УДК 517.983.22

А. В. Анікушин, Д. А. Номіровський (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ З ПОСЛАБЛЕНИМИ АПРІОРНИМИ НЕРІВНОСТЯМИ*

An approach is suggested to the study of generalized solutions of linear operators satisfying weakened a priori inequalities. This approach generalizes some well-known definitions of generalized solutions of operator equations. Theorems on the existence and uniqueness of a generalized solution are proved.

Предлагается подход к изучению обобщенных решений линейных операторов, удовлетворяющих ослабленным априорным неравенствам. Этот подход обобщает ряд известных определений обобщенных решений операторных уравнений. Доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения.

1. Вступ. Нехай E, F — лінійні топологічні простори, $\mathcal{L}\colon E \to F$ — лінійний оператор, визначений на множині $D(\mathcal{L}) = E$. Припустимо, що оператор $\mathcal{L}\colon E \to F$ має обернений, отже, рівняння $\mathcal{L}u = f$ при довільному $f \in F$ має не більше одного розв'язку $u \in E$. Якщо область значень $R(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ не збігається з усім простором F, то розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ існує лише за умови $f \in R(\mathcal{L})$ (у такому випадку елемент $u \in E\colon \mathcal{L}u = f$ будемо називати класичним розв'язком); якщо ж $f \in F \setminus R(\mathcal{L})$, то виникає проблема побудови деякого узагальненого розв'язку рівняння $\mathcal{L}u = f$.

Один із відомих підходів до розв'язання цієї задачі полягає у використанні поняття псевдорозв'язку (квазірозв'язку), коли шукають точку мінімуму відхилу (метод найменших квадратів) або деякого іншого характеристичного функціонала.

Інший природний топологічний підхід до побудови узагальненого розв'язку операторного рівняння є таким: введемо у просторах E та F топології $\mathcal{T}_E$ та $\mathcal{T}_F$, які узгоджуються зі структурами лінійних просторів E та F, так, щоб у лінійних топологічних просторах $(E, \mathcal{T}_E)$ та $(F, \mathcal{T}_F)$ оператор $\mathcal{L}$ діяв неперервним чином і права частина $f \in F \setminus R(\mathcal{L})$ рівняння $\mathcal{L}u = f$ належала замиканню $\overline{R(\mathcal{L})}$ множини $R(\mathcal{L})$ у лінійному топологічному просторі $(F, \mathcal{T}_F)$ (ідеальна ситуація, коли $\overline{R(\mathcal{L})} = F$). Далі, розширимо оператор $\mathcal{L}$ неперервним чином на поповнення простору E за „топологією $\mathcal{T}_E$", де і будемо шукати узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ з правою частиною $f \in F \setminus R(\mathcal{L})$.

Такий підхід є типовим при побудові слабких розв'язків в теорії диференціальних рівнянь. О. О. Ладиженська в книгах [1, 2] дає ґрунтовний огляд еволюції ідеї узагальненого розв'язку для класичних задач математичної фізики. Питання існування узагальнених розв'язків граничних задач математичної фізики

* Частково підтримано грантом Державного фонду фундаментальних досліджень України № GP/F27/0022.

часто зводиться функціональними методами до проблеми можливості подання лінійних неперервних функціоналів за допомогою заданої білінійної форми. Для гільбертових просторів відомі класична теорема Лакса – Мільграма та проекційна теорема Ж.-Л. Ліонса, які дають достатні умови можливості такого зображення. Для доведення існування розв'язків лінійних граничних задач ефективними виявилися теорія оснащених просторів та метод апріорних оцінок. Оцінки в негативних нормах уперше було отримано при дослідженні еліптичних крайових задач [3].

У абстрактному варіанті відповідну конструкцію запропоновано в роботі [4] та більш детально досліджено в роботах [5 – 8]. Ці дослідження узагальнено у книзі [9], що містить огляд праць з цієї тематики. У наведених роботах, зокрема, зазначено, що у випадку, коли E та F — лінійні нормовані простори, ефективним інструментом для побудови узагальнених розв'язків операторних рівнянь можуть бути апріорні нерівності для оператора $\mathcal{L}$:

$$c^{-1}\|u\|_H \le \|\mathcal{L}u\|_F \le c\|u\|_E \qquad \forall u \in E,$$

де c — деяка додатна стала, H — поповнення лінійного простору E за нормою $\|u\|_H$, яка є більш слабкою, ніж норма простору E. Наприклад, у монографії [10] для багатьох операторів математичної фізики (диференціальних рівнянь з частинними похідними) доведено апріорні нерівності в негативних нормах скінченного порядку, введено означення узагальнених розв'язків, доведено їх існування та єдиність і використано отримані результати для розв'язання задач оптимального керування відповідними розподіленими системами із зовнішніми впливами зосередженого характеру.

