УДК 514.75

Л. Л. Безкоровайна, Т. Ю. Вашпанова (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

A-ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ ЗІ СТАЦІОНАРНОЮ ДОВЖИНОЮ LGT-ЛІНІЙ

The present paper deals with the investigation of infinitesimal areal deformations (A-deformations) of the first order under which lengths of LGT-lines of a surface are preserved in the E_3-space. It is proved that any regular surface belonging to the class C^4 of nonzero Gauss curvature without umbilical points tolerates nontrivial A-deformations with stationary lengths of LGT-lines.

Объектом исследования в работе являются бесконечно малые ареальные деформации (A-деформации) первого порядка, при которых сохраняются длины LGT-линий поверхности в E_3-пространстве. Доказано, что любая регулярная поверхность класса C^4 ненулевой полной кривизны без омбилических точек допускает нетривиальные A-деформации со стационарными длинами LGT-линий.

Клас нескінченно малих деформацій, що зберігають елемент площі поверхні, є достатньо широким. Такі деформації узагальнюють нескінченно малі згинання. Основні рівняння A-деформації (4), якими ми користуємося в роботі, є узагальненням відомих рівнянь для поля згинання [1]. A-деформації вивчалися, наприклад, у роботах [2 – 9].

1. Поняття *LGT*-сітки поверхні. Нехай S — регулярна поверхня класу C^3, гомеоморфна області G площини, задана векторно-параметричним рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$, де $\mathbf{r}$ — радіус-вектор точки поверхні, (x^1, x^2) — внутрішні координати цієї точки. Формула для геодезичного скруту лінії на поверхні має вигляд [9]

$$\tau_s = \frac{\rho_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta}, \qquad (1)$$

де $g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta$ — перша, а $\rho_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ — четверта основні квадратичні форми поверхні, $\rho_{ij} = \frac{1}{2}\left(c_{i\alpha} b_j^\alpha + c_{j\alpha} b_i^\alpha\right)$, $b_\alpha^i = b_{\alpha k} g^{ik}$, $b_{\alpha k}$ — коефіцієнти другої основної квадратичної форми, $c_{i\alpha}$ — дискримінантний тензор поверхні ($c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}$, $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$). З (1) випливає, що значення геодезичного скруту залежить від точки поверхні і напряму $dx^1 : dx^2$.

Екстремальні значення геодезичного скруту в даній точці поверхні будемо називати *головними геодезичними скрутами*, а напрями на поверхні, у яких геодезичний скрут досягає екстремальних значень, — *головними напрямами геодезичного скруту*. Головні напрями геодезичного скруту поверхні можна визначити з рівняння [10]

$$h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0, \qquad (2)$$

де

$$h_{\alpha\beta} = 2(H g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}), \qquad (3)$$

H — середня кривина поверхні S. Далі всі індекси набувають значень 1, 2.

Має місце така теорема.

Теорема 1 [10]. *У будь-якій точці регулярної C^3-поверхні, за винятком омбілічних точок, існують два різних дійсних головних напрями геодезичного скруту.*

Лінію на поверхні, напрям якої в кожній точці збігається з головним напрямом геодезичного скруту, будемо називати *лінією геодезичного скруту* (*LGT-лінією*). Лінії геодезичного скруту поверхні визначаються рівнянням (2) і в сукупності визначають *сітку ліній геодезичного скруту* (*LGT-сітку*).

Теорема 2 [10]. *На регулярній поверхні класу C^3 без омбілічних точок існує дійсна регулярна LGT-сітка, до того ж ця сітка є ортогональною.*

2. Постановка задачі. Розглянемо нескінченно малу ареальну деформацію першого порядку поверхні S з полем зміщення $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ і параметром деформації $t \to 0$:

$$\mathbf{r}^*(x^1, x^2) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + t\mathbf{y}(x^1, x^2).$$

Частинні похідні вектора зміщення за базисом $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$ розкладемо у вигляді

$$\mathbf{y}_i = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta + c_{i\alpha}T^{\alpha}\mathbf{n},$$

де $T^{\alpha\beta}$, T^{α} — деякі тензорні поля на S (поля деформації). У випадку A-деформації вони є розв'язками системи рівнянь (див., наприклад, [9])

$$T^{\alpha k}_{,\alpha} - b^k_\alpha T^\alpha = 0, \qquad b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0, \qquad c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0, \tag{4}$$

в якій комою позначено коваріантну похідну на базі метричного тензора g_{ij} поверхні S.

