УДК 517. 53

О. В. Боднар, М. В. Заболоцький (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

КРИТЕРІЇ РЕГУЛЯРНОСТІ ЗРОСТАННЯ ЛОГАРИФМА МОДУЛЯ ТА АРГУМЕНТУ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

For entire functions whose counting function of zeros is slowly growing, we establish criteria of the regular growth of their logarithm of modulus and argument in $L^p[0,\ 2\pi]$-metric.

Для целых функций, счетная функция нулей которых является медленно возрастающей, установлены критерии регулярного роста ее логарифма модуля и аргумента в $L^p[0,\ 2\pi]$-метрике.

1. Вступ та формулювання основних результатів. Додатні, неспадні, необмежені, неперервно диференційовні на $\mathbb{R}_+$ функції будемо називати функціями зростання. Функції зростання v і $\tilde{v}$ такі, що $v(r) \sim \tilde{v}(r)$, $r \to +\infty$, вважатимемо еквівалентними і будемо ототожнювати. Клас функцій зростання v, для яких $\dfrac{rv'(r)}{v(r)} \to 0$ при $r \to +\infty$, позначимо через L. Відомо [1, с. 15], що функції класу L є повільно зростаючими і, навпаки, для довільної повільно зростаючої до $+\infty$ функції знайдеться функція з класу L, еквівалентна їй. Нехай $n(r) = n(r,\ 0,\ f)$ — лічильна функція послідовності нулів (a_n) цілої функції f, розташованих у порядку неспадання їх модулів. Позначимо через $\mathcal{H}_0(L)$ клас цілих функцій f нульового порядку, нулі яких задовольняють умову

$$\exists\, v \in L \quad \exists\, A > 0 \quad \forall\, r > 0 : n(r,\ 0,\ f) < Av(r).$$

Не зменшуючи загальності, далі будемо вважати, що $f(0) = 1$, $v(0) = 0$.

В [2, с. 78] наведено опис регулярного зростання логарифма модуля, а в [3, 4] — аргументу мероморфних функцій додатного порядку в $L^p\,[0,\ 2\pi]$-метриці (див. також [5]). Метою даної роботи є встановлення подібних результатів для функцій класу $\mathcal{H}_0(L)$.

Далі вважатимемо функцію

$$\ln f(z) \;=\; \int_0^z \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

визначеною в комплексній площині з радіальними розрізами від нулів цілої функції f до $+\infty$. Функція $\ln f(z)$ є однозначною гілкою багатозначної функції $\operatorname{Ln} f = \ln|f(z)| + i \operatorname{Ang} f(z)$ такою, що $\ln f(0) = 0$. Нехай $\alpha_j = \operatorname{ang} a_j$, $0 \le \alpha_j < 2\pi$, a_j — нулі цілої функції f. Якщо покласти $\alpha_j^{(m)} = \alpha_j + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то співвідношення

$$s(r,\ \varphi) - s(r,\ a) \;=\; 2\pi \sum_{a<\alpha_j \le \varphi,\, |a_j| \le r} 1,$$

$$s(r,\ \varphi + 2\pi) - s(r,\ \varphi) \;=\; s(r,\ a + 2\pi) - s(r,\ a)$$

визначають для довільних чисел $a \in \mathbb{R}$ і значень $s(r,\ a)$ сім'ю мір $(s(r,\ \varphi))$ на одиничному колі.

Покладемо для $k \in \mathbb{Z}$

$$n_k(r) = \sum_{|a_j| \le r} e^{-ik\alpha_j}, \qquad N_k(r) = \int_0^r \frac{n_k(t)}{t}\,dt.$$

Тоді $n_0(r) = n(r)$, $N_0(r) = N(r)$ і для кожного $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ правильними є рівності [2, с. 105]

$$n_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{-ik\varphi}\,ds(r, \varphi).$$

Будемо говорити, що нулі функції $f \in \mathcal{H}_0(L)$ мають кутову щільність, якщо в усіх точках неперервності φ і η деякої міри μ на одиничному колі існує границя

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{s(r, \varphi) - s(r, \eta)}{v(r)} = \mu(\varphi) - \mu(\eta).$$

