УДК 517.946

О. М. Болдовская (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

УСТРАНИМОСТЬ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ДВОЙНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ, С АБСОРБЦИЕЙ

We consider the initial boundary-value Neumann problem for the equation

$$u_t = \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p$$

in domains with noncompact boundary and with the initial Dirac delta function. In the case where diffusion is slow, $m+\lambda-2>0$, and the exponent of absorption is critical, $p = m+\lambda-1+\dfrac{\lambda+1}{N}$, we prove that the singularity at the point $(0,0)$ is removable.

Розглядається початково-крайова задача Неймана для рівняння

$$u_t = \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p$$

в областях з некомпактною межею та з початковою дельта-функцією Дірака. У випадку повільної дифузії, $m+\lambda-2>0$, і критичного показника абсорбції, $p = m+\lambda-1+\dfrac{\lambda+1}{N}$, доведено, що особливість у $(0,0)$ є усувною.

1. Введение. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N>1$, — неограниченная область с достаточно гладкой некомпактной границей $\partial\Omega$ и $|\Omega|_N = \operatorname{mes}_N \Omega = \infty$, $\overrightarrow{n}$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат принадлежит Ω. Мы рассматриваем следующую начально-краевую задачу Неймана в $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T>0$:

$$u_t = \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{1.1}$$

$$u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \delta(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где $\lambda > 0$, $m+\lambda-2>0$, начальная мера — $\delta(x)$-функция Дирака. Показатель абсорбирующего слагаемого является критическим, а именно, $p = m+\lambda-1+\dfrac{\lambda+1}{N}$.

Классический результат работы [1], в которой рассматривалась задача Коши

$$u_t = \triangle u - |u|^{p-1}u \quad \text{в} \quad Q = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \tag{1.4}$$

$$u(x,0) = \delta(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1.5}$$

$p>0$ — фиксированный параметр, заключался в установлении критического показателя $p_0 = 1 + \dfrac{2}{N}$ такого, что:

1) при $p < p_0$ существует единственное решение $u \in C^{2,1}(Q) \cap L^p(Q)$, удовлетворяющее уравнению (1.4) в смысле распределения, а начальному условию (1.5) так, что

$$\lim_{t\to 0} \int u(x,t)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi(x) \in C_0(\mathbb{R}^N); \tag{1.6}$$

2) для $p \geq p_0$ задача Коши не имеет решения $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q)$, удовлетворяющего (1.4), (1.6).

А именно, вместо (1.6)

$$\lim_{t \to 0} \int u(x,t)\, \varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi(x) \in C_0\big(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\big),$$

откуда следует, что $u(x,0) = 0$ и $u \equiv 0$, т. е. особенность в $(0,0)$ устранима. Другими словами, если функция удовлетворяет уравнению (1.4) и начальному условию $u(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, то задача, связанная с изолированной особенностью в начале координат, состоит в том, что нужно определить поведение $u(x,t)$ при $(x,t) \to (0,0)$. В данном случае, при $p \geq p_0$, в точке $(0,0)$ функцию $u(x,t)$ можно доопределить нулем, т. е. особенность в $(0,0)$ устранима.

Подобный результат об устранимой особенности для уравнения

$$u_t = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{\lambda-1} \nabla u\big) - |u|^{p-1} u,$$

где $\lambda > 1$, был получен в [2] при условии $p \geq \lambda + \dfrac{\lambda+1}{N}$. Вопросы устранимости особенностей для параболического уравнения с абсорбцией более общего вида (с измеримыми коэффициентами) изучались в работе [3] при тех же ограничениях на критический показатель. Этот результат удалось распространить и на уравнения высокого порядка [4].

Основная цель данной работы — показать несуществование слабого решения $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) в Q_T при дополнительных условиях на геометрию области, или, что эквивалентно, доказать, что решение $u(x,t)$ исходной задачи имеет устранимую особенность в точке (0,0). Данная работа является продолжением работы [5], где изучена задача (1.1)–(1.3) и получены результаты существования при $p < m + \lambda - 1 + \dfrac{\lambda+1}{N}$ и несуществования при $p > m + \lambda - 1 + \dfrac{\lambda+1}{N}$ слабого решения. Методы работы [5] оказались непригодными при $p = m + \lambda - 1 + \dfrac{\lambda+1}{N}$, поэтому в настоящей работе основным инструментом доказательства являются комбинации локальных подходов работы [3], связанной с устранимыми особенностями решений.

Касаясь исследования начально-краевых задач в областях с некомпактными границами, отметим работы [6] (случай задачи Неймана), [7] (случай третьей краевой задачи) и [8] (случай задачи Дирихле). В этих работах изучался вопрос о качественном поведении решений в зависимости от геометрии области.

В дальнейшем будем предполагать, что Ω удовлетворяет условиям изопериметрического типа, которые необходимы для теорем вложения [6]. Перейдем к точному описанию класса областей, удовлетворяющих условиям изопериметрического типа. Введем функцию

$$l(v) = \inf\big\{|\partial G \cap \Omega|_{N-1} \colon\ G \subset \Omega,\ \ |G| = v,\ \ \partial G \ \text{ липшицева}\big\}.$$

Пусть $g(v)$, $v \in (0,\infty)$, — положительная непрерывная функция, такая, что

$$\frac{v^{(N-1)/N}}{g(v)} \quad \text{не убывает при всех} \quad v > 0. \tag{1.7}$$

Определение 1.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, — *неограниченная область с непрерывной по Липшицу границей* $\partial\Omega$ *и* $|\Omega|_N = \infty$. *Будем говорить, что* Ω *принадлежит классу* $\mathcal{B}(g)$ $(\Omega \in \mathcal{B}(g))$, *если для всех* $v > 0$

$$l(v) \geq g(v),$$

где $g(v) > 0$ *удовлетворяет условию* (1.7).

Классы $\mathcal{B}(g)$ и близкие к ним были введены в работе [9], а также [6]. Геометрически области из класса $\mathcal{B}(g)$ характеризуются тем, что не сужаются на бесконечности. Типичным примером областей класса Ω является область типа бесконечного параболоида [6].

Пусть $0 \leq h \leq 1$ — фиксированное число. Определим

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x'| < x_N^h\right\}, \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}).$$

Из результатов [6] следует, что $\Omega \in \mathcal{B}(g)$ с

$$g(v) = \gamma \min(v^{(N-1)N}, v^{\eta}), \quad v > 0, \qquad \eta = \frac{h(N-1)}{1 + h(N-1)} \leq \frac{N-1}{N}.$$

При $N = 2$ различные примеры областей класса $\mathcal{B}(g)$ рассмотрены в [9].

