УДК 517.5

В. П. Моторный, С. В. Гончаров (Днепропетр. нац. ун-т),
П. К. Нитиема (Ун-т Буркина-Фасо, Уагадугу)

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЯКОБИ

The convergence of the Fourier – Jacobi series in the spaces $L_{p,A,B}$ is investigated in the case where the Lebesgue constants are unbounded.

Досліджується збіжність рядів Фур'є – Якобі у просторах $L_{p,A,B}$ у випадку, коли константи Лебега необмежені.

Пусть $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$. Через $L_{p,A,B}$ обозначим пространство измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f, для которых $fw^{1/p}\in L^p$, где весовая функция $w(x)=(1-x)^A(1+x)^B$, $A,B>-1$. Норма $\|f\|_{p,A,B}=\|fw^{1/p}\|_p$. Если $A=B=0$, то $\|f\|_{p,0,0}=\|f\|_p=\left\{\int_{-1}^1|f(x)|dx\right\}^{1/p}$.

Через $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ будем обозначать частную сумму порядка n ряда Фурье – Якоби функции $f\in L_{p,\alpha,\beta}$. Частные суммы $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ можно рассматривать как оператор, действующий в некотором подпространстве X пространства L_ρ^1. Норма этого оператора

$$\|S_n^{\alpha,\beta}\|_X=\sup_{\|f\|_X\le 1}\|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_X$$

называется константой Лебега. В силу неравенства Лебега

$$\big\|f-S_n^{\alpha,\beta}(f)\big\|_X\le\big(1+\|S_n^{\alpha,\beta}\|_X\big)E_n(f)_X, \qquad (1)$$

где $E_n(f)_X$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве X. Ограниченность констант Лебега влечет сходимость ряда Фурье – Якоби для любой функции в пространстве X, если в пространстве X имеет место теорема Вейерштрасса, а также определяет порядок сходимости частных сумм ряда Фурье – Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ к f в пространстве X. В работах Х. Полларда [1, 2], Дж. Неймана и У. Рудина [3], Г. Винга [4] и Б. Маккенхоупта [5] были выделены пространства интегрируемых с весом функций, в которых константы Лебега ограничены. Наиболее общий результат получен Б. Маккенхоуптом и формулируется он следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $1<p<\infty$. Тогда для того чтобы $\|S_n^{\alpha,\beta}\|_{p,A,B}$ были ограничены, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\big|(\alpha+1)/2-A/p-1/p\big|<\min(1/4,(\alpha+1)/2), \qquad (2)$$

$$\big|(\beta+1)/2-B/p-1/p\big|<\min(1/4,(\beta+1)/2). \qquad (3)$$

В [6] показано, что для того чтобы каждая функция $f\in L_{p,A,B}$ имела ряд Фурье – Якоби, соответствующий весу ρ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(\alpha+1)/2-(A+1)/p>-(\alpha+1)/2, \qquad (\beta+1)/2-(B+1)/p>-(\beta+1)/2, \qquad (4)$$

если $p > 1$, а при $p = 1$ знак $>$ в (4) следует заменить на $\geq$. Поскольку $A + 1 > 0$, $B + 1 > 0$, то левые части неравенств (4) меньше соответственно $(\alpha + 1)/2$ и $(\beta + 1)/2$. Поэтому вопрос о сходимости рядов Фурье – Якоби в пространствах L^p_w следует рассматривать в случаях

$$\big|(\alpha+1)/2 - (A+1)/p\big| < (\alpha+1)/2, \qquad \big|(\beta+1)/2 - (B+1)/p\big| < (\beta+1)/2. \tag{5}$$

Отметим, что если $\alpha, \beta \in (-1; -1/2]$ и $1 < p < \infty$, то в силу (5) условия (2), (3) заведомо имеют место. Поэтому оценку роста констант Лебега сумм Фурье – Якоби следует находить при $\max\{\alpha, \beta\} > -1/2$.

Первые работы, связанные с разложением функций по ортогональным на отрезке $[-1; 1]$ алгебраическим многочленам, в основном посвящены многочленам Лежандра. Это прежде всего работы [1 – 4, 7, 8]. В работе [8] для оценки уклонения в пространстве $C_{[-1;1]}$ сумм Фурье – Лежандра от непрерывных или дифференцируемых функций была использована теорема А. Ф. Тимана об усилении теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами на отрезке. Поведение констант Лебега и функций Лебега сумм Фурье – Якоби в пространстве $C_{[-1;1]}$ было исследовано во многих работах (см., например, [9 – 15]). В этом случае точные по порядку оценки приближений суммами Фурье – Якоби непосредственно следуют из неравенства Лебега (1). Как оказалось (см. [16 – 20]), в случае приближений суммами Фурье – Лежандра, когда $1 \leq p \leq 4/3$ и $p = 4$, неравенство Лебега приводит к грубым оценкам. Это можно объяснить тем, что с улучшением дифференциально-разностных свойств функции рост констант Лебега, соответствующих многочленам Лежандра, меньше влияет на порядок стремления к нулю величины $\|f - S_n^{0,0}(f)\|_{L_p}$. Для функций с достаточно хорошими дифференциально-разностными свойствами суммы Фурье – Лежандра осуществляют приближение в L_p при $1 < p \leq 4/3$ по порядку не хуже наилучшего. Этот результат был установлен с помощью обобщенных констант Лебега, которые введены в [16, 17] при $1 \leq p \leq 4/3$ и $p \geq 4$ следующим образом:

$$D_{n,p,\theta}^{(0,0)} = \sup_{\|f/\sigma(n,\theta)\|_p \leq 1} \big\|S_n^{(0,0)}(f)\big\|_p,$$

где

$$\sigma(n, \theta, x) = \big(\sqrt{1 - x^2} + 1/n\big)^{\theta}, \quad \theta > 0.$$