З теореми Каратеодорі – Леві (див., наприклад, [2, с. 98]) отримуємо, що нулі функції f із класу $\mathcal{H}_0(L)$ мають кутову щільність тоді і лише тоді, коли для довільного $k \in \mathbb{Z}$ існують скінченні границі

$$\delta_k = \lim_{r\to+\infty} \frac{n_k(r)}{v(r)}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Нехай нулі функції* $f \in \mathcal{H}_0(L)$ *мають кутову щільність,*

$$G_f(\theta) = i \sum_{k\neq 0} \frac{\delta_k}{k} e^{ik\theta}.$$

Тоді для довільного $p \in [1, +\infty)$ *виконується*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)} - G_f(\theta) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{v_1(r)} - \delta_0 \right|^p d\theta \right\}^{1/p} = 0, \tag{3}$$

де $v_1(r) = \int_0^r \frac{v(t)}{t}\,dt$.

Теорема 2. *Нехай* f *належить* $\mathcal{H}_0(L)$, *для всіх* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *існують границі* (1) *і функція* $G_f(\theta)$ *така, як в теоремі* 1. *Тоді для довільного* $p \in$ $\in [1, +\infty)$

$$\lim_{r\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} - iG_f(\theta) \right|^p d\theta \right\}^{1/p} = 0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Нехай* f *належить* $\mathcal{H}_0(L)$ *і для деяких числа* $p \in [1, +\infty)$ *та функції* $H \in L^p[0, 2\pi]$ *виконується співвідношення*

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln f(re^{i\theta})-N(r)}{v(r)}-i\,H(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} = 0.$$

Тоді $\int_0^{2\pi} H(\theta)\,d\theta = 0$ *і для довільного* $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} N_k(r)/v_1(r) = \Delta_k.$$

Позначимо через L^* підклас функцій зростання v класу L такий, що

$$\frac{rv'(r)}{v(r)}\searrow 0,\quad r\to+\infty.$$

Теорема 4. *Нехай* f *належить* $\mathcal{H}_0(L^*)$ *і для деяких чисел* $p\in[1,+\infty)$, $b_0\in\mathbb{R}$ *та функції* $H\in L^p[0,2\pi]$ *виконуються умови*

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)}-H(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} = 0,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{v_1(r)}-b_0\right|^p d\theta\right\}^{1/p} = 0.$$

Тоді нулі цілої функції f *мають кутову щільність,* $b_0=\delta_0$, $H(\theta)=G_f(\theta)$ *для майже всіх* $\theta\in[0,2\pi]$.

2. Допоміжні твердження. Нехай $C_k(r,\Phi)$, $k\in\mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції $\Phi(re^{i\varphi})$ як функції від φ, тобто

$$C_k(r,\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(re^{i\varphi})\,e^{-ik\varphi}\,d\varphi,\quad r>0.$$

Покладемо

$$l_k(r) = l_k(r,f) = C_k(r,\ln f),\quad c_k(r) = c_k(r,f) = C_k(r,\ln|f|),$$
$$a_k(r) = a_k(r,f) = C_k(r,\arg f).$$

Нехай $\ln f(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k z^k$ — розвинення в деякому околі точки $z=0$. Враховуючи [2, с. 60], що для цілої функції порядку $\rho\ge 0$

$$\gamma_k = -\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{a_j^k},\quad k\ge[\rho]+1,$$

з формул для $l_k(r)$, $c_k(r)$, $a_k(r)$ (див., наприклад, [5; 2, с. 10; 3]) отримуємо наступні формули для коефіцієнтів Фур'є.