Под пространством $C(0, T; V)$ понимаем пространство непрерывных отображений $f(t)$ из $[0, T]$ в банахово пространство V с нормой

$$\|f\|_{C(0,T;V)} = \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_V,$$

$V_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — пространство функций, принадлежащих пространству $V(\Omega')$ для произвольной ограниченной подобласти $\Omega'\colon \overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Определение 1.2. *Будем говорить, что* $u(x,t)$ — *слабое решение задачи* (1.1) – (1.3), *если* $u(x,t) \geq 0$ *и для любого* $\tau > 0$

$$u(x,t) \in C\big(0, T; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big) \cap L^{\infty}_{\mathrm{loc}}\big(\overline{\Omega} \times (\tau, T)\big),$$

$$|Du^{(m+\lambda-1)/\lambda}| \in L^{\lambda+1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times (\tau, T)),$$

$$\int_0^T \int_\Omega \left(-u\xi_t + u^{m-1}|Du|^{\lambda-1} Du D\xi + u^p \xi\right) dx\, dt = 0 \quad \forall \xi \in C_0^1\big(\mathbb{R}^N \times (\tau, T)\big),$$

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega u(x,t)\ X(x)\, dx = X(0) \quad \forall X(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N). \tag{1.8}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $\Omega \in \mathcal{B}(g)$. *При* $p = m + \lambda - 1 + \dfrac{\lambda+1}{N}$ *слабое решение задачи* (1.1) – (1.3) *не существует.*

Мы же в этой работе докажем эквивалентный результат в терминах устранимых особенностей решений, т. е. начальное условие перепишем в виде $u(x, 0) = 0$, $x \in \Omega \setminus \{0\}$, и если особенность в начале координат будет устранима, то непрерывное решение в $(0, 0)$ можно доопределить нулем, а в рассматриваемом случае устранимость особенности будем понимать в следующем смысле:

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega} u(x,t)\; X(x)\,dx = 0 \quad \forall X(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Таким образом, вместо (1.8) получим последнее равенство, что и будет означать несуществование слабого решения задачи (1.1) – (1.3).

Говорим, что неотрицательная функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{U}$, если выполняются два условия:

$\mathbf{u}_1)$ $u(x,t)\in C(0,T;L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega))\cap L^\infty_{\mathrm{loc}}\big(\overline{\Omega}\times(0,T)\big)$, $|Du^{(m+\lambda-1)/\lambda}|\in L^{\lambda+1}_{\mathrm{loc}}\big(\overline{\Omega}\times \times(0,T)\big)$;

$\mathbf{u}_2)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} u(x,T)\varphi(x,T)\,dx +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\big(-u\varphi_t + u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}DuD\varphi + u^p\varphi\big)\,dx\,dt = 0 \tag{1.9}$$

с $\varphi(x,t)=\psi(x,t)\zeta(x,t)$, где $\psi(x,t)\in C\big(0,T;L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^{\lambda+1}_{\mathrm{loc}}\big(0,T;W_0^{1,\lambda+1}(\Omega)\big)$, $\psi_t\in L^2_{\mathrm{loc}}\big(\overline{\Omega}\times(0,T)\big)$, а функция $\zeta(x,t)$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T])$ и исчезает в окрестности $(0,0)$.

Здесь под $C^\infty(\mathbb{R}^N\times[0,T])$ понимаем пространство бесконечно дифференцируемых по двум переменным ($x\in\mathbb{R}^N$ и $t\in[0,T]$) функций.

$L_p(0,T;V)$ — пространство отображений $f(t)$ из $(0,T)$ в банахово пространство V, суммируемых по Лебегу со степенью $p\geqslant 1$, с нормой

$$\|f\|_{L_p(0,T;V)} = \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|_V^p\,dt\right)^{1/p},$$

если $p=\infty$, то с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(0,T;V)} = \operatorname*{sup\,ess}_{0<t<T}\big\|f(t)\big\|_V.$$

Будем говорить, что точка (0,0) устранима для неотрицательных слабых решений задачи (1.1) – (1.3), если для любой неотрицательной функции $u(x,t)$, удовлетворяющей условию $\mathbf{U}$, следует выполнение тождества (1.9) для любой функции $\varphi(x,t)=\psi(x,t)$, где $\psi(x,t)\in C\big(0,T;L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^{\lambda+1}_{\mathrm{loc}}\big(0,T;W_0^{1,\lambda+1}(\Omega)\big)$, $\psi_t\in L^2_{\mathrm{loc}}\big(\overline{\Omega}\times(0,T)\big)$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\Omega\in\mathcal{B}(g)$, $p=m+\lambda-1+\dfrac{\lambda+1}{N}$. *Тогда точка* $(0,0)$ *устранима для неотрицательных слабых решений задачи* (1.1) – (1.3).

***Замечание* 1.1.** Для простоты считаем, что $u_t\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega\times(0,T))$, т. е. $u(x,t)$ — сильное решение уравнения (1.1) ($u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду). Тогда для получения различных интегральных оценок можно интегрировать по частям в уравнении (1.1), умноженном на различные тестирующие функции. В общем же случае оправдание получающихся при этом интегральных соотношений стандартно (см., например, [10]) и основывается на использовании сглаживания с помощью стекловских усреднений и выборе сглаженных функций в качестве тестирующих с последующим предельным переходом по параметру усреднения в окончательном интегральном соотношении.

Как отмечалось выше, мы докажем только теорему 1.2. Доказательство проведем в три шага. Сначала в п. 3 установим некоторую поточечную оценку, затем в п. 4 оценим градиент решения и, наконец, в п. 5 в окрестности $(0,0)$ получим оценку вида

$$u(x,t) \le C\left(|x| + t^{1/K}\right)^{\beta - N},$$

где C — положительная постоянная, $\beta > 0$,

$$K = \lambda + 1 + N(m + \lambda - 2). \tag{1.10}$$

Последняя оценка гарантирует выполнение равенства

$$\lim_{(x,t)\to(0,0)} u(x,t)\big(|x| + t^{1/K}\big)^N = 0. \tag{1.11}$$

Если выполняется (1.11), то из работы [3] следует, что в точке $(0,0)$ особенность устранима.

2. Вспомогательная лемма.

В процессе доказательства нам понадобится следующий результат о вложении.

Лемма 2.1 [6]. *Пусть* $\Omega \in \mathcal{B}(g)$, $v \in L^\infty(0,T; L^{\tilde r}(\Omega))$, $Dv \in (L^{\tilde p}(\Omega))^N$, *с* $\tilde p > 1$, $\tilde r \ge 1$ *и* $\sup\limits_{(0,T)} |\mathrm{supp}\ v(\cdot,t)| < \infty$. *Тогда*

$$\int_0^T \int_\Omega |v|^{\tilde p(1+\tilde r/N)}\, dx\, dt \le$$

$$\le \gamma \sup_{0<t<T}\left[\omega(|\mathrm{supp} v(\cdot,t)|)^{\tilde p}\left(\int_\Omega |v(x,t)|^{\tilde r}\, dx\right)^{\tilde p/N}\right] \int_0^T \int_\Omega |Dv|^{\tilde p}\, dx\, dt,$$

где $\gamma = \gamma(\tilde p, \tilde r, N)$, $\omega\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — *неубывающая функция*: $\omega(z) = z^{1-1/N}/g(z)$.