Оценки $\|S_n^{\alpha,\beta}\|_{L_p}$ для $1 \leq p \leq 4/3$ и $p \geq 4$ были получены в работах [16, 17, 19]:

$$\|S_n^{0,0}\|_{L_p} \asymp C_{p,r} \begin{cases} n^{2/p - 3/2}, & \text{если } 1 \leq p < 4/3, \\ \ln(n+1), & \text{если } p = 4/3 \text{ или } p = 4, \\ n^{1/p - 2/p}, & \text{если } p > 4. \end{cases} \tag{6}$$

Позже в [19] в случаях $1 \leq p \leq 4/3$ и $p \geq 4$ исследовались обобщенные константы Лебега вида

$$B_{n,p,\theta}^{(0,0)} = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|S_n^{(0,0)}(f)\sigma(n,\theta)\|_q, \quad \text{где} \quad 1p + 1/q = 1, \quad \theta > 0.$$

Известно, что поведение частных рядов Фурье – Якоби на отрезке $[a;b]\subset(-1;1)$ подобно поведению частных сумм рядов Фурье по тригонометрической системе. Например, $\int_a^b \left|f(x)-S_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)\right|^p dx \to 0$ при $n\to\infty$ для любого $p\in(1;\infty)$. Следовательно, особенности поведения частных рядов Фурье – Якоби на отрезке $[-1,1]$, такие как сходимость, неограниченный рост констант Лебега, определяются свойствами многочленов Якоби на концах отрезка $[-1,1]$. Этим замечанием можно мотивировать введение обобщенных констант Лебега. Оказалось, что в случаях, когда обобщенные константы Лебега ограничены (а константы Лебега неограничены) частные суммы рядов Фурье – Лежандра функции f могут осуществлять приближение функции f по порядку не хуже наилучшего. Это следует из неравенства Лебега и возможности приблизить [18] функцию в пространстве L^p алгебраическими многочленами с весом $\left(\sqrt{1-x^2}+1/n\right)^{-\theta}$, по порядку не хуже наилучшего. Действительно, поскольку $S_n^{0,0}(P_n;x)=P_n(x)$ для любого многочлена $P_n(x)$ степени не выше n, а из определения констант $D_{n,p,\theta}^{(0,0)}$ для любой функции $f\in L_p$ следует неравенство

$$\|S_n^{0,0}(f)\|_p \le D_{n,p,\theta}^{(0,0)}\|f/\sigma(n,\theta)\|_p,$$

то

$$\left\|f-S_n^{0,0}(f)\right\|_p \le \|f-P_n\|_p+\left\|S_n^{0,0}(f-P_n)\right\|_p \le$$

$$\le \|f-P_n\|_p + D_{n,p,\theta}^{(0,0)}\left\|\frac{f-P_n}{\sigma(n,\theta)}\right\|_p. \qquad (7)$$

Через $H_p^{r+\gamma}$, $r=0,1,\ldots$, $0<\gamma\le 1$, обозначим класс функций, заданных на отрезке $[-1,1]$ и имеющих там r-ю производную $f^{(r)}(x)\in L_p$, для которой при любом $0<h<1$ выполняется неравенство

$$\left\{\int_{-1}^{1-h}|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x+h)|^p\,dx\right\}^{1/p} \le Ch^\gamma.$$

Известно следующее утверждение [18].

Предложение 1. *Для любой функции $f\in H_p^{r+\gamma}$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени не выше $n>2$ таких, что*

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r+\gamma}}\right\|_p \le \frac{C\ln^{1/p} n}{n^{r+\gamma}}. \qquad (8)$$

При этом если под знаком нормы заменить $r+\gamma$ на меньшее число, то в правой части неравенства $\ln n$ можно опустить.

В работе [21] получен следующий результат.

Предложение 2. *Многочлены $P_n(x)$ в предложении* 1 *можно выбрать так, что в знаменателе дроби, содержащейся в левой части неравенства* (8), *слагаемое $1/n$ можно опустить.*

С использованием неравенства (7) и предложения 1 в [16, 17] получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le 4/3$, $f \in H_p^{r+\gamma}$, *где* $\gamma > 1/p - 3/4$, *если* $r = 0$. *Тогда*

$$\|f(x) - S_n^{(o,o)}\|_p \le$$

$$\le C_{p,r} \begin{cases} \dfrac{\ln(n+1)}{n^{2\gamma-2/p+3/2}}, & \text{если } 2/p - 3/2 \ge \gamma > 1/p - 3/4,\ r = 0, \\ n^{-r-\mu}, & \text{если } r + \gamma > 2/p - 3/2. \end{cases} \tag{9}$$

В настоящей работе изучаются обобщенные константы Лебега для частных сумм Фурье – Якоби в пространствах $L_{p,A,B}$ и оценки уклонений частных сумм Фурье – Якоби от функций в пространствах $L_{p,A,B}$. Приведем примеры пространств и классы функций, имеющих достаточно высокую гладкость, для которых частные суммы Фурье – Якоби осуществляют приближение по порядку не хуже наилучшего. Заметим, что это возможно тогда, когда $(\alpha+1)/2-(A+1)/p \in (-(\alpha+1)/2; -1/4]$ и $(\beta+1)/2-(B+1)/p \in (-(\beta+1)/2; -1/4]$. Если же $(\alpha+1)/2-(A+1)/p \in [1/4; (\alpha+1)/2)$ или $(\beta+1)/2-(B+1)/p \in [1/4; (\beta+1)/2)$, то порядок приближения суммами Фурье – Якоби, как и для сумм Фурье – Лежандра, определяется ростом констант Лебега.

