УДК 517.5

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко[*] (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ТА НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСІВ H_{ω_p} У МЕТРИКАХ ПРОСТОРІВ L_p

We obtain an estimate from above for least upper bounds of approximations in metric of the space L_p by some linear method U_n^* of classes of the Poisson integrals of functions from H_{ω_p} provided that $1 \leq p < \infty$. We prove that the obtained estimate is asymptotically exact for $p = 1$. In addition, we find asymptotic equalities for the best approximations in metric of the space L_1 of classes of the Poisson integrals of functions from H_{ω_1} and show that the method U_n^* for these classes is the best polynomial method of approximations in the sense of strong asymptotic behavior.

Получена оценка сверху для точных верхних граней приближений в метрике пространства L_p некоторым линейным методом U_n^* классов интегралов Пуассона функций из H_{ω_p} при $1 \leq p < \infty$. Доказано, что полученная оценка при $p = 1$ является асимптотически точной. Кроме того, найдены асимптотические равенства для наилучших приближений в метрике пространства L_1 классов интегралов Пуассона функций из H_{ω_1} и показано, что метод U_n^* для этих классов является наилучшим в смысле сильной асимптотики полиномиальным методом приближения.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ з нормою $\|\varphi\|_C = \max\limits_t |\varphi(t)|$; L_p, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних на $(-\pi, \pi)$ у p-му степені функцій із нормою $\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій φ з нормою $\|\varphi\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |\varphi(t)|$.

Розглянемо множини

$$U_p := \{\varphi \in L_p \colon \|\varphi\|_{L_p} \leq 1\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$H_\omega := \{\varphi \in C \colon \omega(\varphi; t) \leq \omega(t), \;\; t \geq 0\},$$

$$H_{\omega_p} := \{\varphi \in L_p \colon \omega_p(\varphi; t) \leq \omega(t), \;\; t \geq 0\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

де

$$\omega(\varphi; t) = \sup_{|h| \leq t} \big\|\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)\big\|_C, \quad \varphi \in C, \quad t \geq 0,$$

$$\omega_p(\varphi; t) = \sup_{|h| \leq t} \big\|\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)\big\|_{L_p}, \quad \varphi \in L_p, \quad t \geq 0,$$

а $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності, тобто неперервна неспадна напівадитивна при всіх $t \geq 0$ функція, що в нулі дорівнює нулю.

Нехай, далі, $C^q_{\beta,\infty}$ — множина неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, які задаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x - t) P^q_\beta(t) dt \tag{1}$$

[*]Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект GP/F27/0103).

з ядром Пуассона

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $\varphi \in U_\infty$, а $C_\beta^q H_\omega$ — множина неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$ вигляду (1), де $\varphi \in H_\omega$.

Через $L_{\beta,p}^q$ і $L_\beta^q H_{\omega_p}$, $1 \le p < \infty$, будемо позначати класи 2π-періодичних сумовних функцій, що еквівалентні відносно міри Лебега інтегралам Пуассона (1), в яких $\varphi \in U_p$ і, відповідно, $\varphi \in H_{\omega_p}$.

Розглянемо величину

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \big\| f(\cdot) - U_n(f;\cdot) \big\|_X, \tag{3}$$

де $\mathfrak{N}$ — деякий клас у просторі $X \subseteq L_1$ з нормою $\|\cdot\|_X$, U_n — лінійний метод наближення, який кожній функції f з $\mathfrak{N}$ ставить у відповідність тригонометричний поліном $U_n(f;x)$ порядку не більшого ніж n. Якщо для величини (3) в явному вигляді знайдено таку функцію $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{N}; U_n; X)$, що

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \varphi(n) + o(\varphi(n)), \quad n \to \infty,$$

то кажуть, що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ і методу U_n у просторі X. Ознайомитись з історією даного питання можна, наприклад, у монографіях [1 – 5].

У 1946 р. С. М. Нікольський [6] встановив асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n)_C$ і $\mathcal{E}(L_{\beta,1}^q; S_n)_{L_1}$, де S_n — частинні суми ряду Фур'є.

У 2001 р. О. І. Степанець [7] (див. також [4], § 5.18) розв'язав задачу Колмогорова – Нікольського для класу $C_\beta^q H_\omega$ і сум Фур'є у рівномірній метриці, а також отримав оцінки зверху для величин $\mathcal{E}(L_\beta^q H_{\omega_p}; S_n)_{L_p}$ при $1 \le p < \infty$.

У роботі [8] розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для деякого лінійного методу U_n^* і класу $C_\beta^q H_\omega$ у рівномірній метриці і показано, що точні верхні межі відхилень поліномів $U_{n-1}^*(f)$ від функцій f з класу $C_\beta^q H_\omega$, породженого опуклим модулем неперервності $\omega(t)$, асимптотично збігаються з величинами найкращих наближень цих класів.

У даній роботі отримано аналоги результатів роботи [8] у випадку наближення лінійним методом U_n^* класу $L_\beta^q H_{\omega_1}$ в інтегральній метриці і одержано оцінки зверху для величин $\mathcal{E}(L_\beta^q H_{\omega_p}; U_n^*)_{L_p}$, $1 < p < \infty$.