Всюду в дальнейшем через γ, γ_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи.

3. Поточечные оценки решений. Пусть $R_0 > 0$ — фиксированное число:

$$R_0 \le \frac{1}{2}\min\left\{1, \mathrm{dist}(0,\partial\Omega), T^{1/K}\right\},$$

где K представлена равенством (1.10). Для $0 < r \le R_0$ определим

$$D(r) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1_+\colon \ \left(\frac{|x|}{r}\right)^{\lambda+1} + \frac{t}{r^K} \le 1\right\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1_+,$$

$$M(r) = \sup\left\{u(x,t)\colon \ (x,t) \in D(R_0)\backslash D(r)\right\},$$

$$\mathbb{R}^1_+ = \left\{t \in \mathbb{R}^1 \colon t > 0\right\}.$$

Предполагаем, что $\lim\limits_{r\to 0} M(r) = \infty$, иначе устранимость особенности следует из [3].

Для $0 < \rho < 3^{-1/(\lambda+1)} R_0$, $\sigma \in (0, 1/2)$ рассмотрим функцию

$$\varphi_{\sigma\rho}(x,t) = \omega_\sigma \left(\left(\frac{|x|}{\rho} \right)^{\lambda+1} + \frac{t}{\rho^K} \right),$$

где $\omega_\sigma \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\omega_\sigma \in C^\infty$:

$$\omega_\sigma(s) = \begin{cases} 1, & 1 \le s \le 2, \\ 0 & \text{вне } \ (1-\sigma)^{\lambda+1} \le s \le 3 - (1-\sigma)^{\lambda+1}, \end{cases}$$

$$0 \le \omega_\sigma(s) \le 1, \qquad \left| \frac{d\omega_\sigma(s)}{ds} \right| \le \frac{\gamma}{\sigma}.$$

Заметим, что при $\varphi_{\sigma\rho}(x,t) \ne 0$ $u(x,t) \le M(\rho - \sigma\rho)$.

Для $0 < R < R_0$ определим $u_R(x,t) = (u(x,t) - M(R))_+$, где $(y)_+ = \max\{y, 0\}$; $y \in \mathbb{R}^1$.

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.2, *неотрицательная функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{U}$. *Тогда при* $0 < \rho < 3^{-1/(\lambda+1)} R_0$, $0 < R < R_0$, $\sigma \in (0, 1/2)$ *имеет место оценка*

$$\sup_{0<t<T} \int\limits_\Omega u_R^2 \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\, dx +$$

$$+ \iint\limits_{Q_T} u_R^{m-1} |Du_R|^{\lambda+1} \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\, dx\, dt + \iint\limits_{Q_T} u_R^{p+1} \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\, dx\, dt \le$$

$$\le \frac{\gamma}{\sigma^{\lambda+1}} \Big(M^2(\rho - \sigma\rho)\rho^N + M^{m+\lambda}(\rho - \sigma\rho)\rho^{N+K-(\lambda+1)} \Big). \tag{3.1}$$

Доказательство. Умножая уравнение (1.1) на функцию

$$\varphi(x,t) = \big(u(x,t) - M(R)\big)_+ \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}(x,t)$$

и интегрируя по Q_T с применением формулы интегрирования по частям, получаем

$$\sup_{0<t<T} \int\limits_\Omega u_R^2 \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\, dx +$$

$$+ \iint\limits_{Q_T} u_R^{m-1} |Du_R|^{\lambda+1} \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\, dx\, dt + \iint\limits_{Q_T} u_R^{p+1} \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\, dx\, dt \le$$

$$\le \gamma \left(\iint\limits_{Q_T} u_R^2 \varphi_{\sigma\rho}^{\lambda} (\varphi_{\sigma\rho})'_t\, dx\, dt + \iint\limits_{Q_T} u_R^m\, |Du_R|^\lambda \varphi_{\sigma\rho}^\lambda |D\varphi_{\sigma\rho}|\, dx\, dt \right).$$

Применяя неравенство Юнга с показателями $\lambda+1$, $\dfrac{\lambda+1}{\lambda}$ ко второму интегралу справа в последнем неравенстве, имеем

$$\sup_{0<t<T}\int\limits_{\Omega} u_R^2\varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\,dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_T} u_R^{m-1}|Du_R|^{\lambda+1}\varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\,dx\,dt+\iint\limits_{Q_T} u_R^{p+1}\varphi_{\sigma\rho}^{\lambda+1}\,dx\,dt\le$$

$$\le\gamma\left(\iint\limits_{Q_T} u_R^2\varphi_{\sigma\rho}^{\lambda}(\varphi_{\sigma\rho})'_t\,dx\,dt+\iint\limits_{Q_T} u_R^{m+\lambda}|D\varphi_{\sigma\rho}|^{\lambda+1}\,dx\,dt\right),$$

откуда, учитывая свойства функции $\varphi_{\sigma\rho}$, получаем утверждение леммы 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.2, *неотрицательная функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{U}$. *Тогда справедлива оценка*

$$M(\rho)\le\gamma\rho^{-N}\quad \text{\textit{при}}\quad 0<\rho<3^{-1/(\lambda+1)}R_0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию

$$\varphi(x,t)=\big(u(x,t)-M(R)\big)_+^{\nu}\varphi_{\sigma\rho}^{s}(x,t),\quad \nu\ge1,\quad s\ge\lambda+1.$$

Интегрируя по Q_T и выполняя стандартные вычисления, получаем

$$\sup_{0<t<T}\int\limits_{\Omega} u_R^{\nu+1}\varphi_{\sigma\rho}^{s}\,dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_T}\left|D\left({u_R}^{(m+\lambda-1+\nu)/(\lambda+1)}\varphi_{\sigma\rho}^{s/(\lambda+1)}\right)\right|^{\lambda+1}\,dx\,dt\;+\iint\limits_{Q_T}\;u_R^{p+\nu}\;\varphi_{\sigma\rho}^{s}\,dx\,dt\le$$

$$\le\gamma\left(\frac{\nu+s}{\sigma}\right)^{\lambda1}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{K-\mu}}+\frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}}\right)\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T}\;u_R^{(\nu-1)r_0'}\;\varphi_{\sigma\rho}^{(s-(\lambda+1))r_0'}\,dx\,dt\right)^{1/r_0'}, \tag{3.3}$$