З іншого боку, відомі випадки, коли оператор $\mathcal{L}$ задовольняє деякі послаблені апріорні нерівності

$$c^{-1}\|u\|_H \le \|\mathcal{L}u\|_{F_1} \qquad \forall u \in E : \mathcal{L}u \in F_1, \tag{1}$$

$$\|\mathcal{L}u\|_F \le c\|u\|_E \qquad \forall u \in E, \tag{2}$$

де лінійний нормований простір F_1 щільно та неперервно вкладено у простір F, тобто має місце нерівність $\|f\|_F \le c\|f\|_{F_1}$. Зокрема, якщо оператор $\mathcal{L}$ задовольняє апріорні нерівності

$$c^{-1}\|\mathcal{L}u\|_F \le \|u\|_E \le c\|\mathcal{L}u\|_{F_1} \qquad \forall u \in E : \mathcal{L}u \in F_1,$$

то $\mathcal{L}$ задовольняє і нерівності (1), (2). Наведемо приклад такого оператора $\mathcal{L}$. Розглянемо оператор диференціювання $\mathcal{L}u = u'$, що визначений на просторі E, де E — поповнення множини $\{u \in C^1([0,1]) \mid u(0) = 0\}$ за нормою

$$\|u\|_E = \left(\int_0^1 |u'(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad p \ge 1.$$

В якості просторів F, F_1 візьмемо відповідно L_{p_1}, L_{p_2}, де $1 \le p_1 \le p \le p_2$. Тоді, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\left(\int_0^1 |u'(x)|^{p_1} \, dx \right)^{1/p_1} \le \left(\int_0^1 |u'(x)|^{p} \, dx \right)^{1/p} \le \left(\int_0^1 |u'(x)|^{p_2} \, dx \right)^{1/p_2},$$

що рівносильно нерівностям

$$\|\mathcal{L}u\|_F \leq \|u\|_E \leq \|\mathcal{L}u\|_{F_1}.$$

Послаблені апріорні нерівності також виникають у реальних задачах. У роботі [11] для конкретного параболічного оператора, який діє у незв'язній області, містить серед своїх коефіцієнтів узагальнені функції скінченного порядку та може мати сингулярну праву частину, доведено апріорні нерівності вигляду (1), (2). У роботі [11] було введено означення узагальненого розв'язку і з використанням таких оцінок доведено теорему існування та єдиності такого розв'язку.

У зв'язку з цим виникають підстави для розгляду задачі про існування та єдиність узагальненого розв'язку оператора, який задовольняє послаблені апріорні нерівності (1), (2), у загальному випадку, що і вирішується у даній роботі.

2. Позначення та простори. Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ та $(F, \|\cdot\|_F)$ — лінійні нормовані простори, а $\mathcal{L}: E \to F$ — лінійний неперервний оператор, що визначений на всьому просторі E та має обернений. Нехай також $(F_1, \|\cdot\|_{F_1})$— лінійний нормований простір, до того ж F_1 щільно вкладається в F і для всіх $f \in F_1$ має місце нерівність $\|f\|_F \leq c_1 \|f\|_{F_1}$, де c_1 — деяка додатна стала. Позначимо через $R(\mathcal{L})$ область значень оператора $\mathcal{L}$ і будемо вважати, що множина $R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ є щільною у просторі $(F_1, \|\cdot\|_{F_1})$. Зауважимо, що у застосуваннях останнє обмеження часто не є суттєвим, наприклад у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними потрібна щільність традиційно випливає з класичних теорем існування гладких розв'язків.

Як відомо, кожний лінійний та неперервний на $(F_1, \|\cdot\|_F)$ функціонал можна розширити за неперервністю на простір $(F, \|\cdot\|_F)$ єдиним чином, тому спряжені простори $(F, \|\cdot\|_F)^*$ та $(F_1, \|\cdot\|_F)^*$ однакові, тобто $(F, \|\cdot\|_F)^* = (F_1, \|\cdot\|_F)^* = (F^*, \|\cdot\|_{F^*})$. Розглянемо тепер спряжені простори $(F_1, \|\cdot\|_F)^*$ і $(F_1, \|\cdot\|_{F_1})^*$. Оскільки простір $(F_1, \|\cdot\|_{F_1})$ щільно та неперервно вкладається у простір $(F_1, \|\cdot\|_F)$, то $(F_1, \|\cdot\|_F)^* = (F^*, \|\cdot\|_{F^*})$ буде неперервно вкладений у простір $(F_1, \|\cdot\|_{F_1})^* = (F_1^*, \|\cdot\|_{F_1^*})$. Тоді $\|f\|_{F_1^*} \leq c_2 \|f\|_{F^*}$ для всіх $f \in F^*$, де c_2 — деяка додатна стала. Зокрема, це означає, що коли для деякого $f \in F^*$ має місце нерівність $\|f\|_{F^*} \leq 1$, то $\|f\|_{F_1^*} \leq c_2$. Якщо позначити одиничні кулі просторів $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$ і $(F_1^*, \|\cdot\|_{F_1^*})$ через $B(F^*)$ і $B(F_1^*)$ відповідно, то одинична куля $B(F^*)$ буде підмножиною кулі радіуса c_2 у просторі $(F_1^*, \|\cdot\|_{F_1^*})$, тобто $B(F^*) \subset c_2 B(F_1^*)$.

