УДК 513.88

Д. Ю. Якименко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УНИТАРИЗАЦИЯ ШУРОВСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА, КОТОРОЕ СООТВЕТСТВУЕТ $\tilde{E}_7$

We prove that every Schur representation of a partially ordered set that corresponds to the graph $\tilde{E}_7$ is unitarizable with some character.

Доведено, що будь-яке шурівське зображення частково впорядкованої множини, що відповідає графу $\tilde{E}_7$, можна унітаризувати з деяким характером.

1. Введение. Описание представлений колчанов и частично упорядоченных множеств (сокращенно *чум*) в категории линейных пространств связано со многими проблемами линейной алгебры, и работы в этом направлении стали классическими (см. [1] и приведенную там библиографию).

Проблему описания представлений колчанов и чум изучают и в категории гильбертовых пространств при введении дополнительных ограничений на представления. На языке гильбертовых представлений соответствующих алгебр описание представлений, размерностей и другие результаты см. [2 – 4]. В [5] для колчанов изучались локально скалярные представления (позднее в [6] этот термин был изменен на ортоскалярные). Для представлений чум в категории гильбертовых пространств также можно выделить ортоскалярные представления. При этом изучение ортоскалярных представлений примитивных чум может быть сведено к изучению ортоскалярных представлений для соответствующих колчанов и наоборот.

В настоящей статье продолжается изучение связи неразложимых линейных представлений чума и его гильбертовых неприводимых ортоскалярных представлений (см. [1, 7 – 9]). Неприводимому ортоскалярному представлению естественно соответствует линейное представление, но линейному представлению может соответствовать множество ортоскалярных представлений с различными характерами. Линейное представление π унитаризуется с характером χ, если существует ортоскалярное представление π' с χ, которое линейно изоморфно π (см. [1]). Известно, что из неразложимых линейных представлений чума унитаризоваться с каким-либо характером могут только шуровские (при этом если для фиксированного характера унитаризация существует, то она единственна с точностью до унитарной эквивалентности) [6]. Обратное неверно: в п. 2.6 статьи приводится пример шуровской пятерки подпространств в линейном пространстве, которая не унитаризуется ни с каким характером.

В [8] доказано, что все шуровские представления примитивных чум конечного типа унитаризуются с некоторыми характерами, и дано описание всех таких характеров. В [7] доказано, что все шуровские представления $\tilde{D}_4$ унитаризуются, а в [1] получено описание характеров, с которыми унитаризация возможна. В [9] подобное сделано для чума, которое соответствует $\tilde{E}_6$.

В данной статье мы покажем, что все шуровские представления чума, которое соответствует $\tilde{E}_7$, унитаризуются с некоторыми характерами.

2. Предварительные сведения. ***2.1. Наборы линейных подпространств.*** Будем рассматривать конечномерные линейные пространства над $\mathbb{C}$. Линейные пространства вместе с набором (системой) подпространств естественным образом образуют аддитивную категорию. Конкретно, объектами категории Sys_n являются упорядоченные наборы $(V; V_1, \ldots, V_n)$, где V_i — подпространства V. Морфизмами из $(V; V_1, \ldots, V_n)$ в $(W; W_1, \ldots, W_n)$ являются линейные отображения $\phi\colon V \to W$ такие, что $\phi(V_i) \subseteq W_i$. Изоморфизмом называется морфизм, для которого существует обратный. Эндоморфизмом называется морфизм из объекта в себя. Объекты называются изоморфными (эквивалентными), если между ними существует изоморфизм. Прямой суммой объектов $(V; V_1, \ldots, V_n)$ и $(W; W_1, \ldots, W_n)$ будет $(V \oplus W; V_1 \oplus W_1, \ldots, V_n \oplus W_n)$. Объект называется неразложимым, если он не изоморфен прямой сумме ненулевых объектов. Объект называется шуровским, если он имеет только тривиальные эндоморфизмы. Шуровские объекты неразложимы, но не все неразложимые объекты являются шуровскими.