где r_0 такое, что

$$\frac{N+K}{r_0}=(\lambda+1)(1-\delta),\quad \delta\in(0,1),$$

$$\mu=\frac{N+K}{r_0},\qquad r_0'=\frac{r_0}{r_0-1}.$$

Применяя теорему вложения и лемму 2.1, для $v={u_R}^{(m+\lambda-1+\nu)/(\lambda+1)}\varphi_{\sigma\rho}^{s/(\lambda+1)}$, $\tilde p=\lambda+1$, $\tilde r=\dfrac{(\lambda+1)(\nu+1)}{m+\lambda-1+\nu}$ имеем

$$\iint\limits_{Q_T} \left(u_R^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}} \right)^{(\lambda+1)(1+\frac{(\lambda+1)(\nu+1)}{(m+\lambda-1+\nu)N})} dx\, dt \le$$

$$\le \gamma \sup_{0<t<T} \left[\omega\Big(\Big| \operatorname{supp}\{u_R^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}}\}(\cdot,t)\Big| \Big)^{\lambda+1} \left(\int\limits_\Omega u_R^{\nu+1} \varphi_{\sigma\rho}^s\, dx \right)^{(\lambda+1)/N} \right] \times$$

$$\times \iint\limits_{Q_T} |D(u_R^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \varphi_{\sigma\rho}^{\frac{s}{\lambda+1}})|^{\lambda+1}\, dx\, dt. \tag{3.4}$$

Согласно свойствам функции $\varphi_{\sigma\rho}$ мера носителя функции $\{u_R^{(m+\lambda-1+\nu)/(\lambda+1)} \times \times \varphi_{\sigma\rho}^{s/(\lambda+1)}\}$ не превышает единицу, значит, в силу неубывания функции ω имеем

$$\omega \left(\left| \operatorname{supp} \left\{ u_R^{(m+\lambda-1+\nu)/(\lambda+1)} \varphi_{\sigma\rho}^{s/(\lambda+1)} \right\} (\cdot,t) \right| \right) \le \omega(1) = \mathrm{const}\,.$$

Пусть $\bar l, \bar l_1, \bar l_2, \bar k, \bar k_1, \bar k_2$ — произвольные положительные числа такие, что

$$\bar l = \bar l_1 + \bar l_2, \qquad \bar k = \bar k_1 + \bar k_2, \qquad \bar l_1 = \left(\bar l_2 + 2 - m - \lambda\right) \frac{\lambda+1}{N}, \qquad \bar k_1 = \bar k_2 \frac{\lambda+1}{N}.$$

Положим

$$\bar p_1 = \frac{N}{\lambda+1}, \qquad \bar\theta = \frac{N r_0'}{N+\lambda+1}, \qquad \overline{l'} = \frac{2(\lambda+1)+N(m+\lambda)}{N+\lambda+1} r_0',$$

$$\overline{k'} = (\lambda+1) r_0'.$$

Записывая (3.4) в новых обозначениях, а также применяя (3.3), получаем

$$\iint\limits_{Q_T} u_R^{\bar l}\, \varphi_{\sigma\rho}^{\bar k}\, dx\, dt \le$$

$$\le \gamma \left(\sup_{0<t<T} \int\limits_\Omega u_R^{\bar l_1 \bar p_1} \varphi_{\sigma\rho}^{\bar k_1 \bar p_1}\, dx \right)^{1/\bar p_1} \iint\limits_{Q_T} \left| D(u_R^{\bar l_2/(\lambda+1)} \varphi_{\sigma\rho}^{\bar k_2/(\lambda+1)}) \right|^{\lambda+1} dx\, dt \le$$

$$\le \gamma \left(\frac{\bar l + \bar k}{\sigma} \right)^{(\lambda+1)(1/\bar p_1+2)} \left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{K-\mu}} + \frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}} \right) \times$$

$$\times \left(\iint\limits_{Q_T} u_R^{\overline{l\theta}-\overline{l'}}\, \varphi_{\sigma\rho}^{\overline{k\theta}-\overline{k'}}\, dx\, dt \right)^{1/\bar\theta}. \tag{3.5}$$

$\Bigg($Мы воспользовались (3.4), выбрав $\bar l = \dfrac{(\lambda+1)(\nu+1)}{N} + m + \lambda - 1 + \nu$, $\bar l_2 = = m + \lambda - 1 + \nu$, $\bar k_2 = s$. Не составляет труда убедиться, что при этом выборе $\overline{l\theta} - \overline{l'} = (\nu-1) r_0'$, $\overline{k\theta} - \overline{k'} = (s-(\lambda+1)) r_0'$.$\Bigg)$

Пусть p_1 — произвольное число такое, что

$$p_1 > \frac{\lambda+1}{N+\lambda+1-Nr_0'}, \tag{3.6}$$

$$p_2 = \frac{p_1}{p_1-1}.$$

Определим l_1, l, l', k_1, k, k', θ следующим образом:

$$r_0'(l_1p_1-p-1) = \overline{l\theta} - \overline{l'}, \quad l = l_1 + \bar{l}\left(1-\frac{1}{p_1}\right), \quad l' = \frac{\overline{l'}p_1 + p_2\overline{\theta}(p+1)}{r_0'p_1+p_2\overline{\theta}}r_0',$$

$$r_0'(k_1p_1-\lambda-1) = \overline{k\theta} - \overline{k'}, \quad k = k_1 + \overline{k}\left(1-\frac{1}{p_1}\right), \quad k' = \frac{\overline{k'}p_1 + p_2\overline{\theta}(\lambda+1)}{r_0'p_1+p_2\overline{\theta}}r_0',$$

$$\theta = \frac{\overline{\theta}p_1p_2r_0'}{r_0'p_1+p_2\overline{\theta}}.$$

Применяя неравенство Гельдера, а также (3.3), (3.5), получаем

$$\iint\limits_{Q_T} u_R^l \varphi_{\sigma\rho}^k \, dx\, dt \le$$

$$\le \left(\iint\limits_{Q_T} u_R{}^{l_1p_1}\ \varphi_{\sigma\rho}^{k_1p_1}\, dx\, dt\right)^{1/p_1} \left(\iint\limits_{Q_T} u_R{}^{\bar{l}}\ \varphi_{\sigma\rho}^{\bar{k}}\, dx\, dt\right)^{1/p_2} \le$$

$$\le \gamma\left(\frac{l+k}{\sigma}\right)^{\frac{\lambda+1}{p_1}+\frac{\lambda+1}{p_2}\left(\frac{\lambda+1}{N}+2\right)}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{K-\mu}}+\frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}}\right)^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\left(\frac{\lambda+1}{N}+1\right)}\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T} u_R^{l\theta-l'}\varphi_{\sigma\rho}^{k\theta-k'}\, dx\, dt\right)^{1/\theta}. \tag{3.7}$$

(Мы воспользовались (3.3), выбрав $l_1p_1 = p+\nu$, $k_1p_1 = s$; можно проверить, что при этом $l\theta - l' = (\nu-1)r_0'$, $k\theta - k' = (s-(\lambda+1))r_0'$.)