Перейдемо до точних формулювань. Кожній функції f із класу $L_\beta^q H_{\omega_p}$ поставимо у відповідність тригонометричний поліном $U_{n-1}^*(f;x) = U_{n-1}^*(q;\beta;f;x)$ вигляду

$$U_{n-1}^*(f;x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu_k^{(n)} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \right\}, \tag{4}$$

де $a_k = a_k(\varphi)$, $b_k = b_k(\varphi)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції φ, що пов'язана з f рівністю (1), а числа $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(q;\beta)$ і $\nu_k^{(n)} = \nu_k^{(n)}(q;\beta)$, $k = 1, \ldots, n-1$, означаються за допомогою рівностей

$$\lambda_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k}) \cos \frac{\beta\pi}{2}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$\nu_k^{(n)} = (q^k - q^{2n-k}) \sin \frac{\beta\pi}{2}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n \to \infty$ виконується нерівність*

$$\mathcal{E}(L_\beta^q H_{\omega_p}; U_{n-1}^*)_{L_p} \le \frac{2q^n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1) q^{n+1} \omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \tag{7}$$

і, крім того, при $p = 1$ справджується рівність

$$\mathcal{E}(L_\beta^q H_{\omega_1}; U_{n-1}^*)_{L_1} = \frac{2\theta_\omega q^n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1) q^{n+1} \omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \tag{8}$$

де $\frac{1}{2} \le \theta_\omega \le 1$, до того ж $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно параметрів n, q, β і p.

***Зауваження* 1.** Для схожого за побудовою до U_n^* лінійного методу наближення задачу Колмогорова – Нікольського в рівномірній метриці для класів $C_{\beta,p}^q$, $1 \le p \le \le \infty$, розв'язано в роботі [9]. Там же розв'язано аналогічну задачу для класів $L_{\beta,1}^q$ у метриках просторів L_s, $1 \le s \le \infty$.

***Зауваження* 2.** Як зазначалось вище, для величин $\mathcal{E}(C_\beta^q H_\omega; U_{n-1}^*)_C$ асимптотичні формули було отримано у [8]. З формули (8) даної роботи і теореми 1 роботи [8] випливає, що величини $\mathcal{E}(C_\beta^q H_\omega; U_{n-1}^*)_C$ і $\mathcal{E}(L_\beta^q H_{\omega_1}; U_{n-1}^*)_{L_1}$ асимптотично рівні у випадку, коли $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності.

Ефективність поліноміального методу U_n на класі $\mathfrak{N}$ оцінюється тим, наскільки близькі значення $\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_{n-1})_X$ до величин

$$E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_n(f)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_X, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad \alpha_k, \, \beta_k \in \mathbb{R},$$

які називають найкращими наближеннями класу $\mathfrak{N}$ у метриці простору X.

Точні значення величин $E_n(C_{\beta,\infty}^q)_C$ при цілих β обчислив М. Г. Крейн [10], а величин $E_n(L_{\beta,1}^q)_{L_1}$ — С. М. Нікольський [6]. При довільних β величини $E_n(C_{\beta,\infty}^q)_C$ і $E_n(L_{\beta,1}^q)_{L_1}$ знайдені А. В. Бушанським [11].

Для функціональних класів, які задаються за допомогою згорток з функціями з класів H_ω або H_{ω_1}, існує відносно невелика кількість робіт, в яких отримано точні значення найкращих наближень таких класів у рівномірній або інтегральній метриці. У зв'язку з цим відмітимо роботу М. П. Корнєйчука [12] (див. також [13]), у якій обчислено точні значення величин $E_n(W^r H_\omega)_C$ і $E_n(W^r H_\omega)_{L_1}$, $n \in \mathbb{N}$, для опуклих модулів неперервності $\omega(t)$. Згодом ці результати узагальнив В. Ф. Бабенко на класи згорток, які породжуються CVD-ядрами (див., наприклад, [14]).

Для класів $C^q_\beta H_\omega$ і $L^q_\beta H_{\omega_1}$ точні значення найкращих наближень у рівномірній та інтегральній метриках до цього часу невідомі. Тому, на нашу думку, актуальною є задача отримання сильної асимптотики для величин $E_n(L^q_\beta H_{\omega_1})_{L_1}$ при $n\to\infty$ і знаходження асимптотично найкращого лінійного методу наближення.

Теорема 2. *Нехай $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n\to\infty$*

$$E_n(L^q_\beta H_{\omega_1})_{L_1} = \frac{2\theta_\omega q^n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + \frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \tag{9}$$

де $\dfrac{1}{2}\le\theta\le 1$, до того ж $\theta_\omega=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів n, q і β.

***Зауваження* 3.** З рівностей (8) і (9) випливає, що розглянутий у роботі лінійний метод наближення U_n^* є асимптотично найкращим на класах $L^q_\beta H_{\omega_1}$ в L_1-метриці у випадку, коли $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності. Аналогічну властивість методу U_n^* на класах $C^q_\beta H_\omega$ в рівномірній метриці встановлено в роботі [8].