Задача классификации неразложимых неэквивалентных объектов является важной и активно изучалась. При $n \leqslant 3$ существует конечное количество таких объектов, при $n = 4$ — бесконечное, но возможно описание (см., например, [10] и приведенную там библиографию), при $n \geqslant 5$ задача является дикой.

2.2. Наборы гильбертовых подпространств. Можно рассматривать наборы гильбертовых подпространств. Определим категорию $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_n$ как подкатегорию Sys_n. Объектами будут такие наборы $(V; V_1, \ldots, V_n)$, что в V есть скалярное произведение. Морфизмы из $(V; V_1, \ldots, V_n)$ в $(W; W_1, \ldots, W_n)$ оставим лишь такие, что помимо $\phi(V_i) \subseteq W_i$ выполняется $\phi^*(W_i) \subseteq V_i$. Можно показать, что два объекта будут изоморфными тогда и только тогда, когда существует унитарный ϕ такой, что $\phi(V_i) = W_i$. Прямой суммой объектов в этой категории будет ортогональная сумма. Понятно, что ортогональная разложимость влечет линейную разложимость, но не наоборот. Отметим, что в этой категории шуровость эквивалентна неразложимости и эквивалентна неприводимости соответствующего набора ортопроекторов.

2.3. Ортоскалярность. В $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_n$ морфизмов меньше, поэтому классов эквивалентности больше и задача описания „труднее”. Действительно, уже для $n = 3$ задача описания неразложимых неэквивалентных объектов дикая. Однако при введении дополнительных ограничений задача описания становится содержательной. Набор $(V; V_1, \ldots, V_n)$ в $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_n$ назовем ортоскалярным с характером $\chi = (\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, если

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \alpha_0 I,$$

где P_i — ортогональные проекторы на подпространства V_i.

Все такие наборы составляют категорию $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_{\chi,n}$ — полную подкатегорию в $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_n$. В этой категории задача описания (унитарно) неэквивалентных (ортогонально) неразложимых объектов подобна линейному случаю. При $n \leqslant 3$ количество таких объектов при любом фиксированном характере χ конечно. При $n = 4$ есть характеры, для которых количество таких объектов бесконечно, но при этом существует их описание для любого из характеров. При $n = 5$ существуют характеры, для которых задача описания является дикой.

В [7] показано, что любая шуровская четверка подпространств в линейном пространстве линейно изоморфна некоторой ортоскалярной четверке с характером вида $\chi = (\lambda; 1, 1, 1, 1)$.

2.4. Унитаризация набора линейных подпространств. $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_n$ — это подкатегория Sys_n и любому ортоскалярному набору естественно соответствует линейный. Однако обратная связь неоднозначна. Назовем объект $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ из Sys_n унитаризуемым с характером $\chi = (\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, если существует объект π' в $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_{\chi,n}$, ортоскалярный с характером χ и такой, что $\pi \simeq \pi'$ в Sys_n. Иными словами, в V можно так выбрать скалярное произведение, что набор π станет ортоскалярным с характером χ. Здесь возникают 2 вопроса:

1. Какие наборы можно унитаризовать с каким-то характером?

2. С какими характерами можно унитаризовать конкретный набор?

Известно, что (ортогонально) неразложимый ортоскалярный набор подпространств должен быть шуровским в категории линейных пространств [6]. Поэтому из неразложимых наборов унитаризоваться с каким-то характером могут лишь шуровские.

Для $n \leq 4$ ответы на эти вопросы получены в [1].

2.5. Представления чум. Пусть $\mathcal{N}$ — конечное чум, состоящее из $|\mathcal{N}| = n$ элементов. Можно рассматривать категорию $\mathrm{Sys}_{\mathcal{N}}$ линейных представлений этого чума. А именно, $\mathrm{Sys}_{\mathcal{N}}$ — полная подкатегория Sys_n, объектами которой являются такие наборы подпространств $(V; V_1, \ldots, V_n)$, что $V_i \subseteq V_j$, если $i \prec j$.