Для любых n, p, θ, δ, α, β, A, B положим

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{\|f/\rho(n,\theta,\delta)\|_{p,A,B} \le 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p,A,B},$$

где $\rho(n,\theta,\delta,x) = \left(\sqrt{1-x}+1/n\right)^{\theta}\left(\sqrt{1+x}+1/n\right)^{\delta}$, θ, $\delta \in R^1$. Эти константы совпадают с классическими константами Лебега, если $\gamma = \delta = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $\max\{\alpha,\beta\} > -1/2$, *для чисел* α, β, A, B *выполняется условие* (5) *и* $\theta \ge \mu = (2A+2)/p - \alpha - 3/2 \ge 0$, $\delta \ge \nu = (2B+2)/p - \beta - 3/2 \ge 0$. *Тогда имеют место неравенства*

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} \le \begin{cases} C_{\theta,\delta}, & \text{если } \theta > \mu,\ \delta > \nu, \\ C_{\mu,\nu} \ln^{1/q} n, & \text{если } \theta = \mu \text{ или } \delta = \nu \text{ и } \mu, \nu > 0, \\ C \ln(n+1), & \text{если } \theta = \mu = 0 \text{ или } \delta = \nu = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Чтобы доказать теорему 3, необходимы следующие вспомогательные утверждения.

Для многочленов $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ справедливы равенства (см. [22, с. 71])

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(-x), \tag{11}$$

а также неравенства (см. [22], теорема 7.32.2)

$$\left|P_n^{\alpha,\beta}(x)\right| \le C n^{-1/2}(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}, \quad 0 < x < 1. \tag{12}$$

Положим

$$l_k^{\alpha,\beta} = \|P_n^{\alpha,\beta}\|_{2,\alpha,\beta}.$$

Для любой функции $f \in L_\rho^p$ ряд Фурье – Якоби будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\rho} P_k^{\alpha,\beta}(x),$$

где $c_k^{\rho} = 1/l_k^{\alpha,\beta} \int_{-1}^{1} f(x) P_k^{\alpha,\beta}(x) dx$ — коэффициенты Фурье функции f. Частную сумму $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ ряда Фурье – Якоби можно представить в виде

$$S_n^{\alpha,\beta}(f; x) = \int_{-1}^{1} K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y) f(y) (1-y)^{\alpha} (1+y)^{\beta}\, dy, \tag{13}$$

а ядро $K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)$ — в виде [5]

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \alpha_n h_1(n, x, y) + \beta_n (h_2(n, x, y) + h_3(n, x, y)),$$

где

$$h_1(n, x, y) = (n+1) P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y), \tag{14}$$

$$h_3(n, y, x) = h_2(n, x, y) \frac{n(1-y^2) P_n^{\alpha,\beta}(x) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(y)}{x-y}, \tag{15}$$

а α_n, β_n — ограниченные последовательности.

Также будем использовать предложения 3 – 5, доказанные в [5].

Предложение 3. *Если* $1 < p < \infty$, $r, s < -1$ *и* $F(x) = \int_0^x |f(t)| dt$, *то существует постоянная* C, *не зависящая от* $f(x)$, *такая, что*

$$\int_0^{\infty} x^r (1+x)^{s-r} F^p(x) dx \le C \int_0^{\infty} x^{p+r} (1+x)^{s-r} |f(x)|^p dx.$$

***Замечание* 1.** Всюду в дальнейшем через C будем обозначать абсолютные константы, а через C_p, C_θ, $C_{p,\theta}$ — величины, зависящие от указанных индексов, хотя их значения в разных местах могут быть разными.

Предложение 4. *Если* $1 < p < \infty$, $r, s > -1$ *и* $F(x) = \int_x^{\infty} |f(t)| dt$, *то существует постоянная* C, *не зависящая от* $f(x)$, *такая, что*

$$\int_0^{\infty} x^r (1+x)^{s-r} F^p(x) dx \le C \int_0^{\infty} x^{p+r} (1+x)^{s-r} |f(x)|^p dx.$$

Предложение 5. *Пусть* $\omega(x)$ — *положительная функция, удовлетворяющая неравенству*

$$\omega(2^n) \le B\omega(x) \le B^2 \omega(2^n), \quad x \in [2^n; 2^{n+1}], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где B — *некоторая постоянная, и* $\tilde{f}(x) = \mathrm{V.P.} \int_{x/2}^{3x/2} \frac{f(y)}{x-y} dy$. *Тогда существует постоянная* C, *зависящая только от* $f(x)$ *и такая, что*

$$\int_0^{\infty} \left|\tilde{f}(x)\right|^p \omega(x) dx \le C \int_0^{\infty} |f(x)|^p \omega(x) dx, \quad 1 < p < \infty.$$

В силу (11), чтобы доказать теорему 3, достаточно оценить интегралы

$$I_k = \int_{-1}^{1} \left| \int_{0}^{1} f(y) h_k(n,x,y) \rho(y) dy \right|^p w(x)dx, \quad k = 1,2,3.$$

Оценим интеграл I_1, использовав представление (14) и оценку (12):

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \left| \int_{0}^{1} f(y) h_1(n,x,y)(1-y)^\alpha (1+y)^\beta dy \right|^p (1-x)^A (1+x)^B dx \le$$

$$\le C \left[\int_{0}^{1} |f(y)|(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}(1-y)^\alpha dy \right]^p \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \left[(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}(1+x+1/n^2)^{-\beta/2-1/4} \right]^p (1-x)^A (1+x)^B dx.$$

Первый сомножитель обозначим через $I_{1,1}$, а второй — через $I_{1,2}$. Поскольку $-\alpha p/2 \ge 3p/4 - A - 1$ и $-\beta p/2 \ge 3p/4 - B - 1$, то $-\alpha p/2 - p/4 + A \ge p/2 - 1 > -1/2$, $-\beta p/2 - p/4 + B \ge p/2 - 1 > -1/2$ и, следовательно, интеграл $I_{1,2}$ ограничен абсолютной константой. Множитель $I_{1,1}$ представим в виде

$$I_{1,1} = \left[\int_{0}^{1} |f(y)|(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4+\theta/2}(1-y)^{\alpha-A} \frac{(1-y)^A}{(1-y+1/n^2)^{\theta/2}} dy \right]^p,$$