Розглянемо $\mathcal{U} = \{\alpha\}$ — сукупність непорожніх центрально-симетричних підмножин α простору F^*, що задовольняють умови:

1) об'єднання довільних двох множин з $\mathcal{U}$ міститься у деякій множині з $\mathcal{U}$;

2) добуток довільної множини $\alpha \in \mathcal{U}$ на довільне дійсне $\lambda > 0$ є множиною з $\mathcal{U}$;

3) кожна з множин $\alpha \in \mathcal{U}$ обмежена у просторі F^* відносно топології, що породжується нормою

$$\|\varphi\|_{F_1^*} = \sup_{f \in F_1} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_{F_1}};$$

4) множина $\mathbf{N} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \alpha$ — тотальна підмножина F^* у двоїстості (F^*, F_1), тобто якщо для деякого $f \in F_1$ при всіх $\varphi \in \mathbf{N}$ виконується рівність $\varphi(f) = 0$, то $f = 0$.

Неважко переконатися, що існують сукупності $\mathcal{U}$, які задовольняють сформульовані умови. Нижче будуть наведені деякі приклади таких сукупностей.

Розглянемо на лінійній множині $\{u \in E \mid \mathcal{L}u \in F_1\}$ топологію $\mathcal{T}_E$ рівномірної збіжності, яка задається системою околів нуля

$$o_\alpha = \left\{ u \in E \,\middle|\, \left|(\mathcal{L}^*\varphi)(u)\right| \le 1,\ \varphi \in \alpha,\ \mathcal{L}u \in F_1 \right\}, \qquad \alpha \in \mathcal{U},$$

або, що те саме, системою напівнорм

$$p_\alpha(u) = \inf_{\lambda > 0,\ \frac{1}{\lambda} u \in o_\alpha} \lambda = \sup_{\varphi \in \alpha} \left|(\mathcal{L}^*\varphi)(u)\right|, \qquad u \in E, \quad \mathcal{L}u \in F_1, \quad \alpha \in \mathcal{U}.$$

Множину $\{u \in E \mid \mathcal{L}u \in F_1\}$ з цією топологією будемо позначати через $E_\mathcal{T}$, а поповнення $E_\mathcal{T}$ за топологією $\mathcal{T}_E$ — через $\bar{E}_\mathcal{T}$.

Аналогічно, на множині F_1 розглянемо топологію $\mathcal{T}_{F_1}$, яка задається системою околів нуля

$$O_\alpha = \{ f \in F_1 \mid |\varphi(f)| \le 1,\ \varphi \in \alpha \}, \qquad \alpha \in \mathcal{U},$$

або системою напівнорм

$$P_\alpha(f) = \inf_{\lambda > 0,\ \frac{1}{\lambda} f \in O_\alpha} \lambda = \sup_{\varphi \in \alpha} |\varphi(f)|, \qquad f \in F_1, \quad \alpha \in \mathcal{U}.$$

Через $\bar{R}_\mathcal{T}$ позначимо поповнення $R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ за топологією $\mathcal{T}_{F_1}$.

Нехай $\mathbf{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathcal{L}^*(\alpha)$. Тоді довільний функціонал $l \in \mathbf{M}$ допускає продовження за неперервністю на весь простір $\bar{E}_\mathcal{T}$. Дійсно, для кожного $l \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \mathcal{L}^*(\alpha)$ існують такі $\alpha_0 \in \mathcal{U}$ та $\varphi \in \alpha_0$, що $\mathcal{L}^*\varphi = l$, тому в околі

$$o_{\alpha_0} = \left\{ u \in E \,\middle|\, \left|(\mathcal{L}^*\varphi)(u)\right| < 1,\ \varphi \in \alpha_0,\ \mathcal{L}u \in F_1 \right\} \in \mathcal{T}_E$$

функціонал l є обмеженим. Неперервне розширення функціонала l на простір $\bar{E}_\mathcal{T}$ будемо позначати через $\tilde{l}$, а множину всіх розширених у такий спосіб функціоналів $\tilde{l} \in (\bar{E}_\mathcal{T})^*$, де $l \in \mathbf{M}$, — через $\tilde{\mathbf{M}}$.