Условие (3.6) гарантирует, что $\theta < 1$, поэтому неравенство (3.7) позволяет нам провести итерацию для оценки максимума $u_R(x,t)$ на множестве $\big\{(x,t)\colon \varphi_{\sigma\rho}(x,t) = 1\big\}$. Рассмотрим последовательности

$$l_j = \left(p+1+l'\frac{1}{1-\theta}\right)\theta^{-j} - \frac{l'}{1-\theta}, \qquad k_j = \left(\lambda+1+k'\frac{1}{1-\theta}\right)\theta^{-j} - \frac{k'}{1-\theta}$$

и положим

$$I(l_j,k_j) = \left(\iint\limits_{Q_T} u_R{}^{l_j}\ \varphi_{\sigma\rho}^{k_j}\, dx\, dt\right)^{\theta^j}.$$

Из неравенства (3.7) следует оценка

$$I(l_j,k_j)\le$$

$$\le\gamma\left\{(\sigma^{-1}\theta^{-j})^{\frac{\lambda+1}{p_1}+\frac{\lambda+1}{p_2}\left(\frac{\lambda+1}{N}+2\right)}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{K-\mu}}+\frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}}\right)^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\left(\frac{\lambda+1}{N}+1\right)}\right\}^{\theta^j}\times$$

$$\times I(l_{j-1},k_{j-1}),$$

откуда, итерируя, получаем

$$I(l_j,k_j)\le$$

$$\le\gamma\left\{\sigma^{-(\lambda+1)\left(\frac{N+\lambda+1}{Np_2}+1\right)}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{K-\mu}}+\frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}}\right)^{1+\frac{\lambda+1}{Np_2}}\right\}^{\frac{\theta}{1-\theta}(1-\theta^j)}\times$$

$$\times I(l_0,k_0).$$

Устремляя j к бесконечности и применяя оценку (3.1), имеем

$$M^{p+1+l'\frac{1}{1-\theta}}(\rho)\le\gamma\sigma^{-\gamma_1}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{K-\mu}}+\frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}}\right)^{\left(1+\frac{\lambda+1}{Np_2}\right)\frac{\theta}{1-\theta}}\times$$

$$\times(M^2(\rho-\sigma\rho)\rho^N+M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)\rho^{N+K-(\lambda+1)})$$

или

$$M^{p+1+l'\frac{1}{1-\theta}}(\rho)\le$$

$$\le\gamma\sigma^{-\gamma_1}\rho^{N-\mu+K}\left(\frac{M^2(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{K-\mu}}+\frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}}\right)^{\left(1+\frac{\theta(\lambda+1)}{Np_2}\right)\frac{1}{1-\theta}}. \tag{3.8}$$

Далее рассмотрим два случая:

а) для фиксированного ρ существует такое $\sigma\in(0,1/2)$, что

$$M^2(\rho-\sigma\rho)\ge\rho^{K-(\lambda+1)}M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho), \tag{3.9}$$

т. е. $M(\rho-\sigma\rho)\le\rho^{-N}$;

б) для фиксированного ρ неравенство (3.9) не выполняется для каждого $\sigma\in$ $\in(0,1/2)$.

В первом случае сразу получаем

$$M(\rho)\le M(\rho-\sigma'\rho)\le\rho^{-N}$$

для некоторого $\sigma'\in(0,1/2)$. Это и есть утверждение теоремы — оценка (3.2).

Во втором случае из (3.8) находим

$$M^{p+1+l'\frac{1}{1-\theta}}(\rho) \leq \gamma\sigma^{-\gamma_1}\rho^{N-\mu+K}\left(\frac{M^{m+\lambda}(\rho-\sigma\rho)}{\rho^{\lambda+1-\mu}}\right)^{\left(1+\frac{\theta(\lambda+1)}{Np_2}\right)\frac{1}{1-\theta}} \tag{3.10}$$

для каждого $\sigma \in (0, 1/2)$.

Обозначим

$$r_1 = p + 1 + l'\frac{1}{1-\theta} = p + 1 + \frac{\overline{l'}p_1 + p_2\overline{\theta}(p+1)}{(r_0'p_1 + p_2\overline{\theta})(1-\theta)}r_0',$$

$$r_2 = (m+\lambda)\left(1 + \frac{\theta(\lambda+1)}{Np_2}\right)\frac{1}{1-\theta},$$

$$r_3 = N - \mu + K - \frac{\lambda+1-\mu}{1-\theta}\left(1 + \frac{\theta(\lambda+1)}{Np_2}\right).$$

Подстановкой K, μ, проводя непосредственные вычисления, получаем равенство

$$(p - m - \lambda + 1)r_3 + (\lambda+1)(r_1 - r_2) = 0. \tag{3.11}$$

И это равенство справедливо для каждого p_1. Убедимся, что $r_1 > r_2$. Имеем

$$r_1 - r_2 = p + 1 + \frac{(m+\lambda)(\lambda+1)}{p_2N} + \frac{R(p_1,p_2)}{1-\theta},$$

где

$$R(p_1,p_2) = \frac{\overline{l'}p_1 + p_2\overline{\theta}(p+1)}{r_0'p_1 + p_2\overline{\theta}}r_0' - (m+\lambda) - \frac{(m+\lambda)(\lambda+1)}{p_2N}.$$

Т. е. нужно доказать положительность $R(p_1,p_2)$ для некоторого p_1, удовлетворяющего (3.6).

Возьмем $p_1 = p_1^* = \dfrac{\lambda+1}{N+\lambda+1-Nr_0'}$, $p_2 = p_2^* = \dfrac{\lambda+1}{Nr_0'-N}$. Учитывая условия на p и r_0, вычисляем $R(p_1^*,p_2^*)$:

$$R(p_1^*,p_2^*) = (m+\lambda-1)(1-r_0') + \frac{\lambda+1}{N} =$$

$$= \frac{(\lambda+1)\delta(N(m+\lambda-1)+\lambda+1)}{N(N(m+\lambda-1)+\delta(\lambda+1)} > 0.$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности p_1^* найдется p_1, зависящее только от известных параметров и удовлетворяющее (3.6), такое, что $r_1 - r_2 > 0$.

С учетом обозначений r_1, r_2, r_3 оценку (3.10) представим в виде

$$M^{r_1}(\rho) \leq \gamma\sigma^{-\gamma_1}\rho^{r_3}M^{r_2}(\rho-\sigma\rho). \tag{3.12}$$

Рассмотрим последовательность $\{\sigma_j = 2^{-(j-1)},\ j = 1,2,\ldots\}$. Пусть $M_j = M(\rho - (\sigma_1 + \ldots + \sigma_j)\rho$. Тогда из неравенства (3.12) следует оценка

$$M_j \leq \gamma(2^{j\gamma_1}\rho^{r_3}M_{j+1}^{r_2})^{1/r_1} \quad \text{для} \quad j = 1,2,\ldots. \tag{3.13}$$

Повторно применяя (3.13), учитывая (3.11), неравенство $r_1 > r_2 > 0$ и ограниченность последовательности M_j, приходим к оценке

$$M(\rho) \le \gamma \rho^{r_3/(r_1-r_2)} = \gamma \rho^{-N},$$

что и завершает доказательство теоремы 3.1.