***Доведення теореми* 1.** Знайдемо інтегральне зображення відхилень $f(x)-U^*_{n-1}(f;x)$ для функцій $f\in L^q_\beta H_{\omega_p}$. Внаслідок (4) і теореми 2.1.5 з [15, с. 64 – 65] для довільної функції $f\in L^q_\beta H_{\omega_p}$ виконується рівність

$$U^*_{n-1}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)Q_{n-1}(t)dt, \tag{10}$$

де

$$Q_{n-1}(t) = Q_{n-1}(q;\beta;t) = \sum_{k=1}^{n-1}\big(\lambda_k^{(n)}\cos kt + \nu_k^{(n)}\sin kt\big), \tag{11}$$

а коефіцієнти $\lambda_k^{(n)}$ і $\nu_k^{(n)}$ визначено формулами (5) і (6).

З рівностей (1) і (10) отримуємо, що майже скрізь

$$f(x) - U^*_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)(P^q_\beta(t) - Q_{n-1}(t))dt.$$

Функція $P^q_\beta(t)-Q_{n-1}(t)$ ортогональна до будь-якої константи, тому

$$f(x) - U^*_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\varphi(x-t)-\varphi(x))(P^q_\beta(t) - Q_{n-1}(t))dt. \tag{12}$$

Запишемо різницю $P^q_\beta(t)-Q_{n-1}(t)$ у зручному для подальших досліджень вигляді. Згідно з (2), (5), (6) і (11) маємо

$$P^q_\beta(t) - Q_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\big(q^k - q^{2n-k}\big)\cos\frac{\beta\pi}{2}\cos kt - \sum_{k=1}^{n-1}\big(q^k - q^{2n-k}\big)\sin\frac{\beta\pi}{2}\sin kt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} q^{2n-k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} q^{2n-k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{13}$$

На основі очевидних рівностей

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) = q^n \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+q^{2n} \cos\left(2nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=2n+1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^{2n-k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n-1} q^k \cos\left((2n-k)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

формулу (13) можемо продовжити:

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} q^{2n-k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= q^n \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} q^k \left(\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \cos\left((2n-k)t - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right) +$$

$$+q^{2n}\left(\cos\left(2nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \cos\frac{\beta\pi}{2}\right) - q^{2n}\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= q^n \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + 2\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{k=n+1}^{2n-1} q^k \cos(k-n)t + q^{2n}\cos nt\right) +$$

$$+ \sum_{k=2n+1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) - q^{2n}\cos\frac{\beta\pi}{2} =$$

$$= 2\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\left(\frac{q^n}{2} + \sum_{k=n+1}^{2n} q^k \cos(k-n)t\right) +$$

$$+ \sum_{k=2n+1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) - q^{2n}\cos\frac{\beta\pi}{2} =$$

$$= 2\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\left(\frac{q^n}{2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k \cos(k-n)t\right) -$$

$$-2\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\sum_{k=2n+1}^{\infty}q^k\cos(k-n)t+$$

$$+\sum_{k=2n+1}^{\infty}q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)-q^{2n}\cos\frac{\beta\pi}{2}=$$

$$=2q^n\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos kt\right)-q^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (14)$$

Об'єднуючи рівності (13) і (14), отримуємо

$$P_\beta^q(t)-Q_{n-1}(t)=2q^n\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos kt\right)-$$

$$-q^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (15)$$

Згідно з (12) і (15), оскільки

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos kt=\frac{1-q^2}{2(1-2q\cos t+q^2)}, \qquad (16)$$

при $f\in L_\beta^q H_{\omega_p}$ майже в кожній точці x виконується рівність

$$f(x)-U_{n-1}^*(f;x)=\frac{q^n(1-q^2)}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big)\frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos t+q^2}dt-$$

$$-\frac{q^{2n}}{\pi}\int_0^{2\pi}\big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big)\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\,dt. \qquad (17)$$

Розглядаючи точну верхню межу по функціях $f\in L_\beta^q H_{\omega_p}$ у рівності (17), маємо

$$\mathcal{E}(L_\beta^q H_{\omega_p};U_{n-1}^*)_{L_p}=I_n(\omega,q,\beta)_{L_p}+O(1)a_n(\omega,q,\beta)_{L_p}, \qquad (18)$$

де

$$I_n(\omega,q,\beta)_{L_p}=\frac{q^n(1-q^2)}{\pi}\sup_{\varphi\in H_{\omega_p}}\left\|\int_0^{2\pi}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos t+q^2}dt\right\|_{L_p} \qquad (19)$$

і

$$a_n(\omega,q,\beta)_{L_p}=q^{2n}\sup_{\varphi\in H_{\omega_p}}\left\|\int_0^{2\pi}\big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big)\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos(kt+\beta\pi/2)\,dt\right\|_{L_p}. \qquad (20)$$

Застосовуючи до правої частини рівності (20) узагальнену нерівність Мінковського

$$\left(\int\limits_a^b \left|\int\limits_c^d f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{1/p} dy, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{21}$$

одержуємо

$$a_n(\omega,q,\beta)_{L_p} \leq 2\pi\omega(\pi)\, q^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{O(1)q^{2n}}{1-q}. \tag{22}$$

Отже, згідно з (18) і (22)

$$\mathcal{E}(L_\beta^q H_{\omega_p}; U_{n-1}^*)_{L_p} = I_n(\omega,q,\beta)_{L_p} + \frac{O(1)q^{2n}}{1-q}. \tag{23}$$

Знайдемо асимптотичну оцінку величини $I_n(\omega,q,\beta)_{L_p}$. Права частина у (19) є 4-періодичною функцією відносно параметра β. Тому далі достатньо вважати, що $\beta \in [0,4)$.