Зрозуміло також, що множина $R(\mathcal{L}^*)$ є тотальною підмножиною E^* у двоїстості (E, E^*). Дійсно, якщо u — такий елемент простору E, що $l(u) = 0$ для всіх $l \in R(\mathcal{L}^*)$, то $\varphi(\mathcal{L}u) = 0$ для всіх $\varphi \in F^*$. Звідси випливає, що $\mathcal{L}u = 0$ у просторі F. Враховуючи ін'єктивність оператора $\mathcal{L}$, отримуємо, що $u = 0$ в E. Доведемо також, що множини $E_\mathcal{T} \subset E$ і $R(\mathcal{L}^*) \subset E^*$ знаходяться у двоїстості. Зважаючи на доведену тотальність множини $R(\mathcal{L}^*)$ у двоїстості

(E, E^*), достатньо показати, що з рівності $l(u) = 0$, яка виконується для всіх $u \in E_{\mathcal{T}}$ і деякого $l \in R(\mathcal{L}^*)$, випливає рівність $l = 0$. Дійсно, рівність $l(u) = 0$ можна записати у вигляді $\varphi(\mathcal{L}u) = 0$, де $\mathcal{L}^*\varphi = l$, $\varphi \in F^*$. Оскільки множина $R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ щільна у просторі F, то $\varphi = 0$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що множина $\mathbf{M} \subset R(\mathcal{L}^*)$ є тотальною у двоїстості $(E_{\mathcal{T}}, R(\mathcal{L}^*))$. Тому $\bar{E}_{\mathcal{T}}$ — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір.

3. Узагальнений розв'язок лінійного оператора. Оскільки множина $F_1 \setminus R(\mathcal{L})$ може виявитися непорожньою, то виникає задача визначення узагальненого розв'язку рівняння $\mathcal{L}u = f$ для правих частин f з простору F_1.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком операторного рівняння* $\mathcal{L}u = f$, *де* $f \in F_1$, *будемо називати такий елемент* $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$, *що для всіх* $l \in \mathbf{M}$ *виконується рівність*

$$\tilde{l}(u) = \varphi(f), \qquad \mathcal{L}^*\varphi = l. \tag{3}$$

Зрозуміло, що оскільки для кожного $u \in E_{\mathcal{T}} \subset E$ мають місце рівності

$$\tilde{l}(u) = l(u) = (\mathcal{L}^*\varphi)(u) = \varphi(\mathcal{L}u),$$

то наведене означення розв'язку операторного рівняння є, з одного боку, природним узагальненням класичного розв'язку, а з іншого — аналогом слабких розв'язків з теорії диференціальних рівнянь.

Справді, якщо в рівності $(u, \mathcal{L}^*\varphi)_1 = (f, \varphi)_2$ (φ — довільна функція відповідного класу, яку використовують в означенні слабкого розв'язку диференціального рівняння $\mathcal{L}u = f$) вважати, що вираз $(u, \mathcal{L}^*\varphi)_1$ задає лінійний функціонал $\tilde{l}(u)$, а вираз $(f, \varphi)_2$ — лінійний функціонал $\varphi(f)$, то отримуємо рівність (3).

Розглянемо теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку.

Теорема 1. *Для будь-якого* $f \in F_1$ *існує узагальнений розв'язок рівняння* $\mathcal{L}u = f$ *у сенсі означення* 1.

Доведення буде грунтуватися на теоремі 1 роботи [7]. Розглянемо звуження оператора $\mathcal{L}$ на простір

$$E_1 = \mathcal{L}^{-1}(F_1 \bigcap R(\mathcal{L})) = \left\{ u \in E \;\middle|\; \mathcal{L}u \in F_1 \right\}$$

з тією самою нормою $\|\cdot\|_{E_1} = \|\cdot\|_E$, яке будемо позначати $\mathcal{L}_1 : E_1 \to F_1$. Тоді область значень $R(\mathcal{L}_1) = R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ оператора $\mathcal{L}_1$ є щільною підмножиною простору F_1.

Оскільки кожна з множин $\alpha \in \mathcal{U}$ обмежена у просторі F^* за нормою $\|\cdot\|_{F_1^*}$, то кожна множина $\alpha \in \mathcal{U}$ обмежена відносно топології $\sigma(F^*, F_1)$. Крім цього, $R(\mathcal{L}_1) \subset F_1$, тому кожна з множин $\alpha \in \mathcal{U}$ також обмежена у просторі F^* відносно топології $\sigma(F^*, R(\mathcal{L}_1))$. Оскільки $\mathbf{N}$ — тотальна підмножина F^* у двоїстості (F^*, F_1) і $R(\mathcal{L}_1)$ є щільною підмножиною F_1, то множина $\mathbf{N}$ є тотальною у двоїстості $(F^*, R(\mathcal{L}_1))$.

Розглянемо будь-яку напівнорму P_α, $\alpha \in \mathcal{U}$. Оскільки кожна множина

$\alpha \subset F^*$ обмежена відносно норми $\|\cdot\|_{F_1^*}$, то $c \cdot \alpha \subset B(F_1^*) \cap F^*$, де $c > 0$. Тоді для будь-якого $f \in F_1$ виконуються співвідношення

$$c \cdot P_\alpha(f) = c \cdot \sup_{\varphi \in \alpha} |\varphi(f)| = \sup_{\varphi \in c\alpha} |\varphi(f)| \leq$$

$$\leq \sup_{\varphi \in B(F_1^*) \cap F^*} |\varphi(f)| \leq \sup_{\varphi \in B(F_1^*)} |\varphi(f)| = \|f\|_{F_1}. \tag{4}$$