4. Интегральные оценки решений. В силу теоремы 3.1 и очевидного неравенства

$$\left(\frac{2|x|}{|x| + t^{1/K}}\right)^{\lambda+1} + \frac{2^K t}{(|x| + t^{1/K})^K} \ge 1$$

для $0 < |x| + t^{1/K} < 3^{-1/(\lambda+1)} R_0$ получаем оценку

$$u(x,t) \le \gamma \Big(|x| + t^{1/K}\Big)^{-N}. \tag{4.1}$$

Положим

$$\widetilde{D}(r) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \colon |x|^K + t \le r^K\},$$

$$\widetilde{M}(r) = \sup\Big\{u(x,t) \colon (x,t) \in \widetilde{D}(\widetilde{R}_0) \backslash \widetilde{D}(r)\Big\} + r^{-1/2},$$

$$E(r) = \Big\{(x,t) \in Q_T \backslash (0,0) \colon u(x,t) > \widetilde{M}(r)\Big\},$$

$$\widetilde{u}_r(x,t) = \big(u(x,t) - \widetilde{M}(r)\big)_+, \quad (x,t) \in Q_T \backslash (0,0).$$

Здесь

$$0 < r < \widetilde{R}_0, \qquad \widetilde{R}_0 = \max\{r \colon \widetilde{D}(r) \subset D(R_0)\},$$

$u(x,t)$ — решение уравнения (1.1) с особенностью в $(0,0)$.

Для $r \in (0, \widetilde{R}_0)$ рассмотрим функцию

$$\psi_r(x,t) = \eta_r\big(|x|^K + t\big),$$

где $\eta_r \colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$:

$$\eta_r(s) = \begin{cases} 1, & s \ge R^K(r), \\ 0, & s \le r^K, \end{cases}$$

$$\eta_r(s) = -\left((1-\theta) \ln \ln \frac{1}{r^K}\right)^{-1} \int\limits_{r^K}^{s} \frac{1}{z \ln z}\, dz, \quad r^K \le s \le R^K(r).$$

Здесь $\theta \in (0,1)$, $R(r)$ определены равенством

$$\ln \frac{1}{R^K(r)} = \left(\ln \frac{1}{r^K}\right)^{\theta}.$$

Обозначим

$$\overline{p} = Np = N(m + \lambda - 1) + \lambda + 1.$$

Для $r \in (0, \widetilde{R}_0)$ положим

$$F_1(r) = \begin{cases} \left(\ln \dfrac{1}{r}\right)^{1-N(m+\lambda-1)/(\lambda+1)}, & \lambda + 1 > N(m+\lambda-1), \\ \ln\ln \dfrac{1}{r}, & \lambda + 1 = N(m+\lambda-1), \\ \left(\ln \dfrac{1}{R(r)}\right)^{1-N(m+\lambda-1)/(\lambda+1)}, & \lambda + 1 < N(m+\lambda-1), \end{cases}$$

$$F_2(r) = \begin{cases} \ln^{2-p'} \dfrac{1}{r}, & p' < 2, \quad p' = \dfrac{p}{p-1}, \\ \ln\ln \dfrac{1}{r}, & p' = 2, \\ \ln^{2-p'} \dfrac{1}{R(r)}, & p' > 2. \end{cases}$$

Лемма 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.2, *неотрицательная функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{U}$. *Тогда при* $0 < R(r) < \rho < \widetilde{R}_0$ *справедлива следующая оценка*:

$$\iint\limits_{E(\rho)} u^{m-2}\,|Du|^{\lambda+1}\psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt + \iint\limits_{E(\rho)} u^p \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma\left(\left[\ln\ln \frac{1}{r^K}\right]^{-\overline{p}} F_1(r) + \left[\ln\ln \frac{1}{r^K}\right]^{-p'} F_2(r)\right). \tag{4.2}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию $\varphi(x,t) = \left[\ln \dfrac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\right]_+ \psi_r^{\overline{p}}(x,t)$ и проинтегрируем по Q_T. Выполняя стандартные преобразования и применяя неравенство Юнга, получаем

$$\iint\limits_{E(\rho)} u^{m-2}|Du|^{\lambda+1}\psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt + \iint\limits_{E(\rho)} u^p \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \le \gamma(I_1 + I_2), \tag{4.3}$$

где

$$I_1 = \iint\limits_{E(\rho)} \int\limits_{\widetilde{M}(\rho)}^{u} \ln \frac{z}{\widetilde{M}(\rho)}\,dz\; \psi_r^{\overline{p}-1}(\psi_r)'_t\,dx\,dt,$$

$$I_2 = \iint\limits_{E(\rho)} u^{m+\lambda-1}\;\psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\ln^{\lambda+1}\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}|D\psi_r|^{\lambda+1}\,dx\,dt.$$

Применяя неравенство Юнга, определение функции ψ_r, а также (4.1), находим оценку интеграла I_1:

$$I_1 - \frac{1}{4}\iint\limits_{E(\rho)} u^p \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \le \gamma \iint\limits_{E(\rho)} \ln \frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\psi_r^{\overline{p}-p'}|(\psi_r)'_t|^{p'}\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma\left(\ln\ln \frac{1}{r^K}\right)^{1-p'} \iint\limits_{\widetilde{D}(R(r))\setminus\widetilde{D}(r)} \ln^{1-p'}\frac{1}{|x|^K + t}(|x|^K + t)^{-p'}\,dx\,dt \le$$

$$\leq \gamma\left(\ln\ln\frac{1}{r^K}\right)^{-p'} F_2(r). \tag{4.4}$$

Аналогично оценим I_2:

$$I_2 - \frac{1}{4}\iint\limits_{E(\rho)} u^p \ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \leq \gamma\iint\limits_{E(\rho)}\left(\ln\frac{u}{\widetilde{M}(\rho)}\right)^{1+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overline{p}} |D\psi_r|^{\overline{p}}\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \gamma\left(\ln\ln\frac{1}{r^K}\right)^{-\overline{p}} F_1(r). \tag{4.5}$$

Объединяя (4.3) – (4.5), получаем оценку (4.2).

Лемма 4.1 доказана.