В этой категории задача классификации неразложимых неэквивалентных объектов активно изучалась (см., например, [11, 12]). Определены список чум, для которых есть лишь конечное число неразложимых неэквивалентных представлений, а также список чум, для которых есть бесконечное число представлений, но при этом их можно описать.

Аналогично линейному случаю можно рассматривать гильбертовы представления чум (и, в частности, ортоскалярные представления), т. е. категории $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ и $\mathrm{Sys}\mathcal{H}_{\chi,\mathcal{N}}$. При этом в задаче классификации ортоскалярных представлений чум возникают результаты, сравнимые с линейным случаем. См. [8] в случае примитивных чум конечного типа.

2.6. Стабильность набора линейных подпространств. Пусть $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ из Sys_n. Набор π будем называть полустабильным с характером $\chi = (\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, если

$$\alpha_1 \dim V_i + \ldots + \alpha_n \dim V_n = \alpha_0 \dim V,$$

$$\alpha_1 \dim(V_i \cap F) + \ldots + \alpha_n \dim(V_n \cap F) \leqslant \alpha_0 \dim F$$

для любого подпространства $F \subset V$, и стабильным, если все неравенства строгие.

Набор $\pi \cap F = (F; V_1 \cap F, \ldots, V_n \cap F)$ будем называть поднабором набора π, $\dim(\pi \cap F)$ — подразмерностью набора π.

Имеет место следующий критерий унитаризации (см. [13, 14], а также пояснение в [15]).

Теорема 1. *Шуровский набор $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ из Sys_n унитаризуется с χ тогда и только тогда, когда $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ стабилен с χ.*

Используя этот критерий, можно установить, что не любой шуровский набор унитаризуется с каким-то характером. Рассмотрим набор из пяти подпространств размерности $(4; 2, 2, 2, 2, 2)$: $\pi = (E \oplus E; (x, 0), (0, x), (x, x), (Ax, x), (Bx, x))$, $\dim E = 2$, $A\colon E \to E$, $B\colon E \to E$. Можно подобрать A и B так, что A и B

имеют общий собственный вектор, набор π шуровский и для π существует поднабор размерности (2;1,1,1,1,1). Но тогда условие на стабильность для π не может выполняться ни для какого характера.

2.7. Описание представлений чума, которое соответствует $\tilde{E}_7$. Факты, которые приводятся в этом подпункте, являются классическими и содержатся, например, в [10] (см. также библиографию в [10]).

Пусть $\pi = (R; W; E_1, F_1, G_1; E_2, F_2, G_2)$ — представление чума, которое соответствует $\tilde{E}_7$, т. е. R — конечномерное линейное пространство и $W \subset R$, $G_1 \subset F_1 \subset E_1 \subset R$, $G_2 \subset F_2 \subset E_2 \subset R$. Если π — неразложимый набор, то квадратичная форма Титса размерности π равна либо 0, либо 1. Если она равна 1, то размерность π называется действительным корнем, а такие наборы π называют дискретной серией. В такой размерности существует лишь одно неразложимое представление. Шуровские представления в этом случае могут быть получены из простейших функторов Коксtера. В этом случае существование унитаризации с некоторым характером следует непосредственно из результатов [16].

Если форма Титса равна 0, то размерность π называется мнимым корнем, а такие наборы π называют непрерывной серией. В этом случае размерность π может быть только $\sigma k = (4k; 2k; 3k, 2k, k; 3k, 2k, k), k \in \mathbb{N}$. При этом неразложимый набор размерности σk будет шуровским только при $k = 1$. Все шуровские представления в этом случае (см., например, [10]) можно записать следующим образом:

$$\Lambda(1; -\lambda) = \Big(\langle e_{1234}\rangle; \langle e_2 + e_3, e_4 + e_2\rangle; \langle e_{124}\rangle, \langle e_4, e_1 + e_2\rangle, \langle e_4\rangle;$$