Оскільки множина $R(\mathcal{L}_1)$ щільна у просторі $(F_1, \|\cdot\|_{F_1})$, то для будь-якого $f \in F_1$ знайдеться послідовність $f_n \in R(\mathcal{L}_1)$ така, що $\|f_n - f\|_{F_1} \to 0$ при $n \to \infty$. Із співвідношень (4) випливає, що і $P_\alpha(f_n - f) \to 0$ при $n \to \infty$ для будь-якого $\alpha \in \mathcal{U}$. Отже, $f_n \to f$ в топології $\mathcal{T}_{F_1}$. Таким чином, множина $R(\mathcal{L}_1)$ буде щільною у F_1 у топології $\mathcal{T}_{F_1}$. Це означає, що поповнення $\bar{R}_{\mathcal{T}}$ буде містити в собі весь простір F_1. Оскільки для оператора $\mathcal{L}_1 : E_1 \to F_1$ виконуються умови 1 – 5, описані в роботі [7], то, використовуючи теорему 1 з цієї роботи, стверджуємо, що операторне рівняння $\mathcal{L}_1 u = f$ (а отже, і рівняння $\mathcal{L}u = f$) має розв'язок у сенсі означення 1 для будь-якого $f \in F_1$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо множина функціоналів* $\tilde{\mathbf{M}} \subset (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$ *тотальна у двоїстості* $((\bar{E}_{\mathcal{T}})^*, \bar{E}_{\mathcal{T}})$, *або, що те саме, для норми* $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_E}$ *та топології* $\sigma(E_{\mathcal{T}}, \mathbf{M})$ *виконується умова*:

π) *якщо послідовність* $u_n \in E_{\mathcal{T}}$ *фундаментальна за нормою* $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_E}$ *і* $u_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *відносно топології* $\sigma(E_{\mathcal{T}}, \mathbf{M})$, *то* $\|u_n\|_{\mathcal{T}_E} \to 0$ *при* $n \to \infty$,

то узагальнений розв'язок у сенсі означення 1 *єдиний.*

Доведення. Розглянемо довільну послідовність $u_n \in E$, $\mathcal{L}u_n \in F_1$, яка збігається до u в просторі $\bar{E}_{\mathcal{T}}$ при $n \to \infty$ (тобто є фундаментальною за нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_E}$) і збігається до нуля у слабкій топології $\sigma(E_{\mathcal{T}}, \mathbf{M})$. Якщо $l \in (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$, то мають місце співвідношення $l(u) = \lim_{n \to \infty} l(u_n) = 0$. Якщо множина $\tilde{\mathbf{M}}$ тотальна у двоїстості $((\bar{E}_{\mathcal{T}})^*, \bar{E}_{\mathcal{T}})$, то з рівності $l(u) = 0$, де $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$, яка має місце для всіх $l \in \tilde{\mathbf{M}} \subset (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$, випливає, що $u = 0$. Отже, $\|u_n\|_{\mathcal{T}_E} \to \|u\|_{\mathcal{T}_E} = 0$ при $n \to \infty$ і умова π) виконується. Обернене твердження доводиться аналогічно.

Тепер якщо u та $\bar{u}$ — узагальнені розв'язки у сенсі означення 1, то легко отримуємо

$$\widetilde{\mathcal{L}^*\varphi}(u - \bar{u}) = 0$$

для всіх $\varphi \in F^*$, $\widetilde{\mathcal{L}^*\varphi} \in (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$. Оскільки множина $\tilde{\mathbf{M}}$ тотальна у двоїстості $((\bar{E}_{\mathcal{T}})^*, \bar{E}_{\mathcal{T}})$, то $u = \bar{u}$.

Теорему доведено.

Покажемо тепер, як у термінах сукупності $\mathcal{U}$ описувати узагальнені розв'язки операторних рівнянь у випадку наявності послаблених апріорних нерівностей (1), (2) для оператора задачі.

Виберемо у просторі F^* довільну опуклу врівноважену множину M, що задовольняє умову

$$M \subset F^* \bigcap B(F_1^*)$$

і є тотальною у двоїстості (F^*, F_1). Зазначимо, що такі множини M існують. Наприклад, множина $M = F^* \bigcap B_\lambda(F^*)$ при деякому достатньо малому $\lambda > 0$ міститься в $F^* \bigcap B(F_1^*)$ і є тотальною навіть у двоїстості (F^*, F). Дійсно, для будь-якого $f \in F$, $f \neq 0$, існує такий $\varphi \in F^*$, що $\varphi(f) = \|f\|_F$. Тоді $\varphi_1 = \dfrac{\lambda\varphi}{\|\varphi\|_{F^*}} \in M$ і $\varphi_1(f) \neq 0$.