затем применим неравенство Гельдера

$$I_{1,1} \le \int_{0}^{1} \frac{|f(y)|^p (1-y)^A}{(1-y+1/n^2)^{p\theta/2}} dy \times$$

$$\times \left[\int_{0}^{1} (1-y+1/n^2)^{-\alpha q/2 - q/4 + \theta q/2}(1-y)^{(\alpha-A)q+A} dy \right]^{p/q}.$$

Пусть сначала $\theta > -(\alpha+1) + 2(A+1)/p - 1/2 \ge 0$. Тогда $A + q(\theta/2 - \alpha/2 - 1/4 + \alpha - A) > -1$. Следовательно, в этом случае

$$I_{1,1} \le C_\theta \left\| \frac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p.$$

Пусть теперь $\theta = -(\alpha+1) + 2(A+1)/p - 1/2 \ge 0$. Тогда $A + q(\theta/2 - \alpha/2 - 1/4 + \alpha - A) = -1$. Следовательно,

$$I_{1,1} \le C \ln^{p/q} n \left\| \frac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p.$$

Таким образом,

$$I_1 \le \begin{cases} C_\theta \left\| \dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p, & \text{если } \theta > \mu, \\ C \ln^{p/q} n \left\| \dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p, & \text{если } \theta = \mu. \end{cases} \tag{16}$$

Интеграл I_2 представим в виде суммы двух интегралов

$$I_2 = \left(\int\limits_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{1} \right) \left| \int\limits_0^1 f(y) h_2(n,x,y)(1-y)^\alpha (1+y)^\beta du \right|^p w(x) dx :=$$

$$:= I_{2,1} + I_{2,2}$$

и сначала оценим $I_{2,1}$, использовав неравенство (12) для многочленов Якоби, представление (15) для функции $h_2(n,x,y)$ и неравенство $|y-x| > 1/2$:

$$I_{2,1} \le C \int\limits_{-1}^{-1/2} \left[\int\limits_0^1 \frac{|f(y)|(1-y)^{\alpha+1} dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+3/4}} \right]^p \frac{(1+x)^B dx}{(1+x+1/n^2)^{(\beta/2+1/4)p}} =$$

$$= C \left[\int\limits_0^1 |f(y)|(1-y)^{\alpha+1}(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4} dy \right]^p \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{-1/2} (1+x+1/n^2)^{(-\beta/2-1/4)p}(1+x)^B dx = K_1 \times K_2.$$

Интеграл K_2 оценивается точно так же, как интеграл $I_{1,2}$, так как из условия $(2B+2)/p - \beta - 3/2 \ge 0$ следует неравенство $-p\beta/2 - p/4 + B \ge p/2 - 1 > -1/2$. Для оценки величины K_1 применим неравенство Гельдера:

$$K_1 \le \int\limits_0^1 \frac{|f(y)|^p (1-y)^A}{(1-y+1/n^2)^{p\theta/2}} dy \times$$

$$\times \left[\int\limits_0^1 (1-y+1/n^2)^{-\alpha q/2 + q/4 + \theta q/2} (1-y)^{(\alpha - A)q + A} dy \right]^{p/q}.$$

Поскольку $\theta/2 \ge (A+1)/p - (\alpha+1)/2 - 1/2 \ge 0$, то $A + q(\theta/2 - \alpha/2 + 1/4 + \alpha - A) \ge$ $\ge -1 + q/2 > -1$. Поэтому второй сомножитель ограничен константой, зависящей от p, и

$$K_1 \le C_p \left\| \frac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p.$$

Следовательно,

$$I_{2,1} \le C \left\| \frac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p. \tag{17}$$

В интеграле $I_{2,2}$ выполним замену переменных интегрирования, положив $u = n^2(1-x)$; $v = n^2(1-y)$. Тогда $u \in [0; 3n^2/2]$, $v \in [0; n^2]$ и

$$I_{2,2} = n^{-2(1+A)} \int\limits_0^{3n^2/2} \left| \int\limits_0^{n^2} \frac{f(y)v^{1+\alpha}\phi(n;y)dv}{(v-u)(u+1)^{\alpha/2+1/4}(1+v)^{\alpha/2+3/4}} \right|^p u^A du =$$

$$= n^{-2(1+A)} \int\limits_0^{3n^2/2} \left| \left(\int\limits_0^{u/2} + \int\limits_{u/2}^{3u/2} + \int\limits_{3u/2}^{n^2} \right) \frac{f(y)v^{1+\alpha}\phi(n;y)dv}{(v-u)(1+v)^{\alpha/2+3/4}} \right|^p \frac{u^A du}{(u+1)^{p(\alpha/2+1/4)}},$$

где $\phi(n;y)$, в силу оценок (11), — ограниченная функция. Заменяя сумму внутренних интегралов на сумму их модулей и учитывая, что в первом интеграле $u - v > u/2$, а в третьем $v - u > v/3$, получаем

$$I_{2,2} \leq C_p n^{-2(1+A)} \left(\int\limits_0^{3n^2/2} \left[\int\limits_0^{u} \frac{|f(y)|v^{1+\alpha}dv}{(1+v)^{\alpha/2+3/4}} \right]^p \frac{u^{A-p}du}{(u+1)^{p(\alpha/2+1/4)}} + \right.$$

$$+ \int\limits_0^{3n^2/2} \left| \int\limits_{u/2}^{3u/2} \frac{f(y)v^{1+\alpha}\phi(n;y)dv}{(v-u)(1+v)^{\alpha/2+3/4}} \right|^p \frac{u^A du}{(u+1)^{p(\alpha/2+1/4)}} +$$