$$\langle e_{123}\rangle, \langle e_{13}\rangle, \langle e_3 + \lambda e_1\rangle\Big), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0, -1,$$

$$\Lambda_1(1; 0) = \Big(\langle e_{1234}\rangle; \langle e_2 + e_3, e_4 + e_2\rangle; \langle e_{124}\rangle, \underline{\langle e_4, e_1\rangle}, \langle e_4\rangle; \langle e_{123}\rangle, \langle e_{13}\rangle, \langle e_3 + e_1\rangle\Big),$$

$$\Lambda_1(1; \infty) = \Big(\langle e_{1234}\rangle; \langle e_2 + e_3, e_4 + e_2\rangle; \langle e_{124}\rangle, \underline{\langle e_4, e_2\rangle}, \langle e_4\rangle; \langle e_{123}\rangle, \langle e_{13}\rangle, \langle e_3 + e_1\rangle\Big),$$

$$\Lambda_2(1; 0) = \Big(\langle e_{1234}\rangle; \underline{\langle e_2, e_4 + e_3\rangle}; \langle e_{124}\rangle, \langle e_4, e_1 + e_2\rangle, \langle e_4\rangle; \langle e_{123}\rangle, \langle e_{13}\rangle, \langle e_3 + e_1\rangle\Big),$$

$$\Lambda_2(1; \infty) = F_{\leftrightarrow}\Lambda_1(1; \infty),$$

$$\Lambda_3(1; 0) = \Big(\langle e_{1234}\rangle; \langle e_2 + e_3, e_4 + e_2\rangle; \langle e_{124}\rangle, \langle e_4, e_1 + e_2\rangle, \langle e_4\rangle; \langle e_{123}\rangle, \langle e_{13}\rangle, \underline{\langle e_3\rangle}\Big),$$

$$\Lambda_3(1; \infty) = \Big(\langle e_{1234}\rangle; \langle e_2 + e_3, e_4 + e_2\rangle; \langle e_{124}\rangle, \langle e_4, e_1 + e_2\rangle, \langle e_4\rangle; \langle e_{123}\rangle, \langle e_{13}\rangle, \underline{\langle e_1\rangle}\Big),$$

$$\Lambda_4(1; \infty) = F_{\leftrightarrow}\Lambda_3(1; \infty),$$

$$\Lambda_1(1; 1) = \Big(\langle e_{1234}\rangle; \langle e_2 + e_3, e_4 + e_2\rangle; \langle e_{124}\rangle,$$

$$\langle e_4, e_1 + e_2\rangle, \langle e_4\rangle; \langle e_{123}\rangle, \langle e_{13}\rangle, \underline{\langle e_3 - e_1\rangle}\Big),$$

$$\Lambda_2(1; 1) = F_{\leftrightarrow}\Lambda_1(1; 1).$$

Здесь для краткости через e_{ijk} обозначен набор векторов e_i, e_j, e_k, через $F_{\leftrightarrow}$ — функтор, который представлению $\pi = (R; W; E_1, F_1, G_1; E_2, F_2, G_2)$ чума $\tilde{E}_7$ ставит в соответствие представление $F_{\leftrightarrow}\pi = (R; W; E_2, F_2, G_2; E_1, F_1, G_1)$. Представления обозначены в соответствии с [10]. В приведенном описании для наглядности подчеркнуты те подпространства, которые отличаются от соответствующих подпространств в $\Lambda(1; -1)$.

3. Унитаризация непрерывных серий шуровских представлений $\tilde{E}_7$. Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 2. *Любое шуровское представление из непрерывной серии чума, которое соответствует $\tilde{E}_7$, унитаризуется с некоторым характером.*

Доказательство этой теоремы опирается на утверждения 1, 2.