Подамо праву частину рівності (19) у зручному для подальших досліджень вигляді. Для цього використаємо прийом, запропонований О. І. Степанцем при доведенні теореми 1 з [7]. Покладемо

$$x_k = \frac{(1+\beta)\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{24}$$

$$t_k = x_k - \frac{\pi}{2n} = \frac{\beta\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{25}$$

і

$$l_n(t) = x_k \quad \text{при} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

У прийнятих позначеннях має місце така лема.

Лема 1. *Нехай $\varphi \in H_{\omega_p}$, тоді*

$$\int\limits_0^{2\pi} (\varphi(x-t)-\varphi(x)) \frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos t+q^2} dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\varphi(x-t)-\varphi(x)) \frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos l_n(t)+q^2} dt + \frac{O(1)q\omega(1/n)}{(1-q^2)(1-q)^2 n}, \tag{27}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по φ, n, q, β і p.

Доведення. Для доведення співвідношення (27) розглянемо різницю

$$R_n(\varphi) = \int\limits_0^{2\pi} \big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big) \frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos t+q^2} dt -$$

$$- \int\limits_0^{2\pi} \big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big) \frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos l_n(t)+q^2} dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big) r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \tag{28}$$

де

$$r_n(t) = \frac{1}{1 - 2q\cos t + q^2} - \frac{1}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2}. \tag{29}$$

Подамо інтеграл, що стоїть у правій частині (28), у вигляді

$$\int\limits_0^{2\pi} \big(\varphi(x-t) - \varphi(x)\big) r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \left(\int\limits_0^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\right) \big(\varphi(x-t) - \varphi(x)\big) r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt :=$$

$$:= I_n^{(1)}(\varphi; x) + I_n^{(2)}(\varphi; x) \tag{30}$$

і оцінимо величини $\left\|I_n^{(1)}(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p}$ та $\left\|I_n^{(2)}(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p}$. Для цього будемо користуватися наступними відомими твердженнями.

Лема А ([4], лема 5.18.2)**.** *Нехай на відрізку $[a, a+2h]$, $h > 0$, задано двічі неперервно диференційовну функцію $g(t)$ і*

$$F(t) = \big|g(t) - g(a + h/2)\big| - \big|g(t+h) - g(a + 3h/2)\big|, \quad t \in [a, a+h]. \tag{31}$$

Тоді якщо $g(t)$ не зростає на $[a, a+2h]$ і $g''(t) \ge 0$ при всіх $t \in [a, a+2h]$, то

$$F(t) \ge 0 \quad \forall t \in [a, a+h]. \tag{32}$$

Якщо ж при цьому $g''(t) \le 0$ при всіх $t \in [a, a+2h]$, то

$$F(t) \le 0 \quad \forall t \in [a, a+h]. \tag{33}$$

У випадку, коли $g(t)$ не спадає, з умови $g''(t) \ge 0$ випливає співвідношення (33), *а з умови $g''(t) \le 0$ — співвідношення* (32).

Лема Б ([4], лема 5.18.4)**.** *Нехай $y(t)$ — сумовна на $[a,b]$ функція і ξ_k, $k = \overline{1,n}$, $a \le \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n \le b$, — деякий набір точок такий, що на кожному проміжку $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ існує точка c_k така, що на проміжках $[\xi_k, c_k]$ і $[c_k, \xi_{k+1}]$ функція $y(t)$ майже скрізь зберігає протилежні знаки та*

$$\int\limits_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} y(t)dt = 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{34}$$

Тоді якщо $\varphi \in H_{\omega_p}$, $p \in [1, \infty)$, то

$$\left\| \int\limits_a^b (\varphi(x-t) - \varphi(x)) y(t) dt \right\|_{L_p} \le$$

$$\le \sup_{a \le t \le \xi_1} \big\|\varphi(\cdot - t) - \varphi(\cdot)\big\|_{L_p} \int\limits_a^{\xi_1} |y(t)| dt +$$

$$+\omega(\Delta)\int\limits_{\xi_1}^{\xi_n}|y(t)|dt+\sup_{\xi_n\le t\le b}\big\|\varphi(\cdot-t)-\varphi(\cdot)\big\|_{L_p}\int\limits_{\xi_n}^{b}|y(t)|dt, \qquad (35)$$

де $\Delta=\sup\limits_k(\xi_{k+1}-\xi_k)$.