Для $0 < r < \widetilde{R}_0$ положим

$$F_3(r) = \ln^{1-p'}\frac{1}{R(r)}, \qquad F_4(r) = \ln^{1-(\lambda+1)}\frac{1}{R(r)}.$$

Далее определим функцию $u^{(\rho)}(x,t)$ и множество $E(\rho,4\rho)$:

$$u^{(\rho)}(x,t) = \min\left\{\left[u(x,t) - \widetilde{M}(4\rho)\right]_+, \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(4\rho)\right\}, \quad (x,t)\in Q_T\backslash(0,0),$$

$$E(\rho,4\rho) = \left\{(x,t)\in Q_T\colon \widetilde{M}(4\rho) < u(x,t) < \widetilde{M}(\rho)\right\}.$$

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.2, *неотрицательная функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{U}$. *Тогда при* $0 < R(r) < \rho < \widetilde{R}_0$

$$\iint\limits_{E(\rho,4\rho)}\left|D\left(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}}\psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}}\right)\right|^{\lambda+1} dx\,dt \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на функцию $\varphi(x,t) = u^{(\rho)}(x,t)\times\psi_r^{\overline{p}}(x,t)$ и проинтегрируем по Q_T. Аналогично лемме 4.1 получим

$$\iint\limits_{E(\rho,4\rho)}\left|D\left(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}}\psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}}\right)\right|^{\lambda+1} dx\,dt + \iint\limits_{E(4\rho)} u^p u^{(\rho)}\psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \leq \gamma(I_3+I_4+I_5), \tag{4.7}$$

где

$$I_3 = \iint\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)} u \psi_r^{\overline{p}-1}\,(\psi_r)'_t\,dx\,dt,$$

$$I_4 = \iint\limits_{E(4\rho)} u^{m-1}\,|Du|^{\lambda}\,u^{(\rho)}\,\psi_r^{\overline{p}-1}\,|D\psi_r|\,dx\,dt,$$

$$I_5 = \iint\limits_{E(4\rho)} u^{m+\lambda}\,\psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\,|D\psi_r|^{\lambda+1}\,dx\,dt.$$

Оценим I_3, применив неравенство Юнга, а также определение функции ψ_r:

$$I_3 - \frac{1}{4}\iint\limits_{E(4\rho)} u^p\ u^{(\rho)}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt \le \gamma \iint\limits_{E(4\rho)} u^{(\rho)}\psi_r^{\overline{p}-p'}|(\psi_r)'_t|^{p'}\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma\widetilde{M}(\rho)\left(\ln\ln\frac{1}{r^K}\right)^{-p'} \iint\limits_{\widetilde{D}(R(r))\setminus\widetilde{D}(r)} \ln^{-p'}\frac{1}{|x|^K+t}(|x|^K+t)^{-p'}\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma\widetilde{M}(\rho)F_3(r).$$

Исходя из свойств функции ψ_r и применяя неравенство (4.1), оцениваем I_5:

$$I_5 \le \widetilde{M}(\rho)\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m+\lambda-1}\ \psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\ |D\psi_r|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le \gamma\widetilde{M}(\rho)F_4(r). \tag{4.8}$$

Наконец, применяя неравенство Гельдера, неравенства (4.2) и (4.8), оцениваем I_4:

$$I_4 \le \widetilde{M}(\rho)\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m-1}|Du|^{\lambda}\psi_r^{\overline{p}-1}|D\psi_r|\,dx\,dt \le$$

$$\le \widetilde{M}(\rho)\left(\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m-2}\ |Du|^{\lambda+1}\ \psi_r^{\overline{p}}\,dx\,dt\right)^{\lambda/(\lambda+1)} \times$$

$$\times\left(\iint\limits_{E(4\rho)} u^{m+\lambda-1}\ \psi_r^{\overline{p}-(\lambda+1)}\ |D\psi_r|^{\lambda+1}\,dx\,dt\right)^{1/(\lambda+1)} \le$$

$$\le \gamma\widetilde{M}(\rho)\left(\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-\overline{p}}F_1(r) + \left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-p'}F_2(r)\right)^{\lambda/(\lambda+1)}\Big(F_4(r)\Big)^{1/(\lambda+1)}.$$

Объединяя (4.7) и полученные оценки интегралов $I_3 - I_5$, получаем

$$\iint\limits_{E(\rho,4\rho)} \left|D(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}}\psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}})\right|^{\lambda+1}\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma\widetilde{M}(\rho)\Bigg\{F_3(r)+F_4(r)+$$

$$+\left(\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-\overline{p}}F_1(r) + \left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-p'}F_2(r)\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\Big(F_4(r)\Big)^{\frac{1}{\lambda+1}}\Bigg\}. \tag{4.9}$$

Перейдем в (4.9) к пределу при $r \to 0$. Из определения функций F_3, F_4 следует

$$\lim_{r\to 0}F_3(r) = \lim_{r\to 0}F_4(r) = 0.$$

Для функций F_1, F_2 рассмотрим 6 случаев:

1) при $\lambda+1 < N(m+\lambda-1)$ по определению $\lim\limits_{r\to 0} F_1(r) = 0$;

2) при $p' > 2$ по определению $\lim\limits_{r\to 0} F_2(r) = 0$;

3) при $\lambda+1 = N(m+\lambda-1)$ произведение $\lim\limits_{r\to 0}\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-\overline{p}} F_1(r) = 0$;

4) при $p' = 2$ произведение $\lim_{r\to 0}\left[\ln\ln\frac{1}{r^K}\right]^{-p'} F_2(r) = 0$;

5) при $\lambda+1 > N(m+\lambda-1)$ рассмотрим

$$F_1{}^{\lambda}(r)F_4(r) \le \gamma\left\{\ln\frac{1}{r}\right\}^{\lambda(1-\frac{N(m+\lambda-1)}{\lambda+1})-\theta\lambda};$$

6) при $p' < 2$ рассмотрим

$$F_2{}^{\lambda}(r)F_4(r) \le \gamma\left\{\ln\frac{1}{r}\right\}^{\lambda(2-p')-\theta\lambda}.$$

Правые части последних двух неравенств будут стремиться к нулю при $r \to 0$, если мы выберем

$$\theta > \max\left\{1 - \frac{N(m+\lambda-1)}{\lambda+1}, 2-p'\right\}.$$

Переходя в (4.9) к пределу при $r \to 0$, получаем утверждение леммы 4.2.

5. Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим C^∞-функцию $\xi_\rho\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$:

$$\xi_\rho(s) = \begin{cases} 1, & s \ge \rho^K, \\ 0, & s \le \left(\dfrac{\rho}{2}\right)^K, \end{cases}$$

$$0 \le \xi_\rho(s) \le 1, \qquad \left|\frac{d\xi_\rho(s)}{ds}\right| \le \left(\frac{4}{\rho}\right)^K.$$

Лемма 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.2, *неотрицательная функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{U}$. *Тогда для* $0 < \rho < \widetilde{R}_0$ *имеет место оценка*

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \le$$

$$\le \gamma\left(\widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{\mu-K} + \widetilde{M}^{m+\lambda}\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{\mu-(\lambda+1)}\right)^{\left(1+\frac{\lambda+1}{N}\right)\frac{\overline{\theta}}{1-\overline{\theta}}\frac{1}{\beta_1+l'/(1-\overline{\theta})}} \times$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T} \widetilde{u}_{2\rho}^{\beta_1}\,\xi_\rho^{\beta_2}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{\beta_1+l'/(1-\overline{\theta})}} + \rho^{-1/2}, \tag{5.1}$$