Розглянемо систему множин

$$\mathcal{U} = \left\{ \lambda M \mid \lambda \in \mathbb{R}_+ \right\}. \tag{5}$$

Неважко перевірити, що для такої сукупності $\mathcal{U}$ умови 1 – 4, які описані вище, виконуються. При цьому топологія $\mathcal{T}_E$ задається нормою

$$\|u\|_{\mathcal{T}_E} = \sup_{l \in \mathcal{L}^*(M)} |l(u)|,$$

де $u \in E$ і $\mathcal{L}u \in F_1$, для якої має місце оцінка

$$\|u\|_{\mathcal{T}_E} = \sup_{l \in \mathcal{L}^*(M)} |l(u)| = \sup_{\varphi \in M} \left|(\mathcal{L}^*\varphi)(u)\right| =$$

$$= \sup_{\varphi \in M} |\varphi(\mathcal{L}u)| \leq \sup_{\varphi \in B(F_1^*)} |\varphi(\mathcal{L}u)| = \|\mathcal{L}u\|_{F_1}.$$

Топологія $\mathcal{T}_{F_1}$ також задається нормою

$$\|f\|_{\mathcal{T}_{F_1}} = \sup_{\varphi \in M} |\varphi(f)|,$$

де $f \in F_1$, для якої має місце аналогічна оцінка

$$\|f\|_{\mathcal{T}_{F_1}} = \sup_{\varphi \in M} |\varphi(f)| \leq \sup_{\varphi \in B(F_1^*)} |\varphi(f)| = \|f\|_{F_1}.$$

Крім цього, зазначимо, що оскільки оператор $\mathcal{L}$ є неперервним, то $\|\mathcal{L}u\|_F \leq c\|u\|_E$, тобто виконуються послаблені апріорні нерівності

$$\|u\|_{\mathcal{T}_E} \leq c\|\mathcal{L}u\|_{F_1} \qquad \forall u \in E, \quad \mathcal{L}u \in F_1, \tag{6}$$

$$\|\mathcal{L}u\|_F \leq c\|u\|_E \qquad \forall u \in E. \tag{7}$$

З'ясуємо, який зміст має означення 1 у випадку, коли сукупність множин $\mathcal{U}$ задано у вигляді (5).

Означення 2. *Узагальненим розв'язком операторного рівняння* $\mathcal{L}u = f$, *де* $f \in F_1$, *називають такий елемент* $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$, *що для всіх функціоналів* $\varphi \in M$ *виконується рівність*

$$\widetilde{\mathcal{L}^*\varphi}(u) = \varphi(f),$$

де через $\widetilde{\mathcal{L}^*\varphi}$ *позначено розширення за неперервністю функціонала* $\mathcal{L}^*\varphi \in E_{\mathcal{T}}^*$ *з множини* $E_{\mathcal{T}} = \left\{ u \in E \,\middle|\, \mathcal{L}u \in F_1 \right\}$ *на множину* $\overline{E}_{\mathcal{T}}$.

Отже, з теореми 1 випливає, що коли оператор $\mathcal{L}$ задовольняє послаблені апріорні нерівності (6), (7), то узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$, де $f \in F_1$, у сенсі означення 2 існує.

Теорема 3. *Якщо сукупність* $\mathcal{U}$ *задано рівністю* (5), *то узагальнений розв'язок рівняння* $\mathcal{L}u = f$, *де* $f \in F_1$, *у сенсі означення* 2 *єдиний.*

Доведення. Перевіримо умови загальної теореми 2, тобто доведемо, що виконується умова π). Припустимо супротивне, тобто нехай існує послідовність $u_n \in E_{\mathcal{T}}$, що фундаментальна за нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_E}$ і збігається до нуля в $\sigma(E_{\mathcal{T}}, \mathbf{M})$, але $\|u_n\|_{\mathcal{T}_E}$ не прямує до нуля при $n \to \infty$. Тоді існують $\varepsilon > 0$ і така підпослідовність, яку позначимо так само u_n, що $\|u_n\|_{\mathcal{T}_E} > \varepsilon$, тобто для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{l \in \mathcal{L}^*(M)} \left| l(u_n) \right| > \varepsilon.$$

Це означає, що можна вибрати послідовність функціоналів $l_n \in \mathcal{L}^*(M)$ таку, що $\left| l_n(u_n) \right| > \varepsilon$. Тепер оскільки u_n — фундаментальна в $E_{\mathcal{T}}$ послідовність, то

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left\| u_N - u_{N+p} \right\|_{\mathcal{T}_E} = \sup_{l \in \mathcal{L}^*(M)} \left| l(u_N - u_{N+p}) \right| < \varepsilon,$$

тобто

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall l \in \mathcal{L}^*(M) : \left| l(u_N - u_{N+p}) \right| < \varepsilon.$$

Зокрема, при $l = l_n$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad \left| l_N(u_N - u_{N+p}) \right| < \varepsilon.$$

Але оскільки $u_n \to 0$ в $\sigma(E_{\mathcal{T}}, \mathcal{L}^*(M))$, то $l(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $l \in \mathcal{L}^*(M)$, зокрема і $l_N(u_{N+p}) \to 0$ при $p \to \infty$. Звідси при $p \to \infty$ випливає, що $\left| l_N(u_N) \right| \le \varepsilon$, а це суперечить вибору послідовності l_n.