Знайдемо спочатку потрібну оцінку величини $\big\|I_n^{(1)}(\varphi;\cdot)\big\|_{L_p}$. На проміжку $[0,\pi)$ функція $g(t)=(1-2q\cos t+q^2)^{-1}$ має єдину точку перегину, яку позначимо через τ^*, і на $(0,\tau^*)$ спадає і опукла догори, а на (τ^*,π) спадає і опукла донизу. Нехай, далі, числа k_1 і k_2 такі, що точка t_{k_1} є найближчою зліва до точки τ^* серед точок t_k, а точка t_{k_2} — найближчою справа. Покладемо

$$\alpha_k=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}r_n(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}-\frac{1}{1-2q\cos l_n(t)+q^2}\right)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt. \qquad (36)$$

При $k=0,1,\ldots,k_1-1$

$$\operatorname{sign}\alpha_k=(-1)^k. \qquad (37)$$

Покажемо, що числа $|\alpha_k|$ не спадають. Дійсно, згідно з (26) і (36)

$$|\alpha_k|-|\alpha_{k+1}|=$$

$$=\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}-\frac{1}{1-2q\cos l_n(t)+q^2}\right)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right|-$$

$$-\left|\int\limits_{t_{k+1}}^{t_{k+2}}\left(\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}-\frac{1}{1-2q\cos l_n(t)+q^2}\right)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\right|=$$

$$=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|g(t)-g(x_k)|\left|\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|dt-$$

$$-\int\limits_{t_{k+1}}^{t_{k+2}}|g(t)-g(x_{k+1})|\left|\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|dt=$$

$$=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(|g(t)-g(x_k)|-\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-g\left(x_k+\frac{\pi}{n}\right)\right|\right)\left|\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|dt. \qquad (38)$$

На інтервалі $[0,t_{k_1}]$ функція $g(t)$ спадає і $g''(t)\le 0$. Тому, застосовуючи лему A при $a=t_k$ і $h=\dfrac{\pi}{2n}$, переконуємося, що

$$|\alpha_k| \le |\alpha_{k+1}|, \quad k = 0, 1, \ldots, k_1 - 1. \tag{39}$$

Аналогічно встановлюємо, що при $k = k_2,\, k_2 + 1, \ldots, n - 2$

$$\operatorname{sign} \alpha_k = (-1)^k \tag{40}$$

і

$$|\alpha_k| \ge |\alpha_{k+1}|. \tag{41}$$

Покладемо

$$\Phi_1(x) = \int\limits_{t_0}^{x} r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \quad \text{і} \quad \Phi_2(x) = \int\limits_{x}^{t_{n-2}} r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt. \tag{42}$$

З твердження 5.1.1 монографії [4] та співвідношень (37) – (41) випливає, що функція $\Phi_1(x)$ на кожному проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ має єдиний простий нуль $\bar{x}_k$, $k = 0, 1, \ldots, k_1 - 1$, а функція $\Phi_2(x)$ такий же нуль $\bar{x}_k$ має на кожному проміжку $[t_k, t_{k+1}]$, $k = k_2, k_2 + 1, \ldots, n - 3$.

Враховуючи цю інформацію, зображуємо $I_n^{(1)}(\varphi; x)$ у вигляді

$$I_n^{(1)}(\varphi; x) =$$

$$= \left(\int\limits_{0}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{\bar{x}_{k_1-1}} + \int\limits_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} + \int\limits_{\bar{x}_{k_2}}^{t_{n-2}} + \int\limits_{t_{n-2}}^{\pi} \right) \big(\varphi(x - t) - \varphi(x)\big) r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt :=$$

$$:= \sum_{j=1}^{5} i_j(\varphi; x), \tag{43}$$

при цьому

$$0 \le t_0 < t_{k_1-1} < \bar{x}_{k_1-1} < t_{k_1} < \tau^* < t_{k_2} < \bar{x}_{k_2} < t_{n-2} < \pi. \tag{44}$$

Беручи до уваги (26), (29) і очевидні співвідношення

$$1 - 2q\cos t + q^2 \ge (1 - q)^2, \qquad \max_t \frac{2q|\sin t|}{1 - 2q\cos t + q^2} = \frac{2q}{1 - q^2},$$

маємо

$$|r_n(t)| = \left| \int\limits_{l_n(t)}^{t} \left(\frac{1}{1 - 2q\cos\tau + q^2} \right)' d\tau \right| \le$$

$$\le \big|t - l_n(t)\big| \max_t \frac{2q|\sin t|}{(1 - 2q\cos t + q^2)^2} \le$$

$$\le \frac{\pi}{2(1 - q)^2 n} \max_t \frac{2q|\sin t|}{1 - 2q\cos t + q^2} = \frac{\pi q}{(1 - q^2)(1 - q)^2 n}. \tag{45}$$

Використовуючи узагальнену нерівність Мінковського (21) і нерівність (45), для довільної функції $\varphi \in H_{\omega_p}$ отримуємо

$$\|i_1(\varphi;\cdot)\|_{L_p} = \left\| \int\limits_0^{t_0} (\varphi(x-t)-\varphi(x)) r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_{L_p} \le$$

$$\le \frac{\beta\pi^2 q\,\omega(\beta\pi/2n)}{2(1-q^2)(1-q)^2 n^2} = \frac{O(1) q\,\omega(1/n)}{(1-q^2)(1-q)^2 n}. \tag{46}$$