Лема 1. *Для цілої функції* f *нульового порядку справджуються рівності*

$$l_k(r) = -r^k\int_r^{+\infty}\frac{n_k(t)}{t^{k+1}}\,dt,\quad k\ge 1, \tag{5}$$

$$l_k(r) = r^k \int_r^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}\, dt, \quad k \le -1, \tag{6}$$

$$ia_k(r) = -\frac{1}{2} r^k \int_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}\, dt - \frac{1}{2} r^{-k} \int_0^r \frac{n_k(t)}{t^{-k+1}}\, dt, \quad k \ge 1, \tag{7}$$

$$l_0(r) = c_0(r) = N(r), \quad a_0(r) = 0, \quad ia_k(r) = i\bar{a}_{-k}(r), \quad k \le -1. \tag{8}$$

Для $k \in \mathbb{Z}$ і функції γ, інтегровної на $[0, +\infty)$, покладемо

$$\mathrm{J}_k(r, \gamma) = r^k \int_r^{+\infty} \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}}\, dt, \qquad \mathrm{I}_k(r, \gamma) = r^{-k} \int_0^r \frac{\gamma(t)}{t^{-k+1}}\, dt.$$

Лема 2. *Для* $k \ge 1$ *і* $v \in L$ *справджуються співвідношення*

$$\mathrm{J}_k(r, \gamma) \sim \mathrm{I}_k(r, \gamma) \sim \frac{v(r)}{k}, \quad r \to +\infty.$$

Доведення. За правилом Лопіталя маємо

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\mathrm{J}_k(r, v)}{v(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{\int_r^{+\infty} v(t)\, t^{-k-1}\, dt}{r^{-k} v(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{-v(r)\, r^{-k-1}}{-kr^{-k-1} v(r) + r^{-k} v'(r)} =$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \frac{v(r)}{kv(r) - rv'(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{k - \dfrac{rv'(r)}{v(r)}} = \frac{1}{k}$$

і, аналогічно,

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\mathrm{I}_k(r, \gamma)}{v(r)} = \frac{v(r)\, r^{k-1}}{kr^{k-1} v(r) + r^k v'(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{k + \dfrac{rv'(r)}{v(r)}} = \frac{1}{k}.$$

Лема 3. *Нехай* f *належить* $\mathcal{H}_0(L)$. *Тоді*

$$\exists B > 0 \quad \exists r_0 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \quad \forall r \ge r_0:$$

$$|l_k(r)| \le \frac{B}{|k|} v(r), \qquad |a_k(r)| \le \frac{B}{|k|} v(r).$$

Доведення. Оскільки $|n_k(r)| \le n(r) \le Av(r)$, то з формул (5) – (7) для коефіцієнтів $l_k(r)$ і $a_k(r)$ одержуємо

$$|l_k(r)| \le r^k \int_r^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{k+1}}\, dt \le A\mathrm{J}_k(r, v), \quad k \ge 1,$$

$$|l_k(r)| \le r^k \int_0^r \frac{n(t)}{t^{k+1}}\, dt \le A\mathrm{I}_{-k}(r, v), \quad k \le -1,$$

$$|a_{-k}(r)| = |a_k(r)| \le \frac{1}{2} A\mathrm{J}_k(r, v) + \frac{1}{2} A\mathrm{I}_k(r, v), \quad k \ge 1.$$

Далі, для $k \ge 1$ і $r > 0$ маємо

$$\mathrm{I}_k(r,\, v) \;=\; r^{-k}\int_0^r \frac{v(t)}{t^{-k+1}}\,dt \;\le\; \frac{v(r)}{r^k}\int_0^r t^{k-1}\,dt \;\le\; \frac{v(r)}{k}\,.$$

Оскільки $v(r)$ — повільно зростаюча функція при $r \to +\infty$, то $v(2\,r) \le \dfrac{3}{2}\,v(r)$ для $r \ge r_0$. Тому для $k \ge 1$ і $r \ge r_0$ отримуємо

$$\mathrm{J}_k(r,\, v) \;=\; r^k \int_r^{+\infty} \frac{v(t)}{t^{k+1}}\,dt \;=\; r^k \sum_{m=0}^{+\infty} \int_{2^m r}^{2^{m+1} r} \frac{v(t)}{t^{k+1}}\,dt \;\le\; r^k \sum_{m=0}^{+\infty} v(2^{m+1} r)\,\frac{2^{-km}}{k r^k} \;\le$$

$$\le\; \frac{2\,v(r)}{k} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1} 2^{-(m+1)} \;\le\; \frac{2\,v(r)}{k} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{m+1} \;\le\; \frac{6\,v(r)}{k},$$

що доводить лему 3.

