $ATy + y = 0$. Тогда, полагая $y = A\varphi$, где $\varphi \in H_{3/2}$, получаем $A\varphi + ATA\varphi = 0$ или $\varphi + TA\varphi = 0$ при $\varphi \in H_{3/2}$, а это противоречит условию обратимости $E + TA$ в $H_{3/2}$. Таким образом, $Q(0,y) > 0$ при всех $y \in H_{1/2}$. Тогда при малых $s > 0$ $\big(s \in \big(0, 4\cos^2\alpha\big)\big)$ $Q(s,y) > 0$. С другой стороны, если $N_{1,T}(\alpha) > \dfrac{1}{2\cos\alpha}$, то $N_{1,T}^{-2}(\alpha) \in \big(0, 4\cos^2\alpha\big)$. Тогда при $s \in \Big(N_{1,T}^{-2}(\alpha), 4\cos^2\alpha\Big)$, по определению $N_{1,T}$, существует вектор-функция $u_s(z) \in W^2_{2,\alpha}(T)$ такая, что

$$\big\|\Re_0 u_s(z)\big\|^2_{H_{2,\alpha}} - s\big\|Au_s'(z)\big\|^2_{H_{2,\alpha}} < 0.$$

Следовательно, для таких s из формулы (26) имеем $\inf\limits_{\|y\|_{1/2}=1} Q(s,y) < 0$.

Поскольку $\inf\limits_{\|y\|_{1/2}=1} Q\left(\alpha_T^{-2}, y\right) = 0$, $N_{1,T}^{-2} \geq \alpha_T^{-2}$, следовательно, $N_{1,T}(\alpha) \leq \alpha_T$.

Теорема доказана.

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1 – 3, *оператор* $E+TA$ *обратим в* $H_{3/2}$ *и оператор* B_1 *удовлетворяет условию*

$$\|B_1\| \leq \alpha_T^{-1/2},$$

где α_T *определено из теоремы* 3. *Тогда задача* (2), (3) *регулярно разрешима.*

Теперь докажем теорему о полноте системы $K\big(\widetilde{S}_\alpha\big)$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 4 *и одно из следующих условий*: а) $A^{-1} \in \sigma_\rho,\ 0 < \rho \leq \dfrac{\pi}{\pi - 2\alpha}$, *или* б) $B_1 \in \sigma_\infty,\ A^{-1} \in \sigma_\rho,\ 0 < \rho < \infty$. *Тогда система* $K\big(\widetilde{S}_\alpha\big)$ *полна в* $H_{3/2}$.

Доказательство. Допустим противное. Пусть система $K(\widetilde{S}_\alpha) = \{\psi_{h,n,j}\}$ не полна в $H_{3/2}$. Тогда существует вектор $\psi \in H_{3/2}$ такой, что $(\psi, \psi_{h,n,j}) = 0,\ n = \overline{1,\infty},\ h = \overline{1, m_{n,j}},\ j = \overline{1, q_n}$. В этом случае из разложения резольвенты в окрестности характеристических чисел (см. [7, 8]) следует, что вектор-функция $R(\lambda) = \left(A^{3/2}(E - T\bar{\lambda})P^{-1}\left(\bar{\lambda}\right)\right)^* \left(A^{3/2}\psi\right)$ будет голоморфной вектор-функцией в секторе $\widetilde{S}_\alpha = \big\{\lambda\colon\ |\arg\lambda - \pi| < \alpha\big\}$. С другой стороны, при любом $\varphi \in H_{3/2}$ задача (2), (3) регулярно разрешима. Поэтому решение задачи (2), (3) можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^k \int\limits_{\Gamma_k} \hat{u}(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda,$$

где $\hat{u}(\lambda) = P^{-1}(\lambda)\big((\lambda E + A_1)u(0) + u'(0)\big)$. Поскольку $A^{-1} \in \sigma_\rho$, из леммы 2 следует, что

$$(u(z) - Tu'(z), \psi)_{3/2} = \Big(A^{3/2}u(z) - A^{3/2}Tu'(z), A^{3/2}\psi\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k \int\limits_{\Gamma_k} \Big(\big(\lambda E + A_1\big)u(0) + u'(0), \big(A^{3/2}\left(E - \lambda T\right)P^{-1}(\lambda)\big)^* A^{3/2}\psi\Big) e^{\lambda z} dz.$$

Используя в случае а) леммы 1 и 2, а в случае б) лемму 2 и лемму М. В. Келдыша [7], получаем, что подынтегральная функция, стоящая перед $e^{\lambda z}$, является полиномом, поэтому его интеграл равен нулю при $z \in S_\alpha,\ z \neq 0$. Далее, переходя к пределу при $z \to 0$, получаем $(\varphi, \psi)_{3/2} = 0\ \forall \varphi \in H_{3/2}$. Следовательно, $\psi = 0$, т. е. $K(\widetilde{S}_\alpha)$ полна в $H_{3/2}$.

Теперь докажем полноту элементарных голоморфных в секторе S_α решений.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы* 5. *Тогда система элементарных голоморфных в секторе* S_α *решений полна в пространстве регулярных решений задачи* (2), (3).

Доказательство. Очевидно, что пространство $W(P)$ голоморфных регулярных решений задачи (2), (3) замкнуто. Далее, из теорем о следах и единственности регулярных решений следует, что

$$c_2\,\|\varphi\|_{3/2} \leq \|u\|_{W^2_{2,\alpha}} \leq c_1\,\|\varphi\|_{3/2}\,.$$

Поскольку система $K(\widetilde{S}_\alpha)$ полна в $H_{3/2}$, для заданного $\varepsilon > 0$ существуют натуральное число N и числа $c^N_{h,n,j}\left(\varepsilon\right)$ такие, что

$$\left\|\varphi - \sum_{n=1}^{N} \sum_{(h,j)} c_{h,n,j}^{N}(\varepsilon)\, \psi_{h,n,j}\right\|_{3/2} < \varepsilon.$$

Тогда, учитывая, что $\varphi = u(0) - Tu'(0)$, а $\psi_{h,n,j} = u_{h,n,j}(0) - Tu'_{h,n,j}(0)$, из последнего неравенства получаем

$$\left\|u(z) - \sum_{n=1}^{N} \sum_{(h,j)} c_{h,n,j}^{N}(\varepsilon)\, u_{h,n,j}(z)\right\|_{W_{2,\alpha}^{2}} < \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = c_1\varepsilon.$$

Теорема доказана.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. *Гасымов М. Г.* О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 3. – С. 505 – 508.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
5. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 2. – С. 81 – 145.
6. *Гасымов М. Г., Мирзоев С. С.* О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 4. – С. 651 – 661.
7. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1971. – Вып. 4 (160). – С. 15 – 41.
8. *Гасымов М. Г.* О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков // Изв. АН. АрмССР. Математика. – 1971. – **6**, № 2-3. – С. 131 – 147.

Получено 27.08.09