Застосовуючи лему Б до функції $y(t) = r_n(t)\cos\left(nt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$ спочатку при $[a,b] = [t_0, \bar{x}_{k_1-1}]$ та використовуючи в якості наборів ξ_k нулі $\bar{x}_k$, $k = 0,1,\ldots \ldots, k_1 - 1$, функції $\Phi_1(x)$, а потім при $[a,b] = \left[\bar{x}_{k_2}, t_{n-2}\right]$ і беручи нулі $\bar{x}_k$, $k = k_2,\ k_2+1,\ldots, n-3$, функції $\Phi_2(x)$, знаходимо

$$\left\|i_2(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p} + \left\|i_4(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p} \le$$

$$\le \omega\left(\frac{4\pi}{n}\right) \int\limits_{t_0}^{\bar{x}_{k_1-1}} \left|r_n(t)\right| dt + \omega\left(\frac{4\pi}{n}\right) \int\limits_{\bar{x}_{k_2}}^{t_{n-2}} \left|r_n(t)\right| dt \le$$

$$\le \omega\left(\frac{4\pi}{n}\right) \int\limits_{t_0}^{t_{n-2}} \left|r_n(t)\right| dt. \tag{47}$$

Із (45) випливає

$$\int\limits_{t_0}^{t_{n-2}} |r_n(t)| dt \le \int\limits_0^{\pi} |r_n(t)| dt \le \frac{\pi^2 q}{(1-q^2)(1-q)^2 n}. \tag{48}$$

Об'єднуючи співвідношення (47) і (48), одержуємо

$$\left\|i_2(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p} + \left\|i_4(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p} \le \frac{O(1) q\,\omega(1/n)}{(1-q^2)(1-q)^2 n}. \tag{49}$$

Внаслідок (45)

$$\left\|i_3(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p} = \left\| \int\limits_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} \big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big) r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_{L_p} \le$$

$$\le \frac{4\pi^2 q \omega(\bar{x}_{k_2})}{(1-q^2)(1-q)^2 n^2} = \frac{O(1) q}{(1-q^2)(1-q)^2 n^2} \tag{50}$$

і

$$\left\|i_5(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p} = \left\| \int\limits_{t_{n-2}}^{\pi} \big(\varphi(x-t)-\varphi(x)\big) r_n(t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_{L_p} \le$$

$$\le \frac{2\pi^2 q \omega(\pi)}{(1-q^2)(1-q)^2 n^2} = \frac{O(1) q}{(1-q^2)(1-q)^2 n^2}. \tag{51}$$

Таким чином, зі співвідношень (43), (46) і (49) – (51) отримуємо

$$\left\|I_n^{(1)}(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p} = \frac{O(1)q\,\omega(1/n)}{(1-q^2)(1-q)^2n} \quad \forall\varphi\in H_{\omega_p}. \tag{52}$$

Зрозуміло, що така сама оцінка буде виконуватись і для величини $\left\|I_n^{(2)}(\varphi;\cdot)\right\|_{L_p}$. Отже, згідно з (30) має місце співвідношення (27).

Лему 1 доведено.

Продовжимо доведення теореми 1. Враховуючи (19) і (27), записуємо

$$I_n(\omega,q,\beta)_{L_p} =$$

$$= \frac{q^n(1-q^2)}{\pi}\sup_{\varphi\in H_{\omega_p}}\left\|\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos l_n(t)+q^2}dt\right\|_{L_p} +$$

$$+\frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2n}, \tag{53}$$

де функція $l_n(t)$ визначається рівністю (26).

Для завершення доведення теореми 1 нам потрібна наступна лема, доведення якої наведемо пізніше.

Лема 2. *Нехай $q\in(0,1)$, $\beta\in[0,4)$, $1\le p<\infty$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді для величини*

$$J_n(\omega,q,\beta)_{L_p} := \sup_{\varphi\in H_{\omega_p}}\left\|\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos l_n(t)+q^2}dt\right\|_{L_p}$$

при $n\to\infty$ має місце нерівність

$$J_n(\omega,q,\beta)_{L_p} \le \frac{2}{1-q^2}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + \frac{O(1)q\,\omega(1/n)}{(1-q^2)(1-q)^2n}, \tag{54}$$

і, крім того, при $p=1$ справджується рівність

$$J_n(\omega,q,\beta)_{L_1} = \frac{2\theta_\omega}{1-q^2}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + \frac{O(1)q\,\omega(1/n)}{(1-q^2)(1-q)^2n}, \tag{55}$$

де $\dfrac{1}{2}\le\theta\le1$, до того ж $\theta_\omega=1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені по параметрах n, q, β і p.

Співставляючи рівності (23), (53) і лему 2, отримуємо співвідношення (7) і (9).

Теорему 1 доведено.