Теорема 3. *Необхідною і достатньою умовою того, щоб при A-деформації поверхні LGT-лінії зберігали свою довжину, є рівність*

$$2T^{\gamma\delta}c_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + 2T^{\gamma\delta}c_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} = 2\mu(b_{\alpha\beta} - Hg_{\alpha\beta}), \tag{5}$$

де $\mu(x^1, x^2)$ *— деяка функція.*

Доведення. При A-деформації квадрат елемента дуги ds^2 кривої на поверхні S має приріст першого порядку відносно t (величинами вищих порядків нехтуємо):

$$ds^{*2} - ds^2 = t \cdot 2\varepsilon_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \boxed{t^2},$$

до того ж варіацію $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні можна виразити через тензорне поле $T^{\alpha\beta}$ [9]:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = T^{\gamma\delta}(c_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + c_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}).$$

Відомо, що на S існують дві різні дійсні сім'ї ліній стаціонарної довжини при A-деформації. При цьому лінії різних сімей завжди ортогональні [5, 6]. Диференціальне рівняння сітки ліній стаціонарної довжини можна подати у вигляді [6]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0. \tag{6}$$

Будемо вимагати, щоб при A-деформації поверхні диференціальні рівняння LGT-ліній (2) і ліній стаціонарної довжини (6) визначали один і той самий геометричний образ. Звідси отримаємо необхідну і достатню умову того, щоб при A-деформації поверхні LGT-лінії зберігали свою довжину:

$$4\varepsilon_{\alpha\beta} = -\mu h_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

3. Випадок тривіальних деформацій. Розглянемо випадок $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$, тоді

$$T^{\gamma\delta}(c_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + c_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}) = 0. \tag{8}$$

Цьому припущенню відповідає нескінченно мале згинання, при якому будь-яка крива на поверхні зберігає елемент довжини. A-деформація, яка задовольняє (8) у даній точці (області) поверхні, називається *тривіальною* в цій точці (області).

Мають місце такі леми.

Лема 1. *A-деформація поверхні, що зберігає довжини LGT-ліній, буде тривіальною тоді і лише тоді, коли* $\mu = 0$.

Лема 2. *A-деформація поверхні, що зберігає довжини LGT-ліній, буде нетривіальною тоді і лише тоді, коли* $\mu \neq 0$.

Випадок $h_{\alpha\beta} = 0$ виключаємо з розгляду, оскільки ця рівність виконується винятково в омбілічних точках. Далі будемо вважати, що $h_{\alpha\beta} \neq 0$.

Таким чином, задача про існування A-деформації поверхні зі стаціонарними довжинами LGT-ліній аналітично зводиться до розгляду системи рівнянь (4), (7). Ця система складається з шести диференціальних рівнянь відносно шести невідомих функцій — симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$, компонент вектора T^{α} та функції $\mu(x^1, x^2)$.

Має місце така теорема.

Теорема 4. *Для того щоб однозв'язна поверхня S класу C^3 допускала нетривіальні A-деформації зі стаціонарною довжиною LGT-ліній, необхідно і достатньо, щоб система рівнянь* (4), (7) *мала розв'язок за умови* $\mu \neq 0$.

4. Існування A-деформації мінімальної поверхні зі стаціонарною довжиною LGT-ліній. Нехай S — мінімальна поверхня $(H = 0)$. Згідно з формулою (3) отримаємо, що LGT-сітка збігатиметься з сіткою асимптотичних ліній, а умова (5) набере вигляду

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \mu b_{\alpha\beta}.$$

Отже, для мінімальної поверхні задача про існування нескінченно малих ареальних деформацій зі стаціонарною довжиною LGT-ліній зводиться до розв'язування задачі про існування A-деформацій поверхні, що зберігають довжину асимптотичних ліній, яка розглядалася в [6].

Враховуючи отримані в [6] результати, отримуємо таку теорему.