Утверждение 1. *Пусть $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ — шуровский набор подпространств ($V_i \neq 0$) линейного пространства, который унитаризуется с некоторым характером. Тогда для любого $V_{n+1} \subset V$ набор подпространств $\pi' = (V; V_1, \ldots, V_n, V_{n+1})$ также унитаризуется с некоторым характером.*

Доказательство. Обозначим $\sigma_i = \dim V_i$, $i = \overline{1, n+1}$, $\sigma_0 = \dim V$. Пусть $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ унитаризуется с характером $\chi = (1; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тогда π стабилен с χ, а значит, $\alpha_1\sigma_1 + \ldots + \alpha_n\sigma_n = \sigma_0$ и $\alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_n d_n < d_0$ для всех подразмерностей $(d_0; d_1, \ldots d_n)$ набора π. Возьмем $\beta_i = \alpha_i$, $i = \overline{2, n}$, $\beta_1 = \alpha_1 - \beta_{n+1}\dfrac{\sigma_{n+1}}{\sigma_1}$. Покажем, что если β_{n+1} взять достаточно малым $\left(\text{по крайней мере должно быть } \beta_{n+1} < \alpha_1\dfrac{\sigma_1}{\sigma_{n+1}}, \text{ так как } \beta_1 > 0\right)$, то $\pi' = (V; V_1, \ldots, V_n, V_{n+1})$ будет унитаризоваться с характером $(1; \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$. Для унитаризации с $(1; \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ необходимо и достаточно, чтобы π' был стабилен с этим характером, т. е. чтобы $\beta_1\sigma_1 + \ldots + \beta_{n+1}\sigma_{n+1} = \sigma_0$ (выполняется в силу подбора чисел β_i), а также чтобы для любой подразмерности $(d_0; d_1, \ldots d_{n+1})$ набора π' выполнялось $\beta_1 d_1 + \ldots + \beta_{n+1} d_{n+1} < d_0$.

Если $D = \left\{\left(d_0^F; d_1^F, \ldots, d_n^F\right) \mid F \subset V\right\}$ — все подразмерности π, то возможные подразмерности π' — это только

$$\bigcup_{F \subset V} \left\{\left(d_0^F; d_1^F, \ldots, d_n^F, 0\right),\ \left(d_0^F; d_1^F, \ldots, d_n^F, 1\right), \ldots, \left(d_0^F; d_1^F, \ldots, d_n^F, \sigma_{n+1}\right)\right\}.$$

В самом худшем случае эти возможные подразмерности будут всеми подразмерностями π'. Т. е. для β_i должны выполняться неравенства $\beta_1 d_1 + \ldots + \beta_n d_n + \beta_{n+1}\sigma_{n+1} < d_0$ $\forall d \in D$. Отсюда получаем условия $\left(\alpha_1 - \beta_{n+1}\dfrac{\sigma_{n+1}}{\sigma_1}\right)d_1 + \alpha_2 d_2 + \ldots + \alpha_n d_n + \beta_{n+1}\sigma_{n+1} < d_0$, которые истинны при $d_1 = \sigma_1$ и эквивалентны $\beta_{n+1} < \left(d_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i\right) / \left(\sigma_{n+1}(1 - d_1/\sigma_1)\right)$ при $d_1 < \sigma_1$. Поэтому если $\beta_{n+1} < \alpha_1\dfrac{\sigma_1}{\sigma_{n+1}}$ и $\beta_{n+1} < \left(d_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i\right) / \left(\sigma_{n+1}(1 - d_1/\sigma_1)\right)$ для любого $d \in D$, $d_1 < \sigma_1$, то для π' должна существовать унитаризация с характером $(1; \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$.