Доведення леми 2. Враховуючи (24) – (26), для довільної функції $\varphi\in H_{\omega_p}$ маємо

$$J_n(\varphi)_{L_p} := \left\|\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\cos(nt-\beta\pi/2)}{1-2q\cos l_n(t)+q^2}dt\right\|_{L_p} =$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(x-t) \frac{\cos(nt - \beta\pi/2)}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} dt \right\|_{L_p} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e_k(\varphi, n)}{1 - 2q\cos x_k + q^2}, \tag{56}$$

де

$$e_k(\varphi, n)_{L_p} = \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(x-t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_{L_p}. \tag{57}$$

Застосовуючи нерівність Мінковського (21), одержуємо

$$e_k(\varphi, n)_{L_p} = \left\| \int_{t_k}^{x_k} \big(\varphi(x-t) - \varphi(x - 2x_k + t)\big) \cos(nt - \beta\pi/2)\, dt \right\|_{L_p} \le$$

$$\le \int_{t_k}^{x_k} \omega(2(x_k - t)) \left| \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2n} \omega(2t) \sin nt dt = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt. \tag{58}$$

Об'єднуючи (56)–(58), при $1 \le p < \infty$ отримуємо

$$J_n(\omega, q, \beta)_{L_p} \le \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1 - 2q\cos x_k + q^2)}. \tag{59}$$

Покажемо, що у випадку, коли $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності і $p = 1$, у співвідношенні (59) можна поставити знак рівності. Для цього достатньо показати, що у класі H_{ω_1} знайдеться функція $\varphi^*(t) = \varphi^*_\omega(t)$ така, що

$$J_n(\varphi^*)_{L_1} = \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1 - 2q\cos x_k + q^2)}. \tag{60}$$

Покладемо

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\omega(2t), & t \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right), \\ -\frac{1}{4}\omega(-2t), & t \in \left(-\frac{\pi}{2n}, 0\right], \\ 0, & \frac{\pi}{2n} \le |t| \le \pi, \end{cases} \tag{61}$$

і через $\varphi_2(t)$ позначимо 2π-періодичне продовження функції $\varphi_1(t)$. Шукана функція $\varphi^*(t) = \varphi^*_\omega(t)$ зображується у вигляді рівності

$$\varphi^*(t) = \varphi_2'(t). \tag{62}$$

Функція $\varphi^*(t)$ належить до класу H_{ω_1} (див., наприклад, [4, с. 258], п. 5.8.5).

Величину $J_n(\varphi^*)_{L_1}$ знайдемо за допомогою стандартних у таких випадках міркувань. Згідно з (56)

$$J_n(\varphi^*)_{L_1} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t_{2n}} \varphi^*(x-t) \frac{\cos(nt - \beta\pi/2)}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} dt \right\|_{L_1}. \tag{63}$$

Функція

$$\Phi_n^*(x) = \int\limits_{t_0}^{t_{2n}} \varphi^*(x-t) \frac{\cos(nt - \beta\pi/2)}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} dt \tag{64}$$

в точках $x_i = \dfrac{(1+\beta)\pi}{2n} + \dfrac{i\pi}{n}$, $i \in \mathbb{Z}$, дорівнює нулю:

$$\Phi_n^*(x_i) = \int\limits_{t_0}^{t_{2n}} \varphi^*(x_i - t) \frac{\cos(nt - \beta\pi/2)}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} dt =$$

$$= \frac{1}{1 - 2q\cos x_i + q^2} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi^*(x_i - t) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{(-1)^i}{1 - 2q\cos x_i + q^2} \int\limits_{-\pi/2n}^{\pi/2n} \varphi^*(t) \sin nt dt = 0 \tag{65}$$

і інших нулів не має. При цьому

$$\operatorname{sign} \Phi_n^*(x) = (-1)^i, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{66}$$

Отже,

$$J_n(\varphi^*)_{L_1} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n^*(x)| dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{t_0}^{t_{2n}} \varphi^*(x-t) \frac{\cos(nt - \beta\pi/2)}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} dt dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \int\limits_{t_0}^{t_{2n}} \frac{\cos(nt - \beta\pi/2)}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi^*(x-t) dx dt. \tag{67}$$

Оскільки

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi^*(x-t) dx = \varphi_2(x_{i+1} - t) - \varphi_2(x_i - t),$$

то

$$J_n(\varphi^*)_{L_1} = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i \int_{t_0}^{t_{2n}} (\varphi_2(x_{i+1}-t) - \varphi_2(x_i - t)) \frac{\cos(nt - \beta\pi/2)}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{1-2q\cos x_k + q^2} \times$$

$$\times \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \big(\varphi_2(x_{i+1}-t) - \varphi_2(x_i-t)\big) \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt. \tag{68}$$

Враховуючи, що

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_2(x_i - t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = 0, \quad i \neq k, \tag{69}$$

маємо

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varphi_2(x_{i+1}-t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= (-1)^{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_2(x_k - t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \tag{70}$$

і

$$- \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varphi_2(x_i - t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= (-1)^{k-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_2(x_k - t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt. \tag{71}$$

Підставляючи ці вирази в (68), знаходимо

$$J_n(\varphi^*)_{L_1} = 2\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{1-2q\cos x_k + q^2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_2(x_k - t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt =$$

$$= 2\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} \varphi_2(t)\sin nt dt \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1-2q\cos x_k + q^2)} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1-2q\cos x_k + q^2)}. \tag{72}$$