Лема 4. *Нехай* f *належить* $\mathcal{H}_0(L)$ *і виконуються співвідношення* (1). *Тоді*

$$l_k(r) \;\sim\; i a_k(r) \;\sim\; -\frac{\delta_k}{k}\,v(r), \quad r \to +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,.$$

Доведення. З огляду на лему 1 $l_k(r) = -\mathrm{J}_k\big(r,\, n_k(r)\big)$ для $k \ge 1$, $l_k(r) = \mathrm{I}_k\big(r,\, n_k(r)\big)$ для $k \le -1$, $a_k(r) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{J}_k\big(r,\, n_k(r)\big) - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{I}_k\big(r,\, n_k(r)\big)$ для $k \ge 1$, а за умовою леми $n_k(r) \sim \delta_k v(r)$, $r \to +\infty$. Тому згідно з лемою 2 отримуємо $(r \to +\infty)$

$$l_k(r) \;\sim\; -\delta_k\,\mathrm{J}_k(r,\, v) \;\sim\; -\frac{\delta_k}{k}\,v(r), \quad k \ge 1,$$

$$l_k(r) \;\sim\; \delta_k\,\mathrm{I}_{-k}(r,\, v) \;\sim\; -\frac{\delta_k}{k}\,v(r), \quad k \le -1,$$

$$i a_k(r) \;\sim\; -\frac{\delta_k}{2}\,\mathrm{J}_k(r,\, v) \;-\; \frac{\delta_k}{2}\,\mathrm{I}_k(r,\, v) \;\sim\; -\frac{\delta_k}{k}\,v(r), \quad k \ge 1,$$

$$i a_k(r) \;=\; \overline{-i a_{-k}(r)} \;\sim\; -\left(\frac{\overline{\delta}_{-k}}{k}\,v(r)\right) \;=\; -\frac{\overline{\delta}_k}{k}\,v(r), \quad k \le -1,$$

оскільки $\overline{\delta}_{-k} = \delta_k$, що доводить лему 4.

Лема 5. *Якщо* v *належить* L^*, *то функція* $\ln v_1(r)$ *вгнута відносно логарифма.*

Доведення. Оскільки

$$v(r) \;=\; \int_0^r \frac{t v'(t)}{v(r)}\,\frac{v(t)}{t}\,dt \;\ge\; \frac{r v'(r)}{v(r)} \int_0^r \frac{v(t)}{t}\,dt \;=\; \frac{r v'(r)}{v(r)}\,v_1(r)$$

і $v_1'(r)\,r = v(r)$, то $\dfrac{v'(r)}{v(r)} \le \dfrac{v_1'(r)}{v_1(r)}$.

Далі

$$\frac{d^2\,\ln v_1(r)}{d^2\,\ln r} \;=\; \left(\frac{v(r)}{v_1(r)}\right)'_{\ln r} \;=\; \frac{r v(r)}{v_1(r)}\left(\frac{v'(r)}{v(r)} - \frac{v_1'(r)}{v_1(r)}\right) \;\le\; 0,$$

а отже, функція $\ln v_1(r)$ вгнута відносно логарифма.

З теорем 5 і 6 роботи [6] отримуємо наступне твердження.

Лема 6. *Нехай функція g неперервно диференційовна, опукла на $[a, +\infty)$, $g'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ і $\ln g(x)$ — вгнута функція. Тоді для довільної опуклої функції f з існування границі*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 < K < +\infty,$$

випливає існування границі

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

3. Доведення теорем 1 і 2. Нехай f належить $\mathcal{H}_0(L)$. З існування для $k \neq 0$ границь (1) і оцінок $\left|\frac{i\delta_k}{k}\right| \le \frac{A}{k}$ випливає, з урахуванням теореми Фішера – Рісса, існування функції $G_f(\theta)$ і її належність до класу $L^2[0, 2\pi]$. З огляду на лему 3 для $r \ge r_0$ маємо

$$|l_k(r)| \le \frac{B}{|k|} v(r), \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