Теорему доведено.

Введемо ще одно поняття узагальненого розв'язку, в якому узагальнений розв'язок визначається через секвенціальне замикання графіка оператора $\mathcal{L}$ у відповідній топології.

Означення 3. *Узагальненим розв'язком операторного рівняння* $\mathcal{L}u = f$, *де* $f \in F_1$, *будемо називати такий елемент* $u \in \overline{E}_{\mathcal{T}}$, *для якого існує послідовність таких елементів* $u_n \in E$, *що* $\mathcal{L}u_n \in F_1$ *і виконуються співвідношення*

$$\left\| u_n - u \right\|_{\mathcal{T}_E} \to 0, \qquad \left\| \mathcal{L}u_n - f \right\|_{F_1} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Зазначимо, що означення 3 задає природний аналог поняття майже розв'язку з роботи [5].

Теорема 4. *Якщо множина функціоналів*

$$\tilde{\mathbf{M}} = \left\{ l \in (\bar{E}_{\mathcal{T}})^* \;\middle|\; l = \widetilde{\mathcal{L}^*\varphi},\ \varphi \in \lambda M,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

тотальна у двоїстості $((\bar{E}_{\mathcal{T}})^*, \bar{E}_{\mathcal{T}})$, *то елемент* $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$ — *узагальнений розв'язок у сенсі означення* 2 *тоді і тільки тоді, коли* u — *узагальнений розв'язок у сенсі означення* 3.

Доведення. *Достатність.* Нехай $u_n \in E_1$ — послідовність, що визначає узагальнений розв'язок $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$ у сенсі означення 3. Тоді для довільного $\varphi \in M \subset F^*$ має місце рівність

$$\widetilde{\mathcal{L}^*\varphi}(u_n) = (\mathcal{L}^*\varphi)(u_n) = \varphi(\mathcal{L}u_n). \tag{8}$$

Оскільки $u_n \to u$ при $n \to \infty$ за нормою простору $\bar{E}_{\mathcal{T}}$, то $u_n \to u$ при $n \to \infty$ і в слабкій топології $\sigma(\bar{E}_{\mathcal{T}}, (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*)$. З аналогічних причин послідовність $\mathcal{L}u_n$ буде збігатися до f при $n \to \infty$ в топології $\sigma(F_1, F_1^*)$. Отже, переходячи в рівності (8) до границі при $n \to \infty$, одержуємо

$$\widetilde{\mathcal{L}^*\varphi}(u) = \varphi(f).$$

Необхідність. Нехай u — узагальнений розв'язок у сенсі означення 2. Доведемо, що розв'язок у сенсі означення 3 існує.

Множина $R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ щільна у просторі F_1. Тому існує послідовність $f_n \in R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ така, що $f_n \to f$ в F_1 при $n \to \infty$. Тоді знайдуться такі $v_n \in E_1$, що $\mathcal{L}v_n = f_n \in R(\mathcal{L}) \bigcap F_1 \subset F_1$. Оскільки мають місце послаблені апріорні нерівності (6), (7), то з фундаментальності послідовності f_n у просторі F_1 випливає фундаментальність послідовності v_n у просторі $\bar{E}_{\mathcal{T}}$. Тому існує такий елемент $v \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$, що

$$\| v_n - v \|_{\mathcal{T}_E} \to 0, \qquad \| \mathcal{L}v_n - f \|_{F_1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отже, $v \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$ — узагальнений розв'язок операторного рівняння $\mathcal{L}u = f$ у сенсі означення 3. З доведення достатності випливає, що v — розв'язок і у сенсі означення 2. Тоді з теореми 2 маємо $u = v$. Отже, u — узагальнений розв'язок у сенсі означення 2.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Як випливає з доведення необхідності, розв'язок у сенсі означення 3 існує незалежно від розв'язку у сенсі означення 2.

***Зауваження* 2.** Якщо множина $\mathcal{L}^*(M)$ є компактною підмножиною простору $(\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$ відносно топології $\sigma((\bar{E}_{\mathcal{T}})^*, E_{\mathcal{T}})$, то, зважаючи на теорему Маккі – Аренса [12], топологія, породжена нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_E}$, узгоджується із двоїстістю $(E_{\mathcal{T}}, \bar{E}_{\mathcal{T}}^*)$, тобто множина

$$\tilde{\mathbf{M}} = \left\{ l \in (\bar{E}_{\mathcal{T}})^* \;\middle|\; l = \widetilde{\mathcal{L}^*\varphi},\ \varphi \in \lambda M,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

буде збігатися з $(\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$. Це означає, що в такому випадку виконуються умови теореми 2, тому розв'язок у сенсі означення 2 єдиний.