***Замечание* 1.** Утверждение, аналогичное утверждению 1, независимо получено в [15].

Утверждение 2. *Из любого шуровского представления в непрерывной серии чума $\tilde{E}_7$ можно удалить одно подпространство так, что полученный набор подпространств останется шуровским.*

Для доказательства используем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть V — конечномерное линейное пространство,* $\dim V = n$ *и A — алгебра операторов в этом пространстве. Пусть* $\{\langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle, \ldots, \langle v_k\rangle\}$ *— набор одномерных подпространств, инвариантных относительно A, такой, что для $i = \overline{1,k}$ набор векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus v_i$ линейно независим, а набор $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ линейно зависим. Тогда любое подпространство W пространства $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle$ инвариантно относительно A, причем одномерные подпространства будут иметь одно и то же собственное значение для любого фиксированного $\phi \in A$.*

Доказательство леммы. Из условия следует, что в V можно выбрать базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ так, что $\{\langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle, \ldots, \langle v_k\rangle\} = \{\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \ldots, \langle e_{k-1}\rangle, \langle e_1 + e_2 + \ldots \ldots + e_{k-1}\rangle\}$. Отсюда следует, что для любого $i = \overline{1, k-1}$ e_i должны иметь одно и то же собственное значение для любого фиксированного $\phi \in A$. А значит, любое подпространство W пространства $\langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\rangle$ будет инвариантным, причем одномерные будут иметь то же собственное значение, что и e_i.

***Доказательство утверждения* 2.** Воспользуемся описанием представлений, приведенным в п. 2.7. Однако отметим, что если утверждение 2 верно для π, то оно верно и для $F_{\leftrightarrow}\pi$. Так что $\Lambda_2(1;\infty), \Lambda_4(1;\infty), \Lambda_2(1;1)$ мы рассматривать не будем.

1. Для $\Lambda(1;-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, -1$, $\Lambda_3(1;0)$, $\Lambda_3(1;\infty)$, $\Lambda_1(1;1)$ можно удалить подпространство G_2 (заметим, что в этих случаях, удаляя G_2, получаем одну и ту же систему подпространств).

Действительно, покажем, что в этих случаях алгебра эндоморфизмов A полученной системы подпространств останется тривиальной. Напомним, что если подпространства Z_1 и Z_2 инвариантны относительно алгебры операторов, то $Z_1 \cap Z_2$ и $Z_1 + Z_2$ также будут инвариантны.

В этом случае для A, в частности, будут инвариантны следующие подпространства: $F_1 \cap E_2 = \langle e_1 + e_2\rangle$, $F_2 \cap E_1 = \langle e_1\rangle$, $G_1 = \langle e_4\rangle$, $W \cap E_1 = \langle e_4 + e_2\rangle$, $W \cap E_2 = \langle e_3 + e_2\rangle$.

Из того, что $\langle e_1 + e_2\rangle, \langle e_1\rangle, \langle e_4\rangle, \langle e_4 + e_2\rangle$ инвариантны, по лемме 1 следует, что любое подпространство пространства $\langle e_1, e_2, e_4\rangle$ также инвариантно, причем $\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_4\rangle$ будут иметь одно и то же собственное значение для любого фиксированного $\phi \in A$.

$\langle e_3\rangle = (\langle e_3 + e_2\rangle + \langle e_2\rangle) \cap F_2$, поэтому $\langle e_3\rangle$ инвариантно. Из того, что $\langle e_2\rangle$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_3 + e_2\rangle$ инвариантны, согласно лемме 1 следует, что $\langle e_2\rangle, \langle e_3\rangle$ имеют одно и то же собственное значение для любого фиксированного $\phi \in A$. Поэтому A тривиальна.

2. Для $\Lambda_1(1;0)$, $\Lambda_1(1;\infty)$ можно удалить F_1.

Для алгебры эндоморфизмов A полученной системы инвариантны следующие подпространства: $F_2 \cap E_1 = \langle e_1\rangle$, $G_1 = \langle e_4\rangle$, $G_2 = \langle e_1 + e_3\rangle$, $W \cap E_1 = \langle e_4 + e_2\rangle$, $W \cap E_2 = \langle e_3 + e_2\rangle$. Эти пять подпространств удовлетворяют лемме 1, поэтому A тривиальна.