Теорема 5. *Мінімальна поверхня допускає нетривіальні A-деформації, що не змінюють довжину LGT-ліній. Тензори деформації залежать від однієї довільної функції двох змінних класу C^2 та двох довільних функцій однієї змінної класу C^2.*

5. Про існування A-деформації зі стаціонарною довжиною LGT-ліній немінімальної поверхні. Віднесемо поверхню S до ліній кривини, тоді $g_{12} = b_{12} = 0$, і поряд з (5) розглянемо алгебраїчне рівняння $(4)_2$ відносно $T^{\alpha\beta}$:

$$g_{11}T^{11} - g_{22}T^{22} = 0,$$

$$b_{11}T^{11} + b_{22}T^{22} = -T^{\gamma}_{,\gamma},$$

$$T^{12} = \frac{\mu}{4\sqrt{g}}\frac{h_{22}}{g_{22}} = -\frac{\mu}{4\sqrt{g}}\frac{h_{11}}{g_{11}}.$$

При $H \neq 0$ знайдемо розв'язок цієї алгебраїчної системи рівнянь відносно T^{11}, T^{22}, T^{12}:

$$T^{11} = -\frac{T^{\gamma}_{,\gamma}}{2H} g^{11},$$

$$T^{22} = -\frac{T^{\gamma}_{,\gamma}}{2H} g^{22},$$

$$T^{12} = \frac{\mu}{4\sqrt{g}} \frac{h_{22}}{g_{22}} = -\frac{\mu}{4\sqrt{g}} \frac{h_{11}}{g_{11}},$$

якому надамо тензорного вигляду

$$T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\varphi - A^{\alpha\beta}\mu, \tag{9}$$

де функція $\varphi(x^1, x^2)$ має вигляд

$$\varphi = -\frac{T^{\gamma}_{,\gamma}}{2H}, \tag{10}$$

а тензор

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(Hc^{\beta\alpha} - c^{k\alpha} b^{\beta}_{k}\right).$$

Тензор $A^{\alpha\beta}$ є симетричним, оскільки рівність $c_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = 0$ для нього виконується тотожно.

Очевидно, тензор деформації $T^{\alpha\beta}$ повинен задовольняти систему рівнянь $(4)_1$. Знайдемо коваріантну похідну від $T^{\alpha\beta}$ і підставимо її в систему рівнянь $(4)_1$:

$$b^{\beta}_{\alpha} T^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha} - A^{\alpha\beta}_{,\alpha}\mu - A^{\alpha\beta}\mu_{\alpha}.$$

Далі, помноживши отриману рівність на d^{k}_{β}, одержимо шуканий вираз для тензора T^{α}:

$$T^{\alpha} = d^{k\alpha}\varphi_k - A^{k\beta} d^{\alpha}_{\beta}\mu_k - A^{k\beta}_{,k} d^{\alpha}_{\beta}\mu, \tag{11}$$

де

$$d^{k\alpha} = \frac{1}{K} c^{ki} c^{\alpha j} b_{ij}, \quad K \neq 0, \quad k, \alpha = 1, 2,$$

— елементи матриці, оберненої до $\| b_{k\alpha} \|$, $\mu_k = \dfrac{\partial\mu}{\partial x^k}$.

З (11) вираз T^{α} підставимо в (10). Отримаємо одне лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно функцій μ та φ:

$$(d^{k\alpha}\varphi_k)_{,\alpha} + 2H\varphi = A^{k\beta} d^{\alpha}_{\beta}\mu_{k,\alpha} + (A^{k\beta} d^{\alpha}_{\beta})_{,\alpha}\mu_k + A^{k\beta}_{,k} d^{\alpha}_{\beta}\mu_{\alpha} + (A^{k\beta}_{,k} d^{\alpha}_{\beta})_{,\alpha}\mu. \tag{12}$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 6. *Якщо функції* $\mu(x^1, x^2) \neq 0$ *та* $\varphi(x^1, x^2)$ *є розв'язками диференціального рівняння* (12), *то існує нетривіальна* A*-деформація зі стаціонарною довжиною LGT-ліній поверхні класу* C^4 *за умов* $K \neq 0$, $H \neq 0$ *без омбілічних точок. При цьому тензори деформації* $T^{\alpha\beta}$, T^{α} *через функції* μ *та* φ *виражаються у явному вигляді за формулами* (9), (11) *відповідно.*

6. Про існування окремих локальних розв'язків задачі. Припустимо, що $\mu(x^1, x^2) \neq 0$ є заздалегідь заданою функцією точки поверхні класу C^2. Тоді рівняння (12) у загальному вигляді є неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку відносно функції $\varphi(x^1, x^2)$. Дискримінант цього рівняння $\Delta = \dfrac{1}{gK}$. Отже, воно має еліптичний тип при $K > 0$ і гіперболічний при $K < 0$. Зазначимо, що рівняння (12) узагальнює відоме рівняння Вейнгартена [1]

$$(d^{k\alpha}\varphi_k)_{,\alpha} + 2H\varphi = 0, \tag{13}$$

яке називається характеристичним рівнянням поля обертань при нескінченно малих згинаннях поверхні, а його розв'язки називаються характеристичними функціями.