Нехай $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Для побудови функції $\varphi^*(t)$ використаємо результат С. Б. Стєчкіна (див., наприклад, [4], лема 3.1.1), згідно з яким для довільного модуля неперервності $\omega(t)$ існує опуклий модуль неперервності $\omega^*(t)$ такий, що

$$\omega(t) \leq \omega^*(t) < 2\omega(t) \quad \forall t > 0.$$

Оскільки $\bar{\omega}(t) = \dfrac{1}{2}\omega^*(t)$ — опукла функція, то побудувавши за наведеною вище схемою функцію $\varphi^*(t) = \varphi^*_{\bar{\omega}}(t)$, отримаємо, що вона належить до H_{ω_1} і, крім того, внаслідок (72)

$$J_n(\varphi^*_{\bar{\omega}})_{L_1} = \int\limits_0^{\pi/2} \bar{\omega}\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1 - 2q\cos x_k + q^2)}. \tag{73}$$

Зі співвідношень (59), (72) і (73) одержуємо формулу

$$J_n(\omega, q, \beta)_{L_1} = \theta_\omega \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1 - 2q\cos x_k + q^2)}, \tag{74}$$

в якій $\dfrac{1}{2} \leq \theta_\omega \leq 1$, до того ж $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності.

Для завершення доведення леми 2 покажемо, що

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1 - 2q\cos x_k + q^2)} = \frac{2}{1 - q^2} + \frac{O(1)q}{(1 - q^2)(1 - q)^2 n}. \tag{75}$$

Дійсно, враховуючи (26), (29) і (45), маємо

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n(1 - 2q\cos x_k + q^2)} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{1 - 2q\cos t + q^2} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{1 - 2q\cos l_n(t) + q^2} - \frac{1}{1 - 2q\cos t + q^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2q\cos t + q^2} + O(1) \int\limits_0^{2\pi} \big|r_n(t)\big| dt =$$

$$= \frac{2}{1 - q^2} + \frac{O(1)q}{(1 - q^2)(1 - q)^2 n}.$$

Об'єднуючи співвідношення (59), (74) і (75), одержуємо формули (54) і (55).
Лему 2 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Оцінку зверху величини $E_n(L^q_\beta H_{\omega_1})_{L_1}$ отримуємо з теореми 1 і очевидної нерівності

$$E_n(L^q_\beta H_{\omega_1})_{L_1} \leq \mathcal{E}(L^q_\beta H_{\omega_1}; U^*_{n-1})_{L_1}. \tag{76}$$

Знайдемо необхідну оцінку знизу. Нехай спочатку $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності. Розглянемо функцію $f^* \in L^q_\beta H_{\omega_1}$, яка пов'язана рівністю (1) з функцією $\varphi^*(t)$, заданою формулою (62). Згідно з (17), (20), (22), (27) і (55) має місце

$$\big\|f^* - U^*_{n-1}(f^*)\big\|_{L_1} = \|\Phi^*_n\|_{L_1} + \frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n},$$

де функція $\Phi^*_n(x)$ означена рівністю (64).

Оскільки для функції $\Phi^*_n(x)$ виконується (66), то, як випливає з теореми 3.3.2 монографії [13], $E_n(\Phi^*_n)_{L_1} = \|\Phi^*_n\|_{L_1}$. На підставі (72) і (75)

$$\|\Phi^*_n\|_{L_1} = \frac{2q^n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + \frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \tag{77}$$

Отже,

$$E_n(L^q_\beta H_{\omega_1})_{L_1} \geq E_n(f^*)_{L_1} =$$

$$= E_n\big(f^* - U^*_{n-1}(f^*)\big)_{L_1} \geq E_n(\Phi^*_n)_{L_1} + \frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n} =$$

$$= \|\Phi^*_n\|_{L_1} + \frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n} =$$

$$= \frac{2q^n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + \frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \tag{78}$$

Якщо ж $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, то, розглядаючи функцію $f_*(x)$, яка пов'язана рівністю (1) з функцією $\varphi^*_{\tilde{\omega}}(t)$, побудованою в ході доведення леми 2, переконуємося, що $f_*(x)$ належить до класу $L^q_\beta H_{\omega_1}$ і з урахуванням (17), (20), (22), (27), (55), (73) і (77)

$$E_n(L^q_\beta H_{\omega_1})_{L_1} \geq E_n(f_*)_{L_1} = E_n(f_* - U^*_{n-1}(f_*))_{L_1} \geq$$

$$\geq \frac{q^n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + \frac{O(1)q^{n+1}\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \tag{79}$$

Об'єднуючи співвідношення (8) і (76)–(79), отримуємо рівність (9) у випадку довільного модуля неперервності $\omega(t)$.

Теорему 2 доведено.

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций. – М.: Наука, 1977. – 510 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
7. *Степанец А. И.* Решение задачи Колмогорова – Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 1. – С. 113 – 138.
8. *Сердюк А. С. Соколенко І. В.* Найкраще наближення інтегралів Пуассона функцій з класу H_ω // Доп. НАН України. – 2010. – № 2. – С. 33 – 37.
9. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона одним лінійним методом наближення в рівномірній та інтегральній метриках // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 976 – 982.
10. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 4 – 5. – С. 245 – 249.
11. *Бушанский А. В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1978. – С. 29 – 37.
12. *Корнейчук Н. П.* Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых функций в метриках C и L // Докл. АН СССР. – 1970. – **190**. – С. 269 – 271.
13. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
14. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие приближения классов функций, задаваемых с помощью модуля непрерывности // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 572 – 588.
15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Одержано 04.01.10