а отже, послідовність $\left\{\frac{l_k(r)}{v(r)} + \frac{\delta_k}{k}\right\}$ належить простору l_q при всіх $q > 1$ і $r > r_0$. Тоді, застосувавши теорему Хаусдорфа – Юнга при $p \ge 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, одержимо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} - i\,G_f(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{k\neq 0}\left|\frac{l_k(r)}{v(r)} + \frac{\delta_k}{k}\right|^q\right\}^{1/q}.$$

Отриманий ряд завдяки лемі 3 є рівномірно збіжним на $[r_0, +\infty)$. Виконавши у цьому ряді почленний граничний перехід при $r \to +\infty$, з урахуванням леми 4 отримаємо співвідношення (4) для $p \ge 2$. Звідси та з нерівності Гельдера встановлюємо твердження теореми 2 і для $1 \le p < 2$.

Із співвідношення (4), враховуючи, що для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} - i\,G_f(\theta) =$$

$$= \frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right| - N(r)}{v(r)} + i\left(\frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)} - G_f(\theta)\right),$$

отримуємо (2) та

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)}\right|^p d\theta\right\}^{1/p} = 0.$$

Завдяки правилу Лопіталя

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N(r)}{v_1(r)} = \lim_{r\to+\infty}\frac{n(r)}{v(r)} = \delta_0, \qquad \lim_{r\to+\infty}\frac{v(r)}{v_1(r)} = 0.$$

Тому з огляду на нерівність трикутника для норм та останніх співвідношень

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{v_1(r)} - \delta_0\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \le$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right| - N(r)}{v_1(r)}\right|^p d\theta\right\}^{1/p} + \left|\frac{N(r)}{v_1(r)} - \delta_0\right| \to 0, \quad r\to+\infty,$$

що доводить теорему 1.

4. Доведення теорем 3 та 4. Позначимо через d_k коефіцієнти Фур'є функції $H(\theta)$. Тоді для всіх $|k|\in\mathbb{N}$ за умов теореми 4 маємо

$$\left|\frac{a_k(r)}{v(r)} - d_k\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)} - H(\theta)\right| d\theta \le$$

$$\le \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)} - H(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \to 0, \quad r\to+\infty.$$

Отже, для всіх $|k|\in\mathbb{N}$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{a_k(r)}{v(r)} = d_k.$$

Для функції $v\in L$ покладемо

$$v_2(r) = \int_0^r \frac{v_1(t)}{t}dt = \int_0^r\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{v(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Враховуючи, що $v(r) = o(v_1(r))$, $v_1(r) = o(v_2(r))$, $r\to+\infty$, з обернених формул [3] для коефіцієнтів Фур'є аргументу цілої функції

$$N_k^*(r) = \frac{i}{k}a_k(r) - ik\int_0^r\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{a_k(\tau)}{\tau}d\tau, \quad \text{де} \quad N_k^*(r) = \int_0^r\frac{N_k(t)}{t}dt,$$

отримуємо для кожного $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ існування границь

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_k^*(r)}{v_2(r)} = -ik\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{v_2(r)}\int_0^r\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{a_k(\tau)}{\tau}d\tau = -ik\,dk. \tag{9}$$

Із співвідношень

$$\left|\frac{c_0(r)}{v_1(r)} - b_0\right| = \left|\frac{N(r)}{v_1(r)} - b_0\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{v_1(r)} - b_0\right| d\theta \le$$

$$\le \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{v_1(r)} - b_0\right|^p d\theta\right\}^{1/p},$$

умов теореми 4 та правила Лопіталя одержуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_0^*(r)}{v_2(r)} = \lim_{r\to+\infty}\frac{N(r)}{v_1(r)} = b_0. \tag{10}$$

Покладемо

$$S(r,\varphi)-S(r,a) = \int_0^r \frac{s(t,\varphi)-s(t,a)}{t}\,dt,$$

$$S^*(r,\varphi)-S^*(r,a) = \int_0^r \frac{S(r,\varphi)-S(r,a)}{t}\,dt.$$

Тоді [2, с. 105]

$$N_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\,dS(r,\varphi), \qquad N_k^*(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\,dS^*(r,\varphi).$$

З огляду на (9), (10) та теорему Каратеодорі – Леві з останніх рівностей отримуємо, що послідовність мір $(S_n^*) = \left(S^*(r_n,\varphi)/v_2(r_n)\right)$, де (r_n) — довільна послідовність додатних чисел, $r_n \to +\infty$, $n \to +\infty$, є збіжною на одиничному колі, тобто існує границя

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{S^*(r,\varphi)-S^*(r,\eta)}{v_2(r)} = \mu(\varphi)-\mu(\eta)$$

в усіх точках неперервності φ і η деякої міри μ на одиничному колі.