3. Для $\Lambda_2(1;0)$ можно удалить E_1. Для алгебры эндоморфизмов A полученной системы инвариантны следующие подпространства: $F_1 \cap E_2 = \langle e_1 + e_2\rangle$, $G_1 = \langle e_4\rangle$, $G_2 = \langle e_1 + e_3\rangle$, $W \cap E_2 = \langle e_2\rangle$, $(G_1 + W) \cap F_2 = \langle e_3\rangle$, $W \cap (\langle e_4\rangle + \langle e_3\rangle) = \langle e_4 + e_3\rangle$. Рассуждая, как и выше, убеждаемся, что A тривиальна.

***Замечание* 2.** Утверждение 2 можно доказать и другим способом. Поскольку после удаления подпространства мы получали набор подпространств, который соответствует представлению чума E_7, то вместо прямого доказательства шуровости полученного набора можно доказать эквивалентность этого набора одному из шуровских представлений E_7, воспользовавшись описанием представлений E_7 (см., например, [11]).

***Доказательство теоремы* 2.** Поскольку любое шуровское представление чума E_7 унитаризуется с некоторым характером (см. [8]), эта теорема является прямым следствием утверждений 1, 2.

***Замечание* 3.** Аналогично рассмотрению $\tilde{E}_6$ в [9] можно пробовать описывать характеры, с которыми возможна унитаризация представлений в случае чума $\tilde{E}_7$. Однако в случае $\tilde{E}_7$ сложность подсчета возможных характеров возрастает, и автору, на момент написания этой статьи, не известно, как процедуру подсчета возможных характеров можно алгоритмизировать.

Автор благодарит Ю. С. Самойленко за постановку задачи, ценные советы и замечания.

1. *Samoilenko Yu. S., Yakymenko D. Yu.* On n-tuples of subspaces in linear and unitary spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2009. – **15**, № 1. – P. 383 – 396.
2. *Albeverio S., Ostrovskyi V., Samoilenko Y.* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras // J. Algebra. – 2007. – **308**, Issue 2. – P. 567 – 582.
3. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 35.
4. *Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu. S.* On spectral theorems for families of linearly connected selfadjoint operators with prescribed spectra associated with extended Dynkin graphs // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – P. 1556 – 1570.
5. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, № 2. – С. 13 – 30.
6. *Кругляк С. А., Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Ортоскалярные представления колчанов в категории гильбертовых пространств // Вопросы теории представлений алгебр и групп. Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2006. – **338**. – С. 180 – 201.
7. *Moskaleva Yu. P., Samoilenko Yu. S.* Systems of n subspaces and representations of $*$-algebras generated by projections // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2006. – **12**, № 1. – P. 57 – 73.
8. *Grushevoy R., Yusenko K.* On the unitarization of linear representations of primitive partially ordered sets // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **190**. – P. 279 – 294.
9. *Якименко Д. Ю.* Унитаризация представлений частично упорядоченного множества, которое соответствует графу $\tilde{E}_6$ // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1424 – 1433.
10. *Donovan P., Freislich M.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Univ. – 1974. – P. 1 – 83.
11. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – P. 32 – 41.
12. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Там же. – 1972. – **28**. – С. 5 – 31.
13. *Klyachko A. A.* Stable bundles, representation theory and Hermitian operators // Selecta Math. (N. S.). – 1998. – **4**, № 3. – P. 419 – 445.
14. *Hu Yi.* Stable configurations of linear subspaces and quotient coherent shieves // Pure and Appl. Math. Quart. – 2005. – **1**, № 1. – P. 127 – 164.
15. *Grushevoy R., Yusenko K.* Unitarization of linear representations of non-primitive posets, http://arxiv.org/pdf/0807.0155.
16. *Kruglyak S. A., Popovich S. V., Samoilenko Yu. S.* The spectral problem and algebras associated with extended Dynkin graphs. I. // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 4. – P. 383 – 396.

Получено 18.01.10,
после доработки — 16.02.10