$$\left. + \int\limits_0^{3n^2/2} \left[\int\limits_u^{n^2} \frac{|f(y)|v^{\alpha}dv}{(1+v)^{\alpha/2+3/4}} \right]^p \frac{u^A du}{(u+1)^{p(\alpha/2+1/4)}} \right) :=$$

$$:= I_2^1 + I_2^2 + I_2^3.$$

Оценим интеграл I_2^1, положив $A \leq 0$. Тогда $r = -p + A < -1$ и $s - r = -\alpha p/2 - p/4 \leq 0$, так как $\alpha > -1/2$. Поэтому $s = r - \alpha p/2 - p/4 = -p + A - \alpha p/2 - p/4 < -1$. Следовательно, можно применить предложение 3. Тогда

$$I_2^1 \leq C_p n^{-2(1+A)} \int\limits_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^{p(1+\alpha)+A}dv}{(v+1)^{p(\alpha+1)}} \leq$$

$$\leq C_p n^{-2(1+A)} \int\limits_0^{3n^2/2} |f(y)|^p v^A dv = C_p \int\limits_{-1/2}^{1} |f(y)|^p (1-y)^A dy.$$

Если $A > 0$, то в силу неравенства $(1+u)^{\theta p/2} \leq (1+n^2)^{\theta p/2}$, $u \in [0; n^2]$, $\theta \geq (2A+2)/p - \alpha - 3/2 \geq 0$,

$$I_2^1 \leq C_p n^{-2(1+A)+\theta p} \int\limits_0^{3n^2/2} \left[\int\limits_0^{u} \frac{|f(y)|v^{1+\alpha}dv}{(1+v)^{\alpha/2+3/4}} \right]^p \frac{u^{-p}du}{(1+u)^{\alpha p/2+p/4+\theta p/2-A}}.$$

Покажем, что в этом случае также выполняются условия предложения 3. Действительно, $r = -p < -1$ и $s - r = A - \alpha p/2 - p/4 - \theta p/2 \leq -1 + p/2$, так как $\alpha > -1/2$. Следовательно, $s \leq r - 1 + p/2 = -p/2 - 1 < -1$. Применяя предложение 3, получаем

$$I_2^1 \leq C_p n^{-2(1+A)+\theta p} \int\limits_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^{p(1+\alpha)} dv}{(1+v)^{p(\alpha+1+\theta/2)-A}}.$$

Поскольку $(\alpha+1)/2 - (A+1)/p > -(\alpha+1)/2$, то $\alpha + 1 - (A+1)/p > 0$, следовательно, $\alpha + 1 - A/p > 0$ и поэтому

$$I_2^1 \leq C_p n^{-2(1+A)+\theta p} \int\limits_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^A dv}{(1+v)^{p\theta/2}} \leq C_p \left\| \frac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p. \tag{18}$$

***Замечание* 2.** Если $(\alpha+1)/2 - (A+1)/p = -1/4$, то можно не вводить множитель $(1+u)^{\theta p/2}$. Как и в предыдущем случае, положим $s - r = -\alpha p/2 - p/4 + A$. Так как $(\alpha+1)/2 - (A+1)/p = -1/4$, то $\alpha p/2 - p/4 = -A - 1 + p/2$ и $s - r = p/2 - 1$. Тогда $s = r - 1 + p/2 = -p/2 - 1 < -1$ и, следовательно, можно применить предложение 3. Имеем

$$I_2^1 \leq C_p n^{-2(1+A)} \int\limits_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^{p(1+\alpha)} dv}{(1+v)^{p(\alpha+1)-A}} \leq C_p \|f\|_{p,w}^p. \tag{19}$$

Чтобы оценить интеграл I_2^2, заметим, что функция $\omega(x) = x^A (1+x)^{p(\alpha/2+1/4)}$ удовлетворяет условиям предложения 5. Следовательно,

$$I_2^2 \leq C_p n^{-2(1+A)} \int\limits_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^{p(1+\alpha)+A} dv}{(1+v)^{p(\alpha+1)}} \leq C_p \|f\|_{p,w}^p. \tag{20}$$

Переходя к оценке интеграла

$$I_2^3 = \int\limits_0^{3n^2/2} \left[\int\limits_u^{n^2} \frac{|f(y)| v^\alpha dv}{(1+v)^{\alpha/2+3/4}} \right]^p \frac{u^A du}{(u+1)^{p(\alpha/2+1/4)}},$$

отметим, что выполняются условия предложения 4. Действительно, $r = A > -1/2$, $s - r = -p(\alpha/2 + 1/4)$ и так как $-1/4 \geq (\alpha+1)/2 - (A+1)/p$, то $s = A - p(\alpha/2 + 1/4) \geq p/2 - 1 > -1$. В силу предложения 4 имеем

$$I_2^3 \leq \int\limits_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^{p(\alpha+1)+A} dv}{(1+v)^{p(\alpha+1)}} \leq C_p \|f\|_{p,w}^p. \tag{21}$$

Из неравенств (17) – (21) следует оценка

$$I_2 \leq C_p \left\| \frac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p. \tag{22}$$

Интеграл I_3 представим в виде суммы двух интегралов

$$I_3=\left(\int\limits_{-1}^{-1/2}+\int\limits_{-1/2}^{1}\right)\left|\int\limits_0^1 f(y)h_3(n,x,y)(1-y)^\alpha(1+y)^\beta du\right|^p w(x)dx:=I_{3,1}+I_{3,2}.$$

Сначала оценим $I_{3,1}$, использовав неравенство (12) для многочленов Якоби, представление (15) для функции $h_3(n,x,y)$ и неравенство $y-x>1/2$:

$$I_{3,1}\le C_p\int\limits_{-1}^{-1/2}\left[\int\limits_0^1\frac{|f(y)|(1-y)^\alpha dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4}}\right]^p\frac{(1+x)^{p+B}dx}{(1+x+1/n^2)^{(\beta/2+3/4)p}}=$$

$$=C_p\left[\int\limits_0^1\frac{|f(y)|(1-y)^\alpha dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4}}\right]^p\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{-1/2}\frac{(1+x)^{p+B}dx}{(1+x+1/n^2)^{(\beta/2+3/4)p}}=C_pL_1\times L_2.$$

