КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 512.552.12

С. І. Білявська, Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т)

ОСОБЛИВОСТІ СТРУКТУРИ ДВОБІЧНИХ ІДЕАЛІВ ОБЛАСТІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

We prove that, in a domain of elementary divisors, the intersection of all nontrivial two-sided ideals is equal to zero. We also show that the Bezout domain with a finite number of two-sided ideals is a domain of elementary divisors if and only if it is the 2-simple Bezout domain.

Доказано, что в области элементарных делителей пересечение всех нетривиальных двусторонних идеалов равно нулю. Также показано, что область Безу с конечным числом двусторонних идеалов является областью элементарных делителей тогда и только тогда, когда она есть 2-простая область Безу.

У роботі [1] описано прості області елементарних дільників як 2-прості області Безу. Крім того, в [2] отримано аналогічний результат про майже прості області елементарних дільників. У даній роботі ці результати поширено на випадок областей Безу зі скінченним числом двобічних ідеалів, а також показано, що перетин нетривіальних двобічних ідеалів області елементарних дільників дорівнює нулю.

Під кільцем R розумітимемо асоціативне кільце з $1 \neq 0$ без дільників нуля, а під простим кільцем — кільце, в якому існують лише тривіальні двобічні ідеали $\{0\}$ і R.

Нехай R — просте кільце. Тоді для довільного ненульового елемента a маємо $RaR = R$. Звідси випливає, що існують елементи $u_1, u_2, \ldots, u_k$, $v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_k \in R$ такі, що

$$u_1av_1 + u_2av_2 + \ldots + u_kav_k = 1.$$

Якщо для всіх ненульових елементів $a \in R$ існує натуральне число n таке, що $u_1av_1 + u_2av_2 + \ldots + u_nav_n = 1$ для деяких елементів $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_n \in R$, до того ж число n є найменшим з усіх можливих, то кільце R називається n-простим. У роботі [3] показано, що кільце матриць $M_n(P)$, де P — поле, є n-простим, але не є $(n-1)$-простим. Прикладом 2-простої області є диференціальне кільце від n диференціювань [1]. Зауважимо, що при $n = 1$ кільце від одного диференціювання є прикладом 2-простої області головних ідеалів. Прикладом 1-простої області може бути нескінченне просте кільце [4]. Нагадаємо, що майже проста область — це область з щонайбільше одним нетривіальним двобічним ідеалом, який збігається з радикалом Джекобсона [2]. Під областю елементарних дільників розумітимемо область R, в якій довільна $(n \times m)$-матриця A має канонічну діагональну редукцію, тобто для якої існують оборотні матриці $P \in GL_n(R)$, $Q \in GL_m(R)$ такі, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \varepsilon_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \bigcap R\varepsilon_i$ [5].

Зауважимо, що через $GL_n(R)$ позначено повну лінійну групу порядку n над кільцем R.

Теорема 1. *В області елементарних дільників перетин усіх нетривіальних двобічних ідеалів дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай $N = \bigcap I_\alpha$, де $\{I_\alpha\}$ — множина всіх нетривіальних двобічних ідеалів R. Нехай $N \neq (0)$ і елемент $a \in N \setminus \{0\}$. Оскільки R — область елементарних дільників, то для матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ існують оборотні матриці $P = (p_{ij}) \in GL_2(R)$ та $Q = (q_{ij}) \in GL_2(R)$ такі, що

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $RbR \subseteq zR \bigcap Rz$. Тоді $RzR \subseteq N$, тому що $RaR = RzR + RbR = RzR$.

Зауважимо, що $z \neq 0$, бо в протилежному випадку з (1) випливає $RbR = (0)$, а отже $b = 0$, що неможливо. Внаслідок того, що $RbR \subseteq RzR$ і $RzR \subseteq N$, за означенням двобічного ідеалу N можливі лише наступні випадки:

1) $RbR = \{0\}$;

2) $RbR = RzR = N$.

Зауважимо, що якщо $RbR = (0)$, то $b = 0$. Із (1) випливає $ap_{12} = 0$ і $ap_{22} = 0$. За припущенням $a \neq 0$, і оскільки R — область, то $p_{12} = p_{22} = 0$, що неможливо, оскільки ці елементи є елементами другого стовпчика оборотної матриці.

Розглянемо другий випадок. Нехай $RbR = RzR$. Тоді має місце включення

$$RzR = RbR = zR \bigcap Rz \subseteq RzR.$$

Таким чином, $RzR = zR$ і $RzR = Rz$. Звідси $zR = Rz$.

Розглянемо елемент z^2, тоді $z^2R = Rz^2 \subset RzR = Rz = zR$. Отже, $z^2R \subset N$. Враховуючи вираз для N, маємо $z^2R = R = zR$. Оскільки R —

область, то це можливо лише у випадку, коли z — зворотний елемент або $z = 0$, що неможливо внаслідок вибору елемента a.

Теорема 2. *Область Безу зі скінченним числом двобічних ідеалів є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою областю Безу.*

Доведення. Нехай R — область елементарних дільників зі скінченним числом двобічних ідеалів. Можливі два випадки:

1) R — непроста область Безу;

2) R — проста область Безу.

Розглянемо перший випадок, тоді в R існує скінченне число двобічних ідеалів $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Нехай $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$. Зауважимо, що оскільки R — область, то $N \neq (0)$, а це за теоремою 1 неможливо. Отже, перший випадок неможливий.

Нехай R є простою областю елементарних дільників і a — довільний ненульовий елемент області R. Оскільки R — область елементарних дільників, то для матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ існують оборотні матриці $P = (p_{ij}) \in GL_2(R)$, $Q = (q_{ij}) \in GL_2(R)$ та матриця $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ такі, що має місце (1), до того ж $RbR \subseteq zR \cap Rz$. Оскільки R — проста область, то можливі два випадки: $b = 0$ або z — зворотний елемент R. Якщо $b = 0$, то згідно з (1) маємо

$$ap_{12} = 0, \qquad ap_{22} = 0. \tag{2}$$

Внаслідок того, що R — область і $a \neq 0$, рівність (2) можлива лише у випадку, коли $p_{12} = p_{22} = 0$, що неможливо, оскільки $P \in GL_2(R)$.

Отже, можливим є лише випадок, коли z — зворотний елемент R. З точністю до еквівалентності матриць можемо вважати, що $z = 1$. Тоді з (1) отримуємо

$$ap_{11} = q_{11}, \qquad ap_{21} = q_{21}. \tag{3}$$

Матриця Q є оборотною, тоді $Rq_{11} + Rq_{21} = R$, звідки $uq_{11} + uq_{21} = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Тоді з рівності (3) отримуємо $uap_{11} + vap_{21} = 1$, тобто елемент a є 2-простим. Внаслідок довільності ненульового елемента a необхідність доведено.

З урахуванням [1] достатність є очевидною.

1. *Забавский Б. В.* Простые кольца нормальных делителей // Мат. студ. – 2004. – **22**, № 2. – С. 129 – 133.
2. *Zabavsky B. V., Kysil T. N.* Nearly simple elementary divisor domain // Bull. Acad. Stiinte Rep. Mold. Mat. – 2006. – № 3. – P. 121 – 123.
3. *Olszewski J.* On ideals of products of rings // Demonst. math. – 1994. – **27**, № 1. – P. 1 – 7.
4. *Lam T., Dugas A.* Quasi-duo rings and stable range descent // J. Pure and Appl. Algebra. – 2005. – **195**. – P. 243 – 259.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.

Одержано 23.09.09