Якщо $S \in C^4$ — поверхня еліптичного типу, то коефіцієнти рівняння (13) є регулярними функціями класу C^3 і рівняння (12) в достатньо малій області $\bar{G}$ завжди має розв'язок, який залежить від довільної функції $\omega(x^1, x^2) \in C^3$ [11]. Звідси випливає така теорема.

Теорема 7. *Будь-яка поверхня* $S \in C^4$ *еліптичного типу без омбілічних точок допускає нетривіальні* A*-деформації, що зберігають довжину LGT-ліній в достатно малій області* $\bar{G}$. *Тензори деформації залежать від двох довільних регулярних функцій* $\mu(x^1, x^2) \in C^2$, $\mu \neq 0$, *та* $\omega(x^1, x^2) \in C^3(\bar{G})$.

Навпаки, якщо $\varphi(x^1, x^2)$ є певною характеристичною функцією, то рівняння (12) набирає вигляду

$$A^{k\beta} d^{\alpha}_{\beta} \mu_{k,\alpha} + (A^{k\beta} d^{\alpha}_{\beta})_{,\alpha} \mu_k + A^{k\beta}_{,k} d^{\alpha}_{\beta} \mu_{\alpha} + (A^{k\beta}_{,k} d^{\alpha}_{\beta})_{,\alpha} \mu = 0 \tag{14}$$

або, інакше,

$$D^{k\alpha} \mu_{k,\alpha} + (A^{k\beta} d^{\alpha}_{\beta})_{,\alpha} \mu_k + A^{k\beta}_{,k} d^{\alpha}_{\beta} \mu_{\alpha} + (A^{k\beta}_{,k} d^{\alpha}_{\beta})_{,\alpha} \mu = 0 \tag{15}$$

де $D^{k\alpha} = \dfrac{1}{2}\left(A^{k\beta} d^{\alpha}_{\beta} + A^{\alpha\beta} d^{k}_{\beta} \right)$. Отримали диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно функції $\mu(x^1, x^2)$. У кожній точці поверхні S $(K \neq 0)$ дискримінант цього рівняння $\Delta = -\left(\dfrac{H}{K}\right)^2 \dfrac{E}{4g} < 0$, де $E = H^2 - K$ — ейлерова різниця. Звідси випливає, що рівняння (15) є рівнянням гіперболічного типу.

Має місце така теорема.

Теорема 8. *Якщо* $\mu(x^1, x^2) \in C^2$ *є ненульовим розв'язком диференціального рівняння* (14), *а* $\varphi(x^1, x^2)$ *— характеристичною функцією на* $S \in C^4$, *то існує нетривіальна* A*-деформація зі стаціонарною довжиною* LGT*-ліній по-*

верхні класу C^4 *за умов* $K \neq 0$, $H \neq 0$ *без омбілічних точок. При цьому тензори деформації виражаються у явному вигляді за формулами* (9), (11) *відповідно.*

Зокрема, при $\varphi = 0$ отримаємо такі вирази компонент тензорів деформації:

$$T^{\alpha\beta} = -A^{\alpha\beta}\mu, \tag{16}$$

$$T^{\alpha} = -A^{k\beta}d^{\alpha}_{\beta}\mu_k - A^{k\beta}_{,k}d^{\alpha}_{\beta}\mu, \tag{17}$$

які визначають нетривіальні нескінченно малі ареальні деформації з незмінною довжиною *LGT*-ліній. Отже, має місце така теорема.

Теорема 9. *Поверхня* $S \in C^4$ *ненульових повної і середньої кривин без омбілічних точок допускає нетривіальні* A*-деформації зі стаціонарними довжинами LGT-ліній. Тензори деформації* $T^{\alpha\beta}$, T^{α} *подано у вигляді* (16) *та* (17) *відповідно через одну функцію* $\mu(x^1, x^2) \in C^2$, *яка є розв'язком диференціального рівняння* (14).