Интеграл L_2 оценивается точно так же, как интеграл $I_{1,2}$, так как из условия $(2B+2)/p-\beta-3/2\ge 0$ следует неравенство $p+B-p\beta/2-3p/4\ge p-1>$ >0. Следовательно, интеграл L_2 ограничен абсолютной константой. Величина L_1 совпадает с $L_{1,1}$. Таким образом,

$$L_{3,1}\le\begin{cases}C_\theta\left\|\dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta}\right\|_{p,w}^p, & \text{если }\ \theta>\mu,\\ C\ln^{p/q}n\left\|\dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta}\right\|_{p,w}^p, & \text{если }\ \theta=\mu.\end{cases}\tag{23}$$

В интеграле $I_{3,2}$ выполним замену переменных интегрирования, положив $u=$ $=n^2(1-x)$; $v=n^2(1-y)$. Тогда $u\in[0;3n^2/2]$, $v\in[0;n^2]$ и

$$I_{3,2}=n^{-2(1+A)}\int\limits_0^{3n^2/2}\left|\int\limits_0^{n^2}\frac{f(y)v^\alpha\phi(n;y)dv}{(v-u)(u+1)^{\alpha/2+3/4}(1+v)^{\alpha/2+1/4}}\right|^p u^{A+p}du=$$

$$=n^{-2(1+A)}\int\limits_0^{3n^2/2}\left|\left(\int\limits_0^{u/2}+\int\limits_{u/2}^{3u/2}+\int\limits_{3u/2}^{n^2}\right)\frac{f(y)v^\alpha\phi(n;y)dv}{(v-u)(1+v)^{\alpha/2+1/4}}\right|^p\times$$

$$\times\frac{u^{A+p}du}{(u+1)^{p(\alpha/2+3/4)}},$$

где $\phi(n;y)$, в силу оценок (12), — ограниченная функция. Заменяя сумму внутренних интегралов на сумму их модулей и учитывая, что в первом интеграле $u-v>u/2$, а в третьем $v-u>u/2$ и $v-u>v/3$, получаем

$$I_{3,2}\le C_pn^{-2(1+A)}\left(\int\limits_0^{3n^2/2}\left[\int\limits_0^u\frac{|f(y)|v^\alpha dv}{(1+v)^{\alpha/2+1/4}}\right]^p\frac{u^Adu}{(u+1)^{p(\alpha/2+3/4)}}+\right.$$

$$+\int\limits_0^{3n^2/2}\left|\int\limits_{u/2}^{3u/2}\frac{f(y)v^{\alpha}\phi(n;y)dv}{(v-u)(1+v)^{\alpha/2+1/4}}\right|^p\frac{u^{A+p}du}{(u+1)^{p(\alpha/2+3/4)}}+$$

$$\left.+\int\limits_0^{3n^2/2}\left[\int\limits_u^{n^2}\frac{|f(y)|v^{\alpha-1/2}dv}{(1+v)^{\alpha/2+1/4}}\right]^p\frac{u^{A+p/2}du}{(u+1)^{p(\alpha/2+3/4)}}\right):=I_3^1+I_3^2+I_3^3.$$

Чтобы оценить интеграл I_3^1, сначала увеличим его, заменив интеграл по отрезку $[0;u]$ на интеграл по отрезку $[0;n^2]$, а затем перейдем к старым переменным интегрирования. Тогда

$$I_3^1\le C_p\left[\int\limits_0^1\frac{|f(y)|(1-y)^{\alpha}dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4}}\right]^p\int\limits_{-1/2}^1\frac{(1-x)^Adx}{(1-x+1/n^2)^{p(\alpha/2+3/4)}}.$$

Далее рассмотрим три случая.

1. Пусть $\mu>0$. В этом случае $A-\alpha p/2-3p/4>-1$ и, следовательно, второй сомножитель не превышает константу C_μ, а первый совпадает с $I_{1,1}$. Таким образом,

$$L_3^1\le\begin{cases}C_{\theta,\mu,p}\left\|\dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^{\theta}}\right\|_{p,w}^p, & \text{если }\ \theta>\mu,\\ C_{\mu,p}\ln^{p/q}n\left\|\dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^{\theta}}\right\|_{p,w}^p, & \text{если }\ \theta=\mu.\end{cases}\tag{24}$$

2. Пусть $\mu=0$, $\theta>0$. В этом случае $A-\alpha p/2-3p/4=-1$ и

$$L_3^1\le C_pn^{-2(1+A)}\left(\int\limits_0^{3n^2/2}\left[\int\limits_0^u\frac{|f(y)|v^{\alpha}(1+v)^{\theta/2}dv}{(1+v)^{\alpha/2+1/4+\theta/2}}\right]^p\frac{u^Adu}{(u+1)^{p(\alpha/2+3/4)}}\right)\le$$

$$\le C_pn^{-2(1+A)}\left(\int\limits_0^{3n^2/2}\left[\int\limits_0^u\frac{|f(y)|v^{\alpha}dv}{(1+v)^{\alpha/2+1/4+\theta/2}}\right]^p\frac{u^Adu}{(u+1)^{p(\alpha/2+3/4-\theta/2)}}\right)\le$$

$$\le C_p\left[\int\limits_0^1\frac{|f(y)|(1-y)^{\alpha}dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4+\theta/2}}\right]^p\int\limits_{-1/2}^1\frac{(1-x)^Adx}{(1-x+1/n^2)^{p(\alpha/2+3/4-\theta/2)}}=$$

$$=C_pT_1\times T_2.$$

Поскольку $A-\alpha p/2-3p/4+\theta p/2>-1$, то $T_2\le C_{p,\theta}$, а величину T_1 оценим, использовав неравенство Гельдера:

$$T_1=\left[\int\limits_0^1\frac{|f(y)|(1-y)^{\alpha-A}(1-y)^Ady}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4+\theta/2}}\right]^p=$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{|f(y)|(1-y)^{\alpha-A}(1-y)^A(1-y+1/n^2)^{\theta/2}dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4+\theta}} \right]^p \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{|f(y)|^p(1-y)^A dy}{(1-y+1/n^2)^{p\theta}} \left[\int_0^1 (1-y+1/n^2)^{q(\theta/2-\alpha/2-1/4)}(1-y)^{A+q(\alpha-A)}dy \right]^{p/q}.$$