За лемою 5 функція $\ln v_1(r)$ вгнута відносно логарифма, а тому $\frac{rv_1'(r)}{v_1(r)} = \frac{v(r)}{v_1(r)}$ є незростаючою на $[0,+\infty)$ функцією. Застосовуючи цю лему до функції $v_1(r)$, переконуємось, що $\ln v_2(r)$ є вгнутою відносно логарифма функцією. Застосовуючи двічі лему 6, одержуємо існування границь

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{S(r,\varphi)-S(r,\eta)}{v_1(r)} = \lim_{r\to+\infty}\frac{s(r,\varphi)-s(r,\eta)}{v(r)} = \mu(\varphi)-\mu(\eta),$$

що доводить існування кутової щільності послідовності нулів функції $f \in \mathcal{H}_0(L^*)$.

Знову застосувавши теорему Каратеодорі – Леві, отримаємо (див. (9), (10))

$$\delta_0 = \lim_{r\to+\infty}\frac{n_0(r)}{v(r)} = b_0, \qquad \delta_k = \lim_{r\to+\infty}\frac{n_k(r)}{v(r)} = -ik\,d_k, \quad k \neq 0.$$

Звідси і з означення функції $G_f(\theta)$ випливає, що $G_f(\theta) = H(\theta)$ для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$.

Теорему 4 доведено.

Нехай знову d_k — коефіцієнти Фур'є функції $H(\theta)$. Для $k \neq 0$ маємо $C_k(r, \ln f - N) = l_k(r)$, $C_0(r, \ln f - N) = 0$ і, як при доведенні теореми 4, одержуємо

$$\left|\frac{l_k(r)}{v(r)} - i\,d_k\right| \le \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} - i\,H(\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \to 0, \quad r\to\infty.$$

Звідси $d_0 = \int_0^{2\pi} H(\theta)\,d\theta = 0$,

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{l_k(r)}{v(r)} = i\,d_k, \quad k\ne 0. \tag{11}$$

З обернених формул [5, с. 981] для коефіцієнтів Фур'є l_k маємо

$$\frac{N_k(r)}{v_1(r)} = \frac{l_k(r)}{v_1(r)} - \frac{k}{v_1(r)}\int_0^r \frac{l_k(t)}{t}\,dt\,.$$

Завдяки (11), співвідношенню $v(r) = o(v_1(r))$ при $r\to+\infty$ та правилу Лопіталя з останньої рівності отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_k(r)}{v_1(r)} = -i\,k\,d_k, \quad k\ne 0,$$

що доводить теорему 3.

Зауважимо, що в [7] побудовано приклад цілої функції f з класу $\mathcal{H}_0(L)$, для якої виконується умова теореми 3 з $H(\theta)\equiv 0$, а границя $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{N_0(r)}{v_1(r)}$ не існує.

Автори вдячні професорові А. А. Кондратюку, бесіди з яким сприяли появі цієї роботи.

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
2. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища шк., 1988. – 196 с.
3. *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0,\,2\pi]$-метриці. 4.1 // Мат. студ. – 1999. – **12**, № 1. – С. 37 – 58.
4. *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0,\,2\pi]$-метриці. 4.2 // Там же. – № 2. – С. 135 – 144.
5. *Калинець Р. З., Кондратюк А. А.* Про регулярність зростання модуля і аргументу цілої функції в $L^p_{[0,\,2\pi]}$-метриці // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 889 – 896.
6. *Братищев А. В.* Об обращении правила Лопиталя // Мех. сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. гос. ун-та, 1985. – С. 28 – 42.
7. *Zabolotskii M. V.* An example of entire function of strongly regular growth // Mat. Stud. – 2000. – **13**, № 2. – P. 145 – 148.

Одержано 02.02.10