7. Приклад. Нехай рівняння еліптичного параболоїда задано у вигляді

$$\mathbf{r} = \left\{ u\cos v,\ \ u\sin v,\ \ \frac{u^2}{2} \right\}.$$

Обчислимо

$$g_{11} = 1+u^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = u^2,$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{22} = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\rho_{11} = \rho_{22} = 0, \qquad \rho_{12} = \frac{u^3}{2(u^2+1)},$$

$$h_{11} = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad h_{12} = 0, \qquad h_{22} = -\frac{u^4}{\sqrt{(1+u^2)^3}},$$

$$b_1^1 = \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^3}}, \qquad b_2^2 = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad b_2^1 = b_1^2 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \qquad \Gamma_{22}^1 = -\frac{u}{1+u^2},$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{u}{1+u^2}, \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \qquad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{u},$$

$$K = \frac{1}{(1+u^2)^2}, \qquad 2H = \frac{2+u^2}{\sqrt{(1+u^2)^3}}.$$

Розглянемо A-деформації, що зберігають довжину *LGT*-ліній для еліптичного параболоїда, за умови $\varphi = 0$. Рівняння (14) для цієї поверхні набере вигляду

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} + \left(\frac{4(1-u^2)}{u(u^2+2)(1+u^2)} \right)\frac{\partial\mu}{\partial v} = 0. \tag{18}$$

Зведемо це рівняння до вигляду

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\psi(u, v)\xi(u), \qquad (19)$$

де

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = \psi(u, v), \qquad \xi(u) = \frac{4(1-u^2)}{u(u^2+2)(1+u^2)}.$$

Неважко знайти розв'язок рівняння (19):

$$\mu(u, v) = e^{-\int \xi(u)\,dx} c(v),$$

де $c(v) = \int c_1(v)dv$ — довільна функція від однієї змінної v.

Загальний розв'язок рівняння (18) матиме вигляд

$$\mu(u, v) = \frac{(u^2+1)^4}{u^2(u^2+2)^3} c(v),$$

а для тензорів A-деформації, що зберігає довжини LGT-ліній, дістанемо такі вирази:

$$T^{11} = T^{22} = 0, \qquad T^{12} = T^{21} = -\frac{(u^2+1)^2}{4u(u^2+2)^3} c(v), \qquad (20)$$

$$T^1 = -\frac{\sqrt[2]{(u^2+1)^7}}{4u(u^2+2)^3} c'(v), \qquad T^2 = -\frac{\sqrt[2]{(u^2+1)^3}(1-u^2)}{2(u^2+2)^4} c(v). \qquad (21)$$

Очевидно, що ця деформація не є тривіальною. Отже, правильною є така теорема.

Теорема 10. *Поверхня еліптичного параболоїда допускає нетривіальні A-деформації, при яких зберігаються довжини LGT-ліній. Тензори деформації* $T^{\alpha\beta}$, T^{α} *виражаються у явному вигляді за формулами* (20) *і* (21).

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
2. *Paul Vincensini.* Sur les déformations équivalents infinitésimales des surfaces // Rev. Unuv. nac. Tucumán A. – 1962. – **14**, № 2. – P. 177 – 188.
3. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. – М.; Л., 1950. – 428 с.
4. *Фоменко В. Т.* Некоторые результаты теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Мат. сб. – 1967. – **72 (114)**, № 3. – С. 388 – 411.
5. *Колобов П. Г.* О бесконечно малых деформациях поверхности с сохранением площади // Уч. зап. Кабардино-Балкар. ун-та. Сер. мат. – 1966. – Вып. 30. – С. 65 – 68.
6. *Безкоровайна Л. Л.* Про нескінченно малі деформації, що зберігають довжину асимптотичних ліній // Мат. наук. конф. мол. учених (природ. науки). – Одеса, 1970. – С. 104 – 109.
7. *Безкоровайная Л. Л.* Канонические А-деформации, сохраняющие длины линий кривизны поверхности // Мат. сб. – 1975. – **97 (139)**, № 2 (6). – С. 163 – 176.
8. *Дерманец Н. В.* О продолжении бесконечно малых ареальных деформаций первого порядка поверхности положительной кривизны с краем в аналитические. – Одесса, 1985. – 46 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 813 Ук-85.
9. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки: Навч. пос. – Одеса: Астропринт, 1999. – 168 с.
10. *Вашпанова Т. Ю., Безкоровайна Л. Л.* Геодезичний скрут та його екстремальні значення // Мат. наук. конф. мол. учених і студентів з диференц. рівнянь та їх застосувань (Донецьк, 6–7 грудня 2006 р.). – Донецьк, 2006. – С. 28 – 29.
11. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966.

Одержано 19.03.10