Так как из условия $\mu = 0$ следует $\alpha p/2 = A - 3p/4 + 1$, то $q\theta/2 + A + q(-\alpha/2 - - 1/4 + \alpha - A) = q\theta/2 - 1 > -1$. Следовательно, в этом случае

$$L_3^1 \leq C_{\theta,p} \left\| \frac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^{2\theta}} \right\|_{p,w}^p. \tag{25}$$

3. Пусть $\mu = 0$, $\theta = 0$. В этом случае $A - \alpha p/2 - 3p/4 = -1$ и

$$L_3^1 \leq C_p \left[\int_0^1 \frac{|f(y)|(1-y)^\alpha dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4}} \right]^p \times$$

$$\times \int_{-1/2}^1 \frac{(1-x)^A dx}{(1-x+1/n^2)^{p(\alpha/2+3/4)}} = C_p I_{1,1} \times Z.$$

Поскольку $Z \asymp \ln(n+1)$, если $A - \alpha p/2 - 3p/4 = -1$, а

$$I_{1,1} \leq C \ln^{p/q}(n+1)\|f\|_{p,w}^p,$$

если $\mu = 0, \theta = 0$, то

$$L_3^1 \leq C_p \ln^p(n+1)\|f\|_{p,w}^p. \tag{26}$$

Из неравенств (24)–(26) следует оценка

$$L_3^1 \leq \begin{cases} C_{\theta,\mu} \left\| \dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p, & \text{если } \theta > \mu \geq 0, \\ C_p \ln^{p/q} n \left\| \dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p, & \text{если } \theta = \mu > 0, \\ C_p \ln^p(n+1) \left\| \dfrac{f}{(\sqrt{1-y}+1/n)^\theta} \right\|_{p,w}^p, & \text{если } \theta = \mu = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Чтобы оценить интеграл I_3^2, заметим, что функция $\omega(x) = x^{A+p}(1+x)^{p(\alpha/2+3/4)}$ удовлетворяет условиям предложения 5, поэтому

$$I_3^2 \leq C_p n^{-2(1+A)} \int_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^{p(1+\alpha)+A} dv}{(1+v)^{p(\alpha+1)}} \leq C_p \|f\|_{p,w}^p. \tag{28}$$

Переходя к оценке интеграла

$$I_3^3 = \int_0^{3n^2/2} \left[\int_u^{n^2} \frac{|f(y)|v^{\alpha-1/2}dv}{(1+v)^{\alpha/2+1/4}} \right]^p \frac{u^{A+p/2}du}{(u+1)^{p(\alpha/2+3/4)}},$$

заметим, что $r = A + p/2 > -1$, $s - r = -p(\alpha/2 + 3/4)$.

Так как $\mu \geq 0$, то $-p\alpha/2 \geq 3p/4 - A - 1$ и, следовательно, $s = r - p(\alpha/2 + 3/4) \geq \geq p/2 - 1 > -1$, т. е. выполняются условия предложения 4, в силу которого

$$I_3^3 \leq C_p n^{-2(1+A)} \int\limits_0^{3n^2/2} \frac{|f(y)|^p v^{p(\alpha+1)+A} dv}{(1+v)^{p(\alpha+1)}} =$$

$$= \int\limits_{-1/2}^{1} |f(y)|^p (1-y)^A dy \leq C_p \|f\|_{p,w}^p. \tag{29}$$

Из оценок (16), (22), (27) – (29) следует утверждение теоремы.

Из теоремы 3 и предложения 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\alpha = \beta$, $\mu = \nu = (2A+2)/p - \alpha - 3/2 \geq 0$, $A = B \in (-1/2; 0)$, $f \in H_p^{r+\gamma}$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\left\| f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f) \right\|_{p,A,A} \leq \begin{cases} \dfrac{C_\gamma}{n^{r+\gamma}}, & \text{если } \ \gamma > \mu - \dfrac{2A}{p}, \\ C \dfrac{\ln^{1/p}(n+1)}{n^{-\mu+2A/p+2\gamma}}, & \text{если } \ \dfrac{\mu}{2} - \dfrac{A}{p} < \gamma \leq \mu - \dfrac{2A}{p}. \end{cases} \tag{30}$$

Чтобы сформулировать следующую теорему, приведем результат М. К. Потапова [23] о структурной характеристике классов функций с заданным порядком наилучших приближений. Для этого введем один из вариантов функции обобщенного сдвига. Пусть $f \in L_{p,A,B}$, положим

$$f(x,t,A,B) = \frac{1}{\phi(A,B)} \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 f\Big[x \cos t + rz \sin t \sqrt{1-x^2} -$$

$$-(1-r^2)(1-x)\sin^2 t/2\Big] (1-r^2)^{A-B-1} r^{2B+1} (1-z^2)^{B-1/2} dz dr,$$

где

$$\phi(A,B) = \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 (1-r^2)^{A-B-1} r^{2B+1} (1-z^2)^{B-1/2} dz dr, \quad A > B > -\frac{1}{2}.$$