где

$$\overline{\theta} = \frac{Nr_0'}{N+\lambda+1}, \qquad l' = \frac{2(\lambda+1)+N(m+\lambda)}{N+\lambda+1}r_0',$$

r_0 *такое, что*

$$\frac{N+K}{r_0} = (\lambda+1)(1-\delta), \qquad \delta \in (0,1),$$

$$\mu = \frac{N+K}{r_0}, \qquad r_0' = \frac{r_0}{r_0-1},$$

$$\beta_1 = (m+\lambda)\left(1+\frac{\lambda+1}{N}\right), \qquad \beta_2 = (N(m+\lambda-1)+\lambda+1)\left(1+\frac{\lambda+1}{N}\right).$$

Доказательство. Умножая уравнение (1.1) на функцию

$$\varphi(x,t) = \Big(u(x,t) - \widetilde{M}(2\rho)\Big)_+^{\nu} \xi_\rho^s(|x|^K + t), \qquad \nu \geq 1, \quad s \geq \lambda+1,$$

интегрируя по Q_T и выполняя стандартные вычисления, получаем

$$\sup_{0<t<T} \int\limits_\Omega \widetilde{u}_{2\rho}^{\nu+1}\, \xi_\rho^s\, dx + \iint\limits_{Q_T} \left| D(\widetilde{u}_{2\rho}^{\frac{m+\lambda-1+\nu}{\lambda+1}} \xi_\rho^{\frac{s}{\lambda+1}}) \right|^{\lambda+1} dx\, dt \leq$$

$$\leq \gamma(\nu+s)^{\lambda+1}\left(\widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{\mu-K} + \widetilde{M}^{m+\lambda}\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{\mu-(\lambda+1)}\right)\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T} \widetilde{u}_{2\rho}^{(\nu-1)r_0'}\, \xi_\rho^{(s-(\lambda+1))r_0'}\, dx\, dt\right)^{1/r_0'}.$$

Аналогично доказательству неравенства (3.5) устанавливаем оценку

$$\iint\limits_{Q_T} \widetilde{u}_{2\rho}^{l}\, \xi_\rho^{k}\, dx\, dt \leq \gamma(\nu+s)^{(\lambda+1)((\lambda+1)/N+2)}\times$$

$$\times\left(\widetilde{M}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{\mu-K} + \widetilde{M}^{m+\lambda}\left(\frac{\rho}{2}\right)\rho^{\mu-(\lambda+1)}\right)^{1+(\lambda+1)/N}\times$$

$$\times\left(\iint\limits_{Q_T} \widetilde{u}_{2\rho}^{l\overline{\theta}-l'}\, \xi_\rho^{k\overline{\theta}-k'}\, dx\, dt\right)^{1/\overline{\theta}}, \tag{5.2}$$

где $k' = (\lambda+1)r_0'$, а l, k — произвольные положительные числа, такие, что

$$l\overline{\theta} - l' \geq \beta_1, \quad k\overline{\theta} - k' \geq \beta_2.$$

В силу неравенства (5.2) с помощью метода Мозера можно получить оценку максимума функции $\widetilde{u}_{2\rho}(x,t)$ на множестве $\{\xi_\rho(x,t) = 1\}$. Оценка (5.1) доказывается аналогично (3.8).

Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.2, *неотрицательная функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет условию* **U**. *Тогда при* $0 < \rho < \widetilde{R}_0$, $\beta > 0$ *имеет место оценка*

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \leq \gamma\rho^{\beta-N}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Оценим правую часть неравенства (5.1). По определению $\widetilde{M}(\rho)$

$$u(x,t) \le \widetilde{M}\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad \text{для} \quad \xi_\rho(x,t) \neq 0.$$

Применяя лемму 2.1 для $v = (u^{(\rho/2)})^{(m+\lambda)/(\lambda+1)}\psi_r^{\overline{p}/(\lambda+1)}$, $\tilde{p} = \tilde{r} = \lambda + 1$, а также лемму 4.2, получаем

$$\iint\limits_{Q_T} \widetilde{u}_{2\rho}^{\beta_1}\xi_\rho^{\beta_2}\,dx\,dt \le \iint\limits_{Q_T} (u^{(\rho/2)})^{\beta_1}\psi_r^{\beta_2}\,dx\,dt \le$$

$$\le \gamma \sup_{0<t<T}\left(\int\limits_{\Omega} (u^{(\rho/2)})^{m+\lambda}\,dx\right)^{(\lambda+1)/N} \times$$

$$\times \iint\limits_{E(\rho/2,2\rho)} \left|D(u^{\frac{m+\lambda}{\lambda+1}}\psi_r^{\frac{\overline{p}}{\lambda+1}})\right|^{\lambda+1} dx\,dt \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{5.4}$$

Из (5.1) и (5.4) имеем

$$\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \le \gamma\rho^{-1/2},$$

откуда и следует утверждение леммы 5.2.

***Доказательство теоремы* 1.2.** Рассмотрим последовательности $\{\rho_j\}$, $\{\widetilde{M}_j\}$:

$$\rho_j = \frac{\widetilde{R}_0}{2^j}, \qquad \widetilde{M}_j = \widetilde{M}(\rho_j), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Из оценки (5.3) получаем

$$\widetilde{M}_j - \widetilde{M}_{j-1} \le \gamma 2^{j(N-\beta)}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{5.5}$$

Суммируя (5.5) по j от 2 до J, находим

$$\widetilde{M}_J - \widetilde{M}_1 \le \gamma 2^{J(N-\beta)},$$

откуда следует неравенство

$$\widetilde{M}(\rho) \le \gamma\left(\rho^{\beta-N} + \widetilde{M}_1\right).$$

Последнее неравенство гарантирует выполнение поточечной оценки

$$u(x,t) \le \gamma\left[\left(|x| + t^{1/K}\right)^{\beta-N} + \widetilde{M}_1\right].$$

Далее выполнение неравенства (1.11) очевидно и из [3] следует, что в точке $(0,0)$ особенность устранима.

Теорема 1.2 доказана.

Автор выражает благодарность А. Ф. Тедееву и И. И. Скрыпнику за полезные замечания.

1. *Bresis H., Friedman A.* Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions // J. math. pures et appl. – 1983. – **62**. – P. 73 – 97.
2. *Gmira A.* On quasilinear parabolic equations involving measure data // Asymptotic Anal. – 1990. – **3**. – P. 43 – 56.
3. *Skrypnik I. I.* Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption // Sb. Math. – 2005. – **196**. – P. 1693 – 1713.
4. *Galaktionov V. A., Shishkov A. E.* Higher-order quasilinear parabolic equations with singular initial data // Commun. Cont. Math. – 2006. – **8(3)**. – P. 331 – 354.
5. *Болдовская О. М.* Существование и несуществование слабого решения задачи Неймана для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений в областях с некомпактной границей. Случай медленной диффузии // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2008. – **16**. – С. 33 – 54.
6. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543 – 567.
7. *Ушаков В. И.* Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Мат. сб. – 1980. – **111 (153)**. – С. 95 – 115.
8. *Мукминов Ф. Х.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Там же. – С. 503 – 521.
9. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1973. – **126**. – С. 5 – 45.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 16.09.08,
после доработки — 19.04.10