Предложение 6. *Пусть* $1 < p < \infty$, *числа* A, B, θ, δ, p *и* γ *таковы, что* $0 < \gamma < 2$, $\theta, \delta \geq 0$, $\gamma/2 < 1 + 1/p + \min\{-\theta/2 + A/p, -\delta/2 + B/p\}$, $A > B > -1/2$. *Для того чтобы функция* f *удовлетворяла условию*

$$\left\| \frac{f(x) - f(x,t,A/p,B/p)}{(1 - x + \sin^2 t/2)^{\theta/2} (1 + x + \sin^2 t/2)^{\delta/2}} \right\|_{p,A,B} \leq C_1 \left| \sin \frac{t}{2} \right|^\gamma, \tag{31}$$

где $f(x,t,A/p,B/p)$ *— функция обобщенного сдвига, необходимо и достаточно, чтобы нашлась последовательность алгебраических многочленов* $P_n(x)$ *таких, что*

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{(\sqrt{1-x} + 1/n)^\theta (\sqrt{1+x} + 1/n)^\delta} \right\|_{p,A,B} \leq \frac{C_2}{n^\gamma}. \tag{32}$$

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $A > B > -1/2$, *числа* A, B, θ, δ, p *и* γ *таковы, что* $0 < \gamma < 2$, $\theta \in (\mu; \mu + 1/2)$, $\delta \in (\nu; \nu + 1/2)$ *и для функции* $f \in L_{p,A,B}$ *выполняется условие* (31). *Тогда*

$$\|f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\|_{p,A,B} \leq \frac{C_3}{(n+1)^\gamma}. \tag{33}$$

Действительно, из условия теоремы вытекает условие предложения 6 и, следовательно, имеет место необходимость предложения 6, а тогда, в силу (10) и (32), выполняется (33).

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $A > B > -1/2$, *числа* A, B, θ, δ, γ, p *и* r *таковы, что* r *— натуральное число,* $0 < \gamma \leq 1$, $\theta \in (\mu; \mu + 1/2)$, $\delta \in (\nu; \nu + 1/2)$, *где* $\mu = (2A+2)/p - \alpha - 3/2 \geq 0$, $\nu = (2B+2)/p - \beta - 3/2 \geq 0$.

Функция $f \in L_{p,A,B}$ *имеет абсолютно непрерывную производную* $(r-1)$*-го порядка на любом отрезке* $[a; b] \subset (-1; 1)$, $f^{(r)}(x, t, A, B)$ *— функция обобщенного сдвига производной* $f^{(r)}(x)$, *для которой выполняется условие*

$$\Big\| \big[f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x, t, A/p + r/2, B/p + r/2) \big] (1-x)^{r/2} \times$$

$$\times (1+x)^{r/2} (1 - x + \sin^2 t/2)^{-\theta/2} (1 + x + \sin^2 t/2)^{-\delta/2} \Big\|_{p,A,B} \leq C_4 \left| \sin \frac{t}{2} \right|^\gamma.$$

Тогда

$$\big\| f(x) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f) \big\|_{p,A,B} \leq \frac{C_5}{(n+1)^{r+\gamma}}.$$

1. *Pollard H.* The mean convergence of ortogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. – 1947. – **62**. – P. 387 – 403.
2. *Pollard H.* The mean convergence of ortogonal series // Duke Math. J. – 1949. – **16**, № 1. – P. 189 – 191.
3. *Neuman J., Rudin W.* Mean convergence of ortogonal series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**. – P. 219 – 222.
4. *Wing G. M.* The mean convergence of ortogonal series // Amer. J. Math. – 1950. – **72**. – P. 792 – 807.
5. *Mickehoupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **23**, № 2. – P. 306 – 310.
6. *Казакова Н. М.* О порядках констант Лебега сумм Фурье – Якоби в пространствах. – Свердловск, 1981. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ.
7. *Gronwall T. H.* Uber die Laplacesche Reihe // Math. Ann. – 1913. – **74**. – P. 213 – 270.
8. *Суетин П. К.* О представлении непрерывных и дифференцируемых функций по многочленам Лежандра // Докл. АН СССР. – 1964. – **158**, № 6. – С. 1275 – 1277.
9. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Приближение функций суммами Фурье – Якоби // Там же. – 1966. – **161**, № 1. – С. 9 – 10.
10. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функции Лебега сумм Фурье – Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. – 1968. – **1**, № 1. – С. 11 – 23.
11. *Бадков В. М.* О приближении функций суммами Фурье – Якоби // Докл. АН СССР. – 1966. – **167**, № 4. – С. 731 – 734.
12. *Бадков В. М.* Приближение функций частными суммами ряда Фурье по обобщенным многочленам Якоби // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 6. – С. 671 – 682.
13. *Бадков В. М.* Оценки функций Лебега и остатка ряда Фурье – Якоби // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 6. – С. 285 – 295.
14. *Беленький А. М.* О разложении функций в ряд Фурье – Лежандра // Конструктивная теория функций и теория отображений. – Киев, 1981. – С. 35 – 48.
15. *Рафальсон С. З.* О частных суммах рядов Фурье по ортогональным многочленам // Докл. АН СССР. – 1977. – **237**, № 6. – С. 1297 – 1300.

16. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Там же. – 1972. – **204**, № 4. – С. 788 – 790.
17. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 1. – С. 135 – 147.
18. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p // Там же. – 1971. – **35**, № 4. – С. 874 – 899.
19. *Бадков В. М.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 4. – С. 51 – 106.
20. *Моторный В. П.* Приближение функций суммами Фурье – Лежандра в среднем // Докл. АН СССР. – 1981. – **259**, № 1. – С. 39 – 42.
21. *Ходак Л. Б.* Сходимость рядов Фурье по многочленам Якоби в среднем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 28 – 31.
22. *Сеге Г.* Ортогональные ряды. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
23. *Потапов М. К.* О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **134**. – С. 260 – 277.

Получено 28.12.09