Паралельно з основним рівнянням $\mathcal{L}u = f$ розглянемо спряжене рівняння $\mathcal{L}^*\varphi = l$ та встановимо деяку двоїстість між ними. Зробимо спочатку необхідне зауваження стосовно дії спряжених операторів $\mathcal{L}^*$ та $\mathcal{L}_1^*$. Як зазначалося вище, $(F, \|\cdot\|_F)^* = (F_1, \|\cdot\|_F)^*$, тому спряжені оператори $\mathcal{L}^*: F^* \to E^*$ та $\mathcal{L}_1^*: F_1^* \to E_1^*$ ($\mathcal{L}_1$ — звуження оператора $\mathcal{L}$ на простір E_1) визначені на одному й тому самому просторі F^*. Якщо не накладати додаткових обмежень на простір E_1, то з означення випливає, що $E_1 \subset E$, і кожний лінійний неперервний функціонал, що визначений на E_1, допускає неперервне продовження на весь простір E. При цьому, взагалі кажучи, це продовження можна здійснити не єдиним чином, оскільки включення $E_1 \subset E$ може не бути щільним. Тому, в загальному випадку, простори E^* і E_1^* не є однаковими, але при кожному елементі $\varphi \in F^*$ функціонали $\mathcal{L}^*\varphi$ і $\mathcal{L}_1^*\varphi$ будуть збігатися на елементах простору E_1. Тому у випадках, коли мова йтиме про значення функціонала $\mathcal{L}_1^*\varphi$ на елементі з E_1, замість $\mathcal{L}_1^*\varphi$ будемо писати $\mathcal{L}^*\varphi$. На основі викладеного дамо означення узагальненого розв'язку для спряженого рівняння.

Означення 4. *Узагальненим розв'язком операторного рівняння* $\mathcal{L}^*\varphi = l$, *де* $l \in (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$, *будемо називати такий елемент* $\varphi \in F_1^*$, *що для всіх* $u \in E$, $\mathcal{L}u \in F_1$, *виконується рівність*

$$\varphi(\mathcal{L}u) = l(u).$$

Теорема 5. *При всіх* $l \in (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$ *операторне рівняння* $\mathcal{L}^*\varphi = l$ *має єдиний узагальнений розв'язок у сенсі означення* 4.

Доведення. Зафіксуємо $l \in (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$. Для довільного $u \in E$: $\mathcal{L}u \in F_1$ розглянемо $l(u)$ і запишемо такі нерівності:

$$|l(u)| \leq \|l\|_{(\bar{E}_{\mathcal{T}})^*} \|u\|_{\mathcal{T}_E} \leq c\|l\|_{(\bar{E}_{\mathcal{T}})^*} \|\mathcal{L}u\|_{F_1}.$$

Зважаючи на ін'єктивність оператора $\mathcal{L}$, для всіх $f \in R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ маємо

$$\left|l(\mathcal{L}^{-1}f)\right| \leq c\|l\|_{\bar{E}_{\mathcal{T}}^*} \|f\|_{F_1}.$$

Оскільки $R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ — щільна множина в F_1, то лінійний функціонал $\varphi(f) = l(\mathcal{L}^{-1}f)$, визначений на $R(\mathcal{L}) \bigcap F_1 \subset F_1$ і обмежений за нормою простору F_1^*, можна розширити за неперервністю на весь простір F_1. Отже, існує такий лінійний і неперервний функціонал $\varphi \in F_1^*$, що

$$\varphi(\mathcal{L}u) = l(\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}u)) = l(u) \tag{9}$$

для всіх $u \in E$, $\mathcal{L}u \in F_1$, тобто $\varphi \in F_1^*$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}^*\varphi = l$ у сенсі означення 4.

Єдиність узагальненого розв'язку безпосередньо випливає з тотальності множини $R(\mathcal{L}) \bigcap F_1$ у просторі F_1 відносно двоїстості (F_1, F_1^*).

Теорему доведено.

На завершення зазначимо, що отримані результати узгоджуються і узагальнюють твердження роботи [11]. Так, у цитованій роботі для рівняння $\mathcal{L}x = \vec{F}$, де оператор $\mathcal{L}$ задається символічною матрицею

$$\mathcal{L}x = \left(\begin{array}{c|c} u_t + qu & \nabla_\xi \vec{\omega} \\ \hline \nabla_\xi u & \mathbf{M}\vec{\omega} \end{array}\right), \qquad x = (u, \vec{\omega})^T,$$

отримано послаблені апріорні оцінки

$$\left\|\bar{\mathcal{L}}x\right\|_Y \le c\|x\|_X, \quad c^{-1}\|x\|_{X_2} \le \left\|\bar{\mathcal{L}}x\right\|_{Y_1}, \qquad x \in X, \quad \bar{\mathcal{L}}x \in Y_1, \tag{10}$$

де для гільбертових просторів X, Y, X_2, Y_1 виконуються умови $X \subset X_2$, $Y_1 \subset Y$. На основі оцінок (10) доведено теорему існування та єдиності узагальненого розв'язку $x \in X_2$ для довільних правих частин $\vec{F} \in Y_1$.

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
4. *Петунин Ю. И.* Об одной концепции обобщенного решения операторных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1286 – 1290.
5. *Клюшин Д. А., Кущан А. А., Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И.* Обобщенное решение некоторых операторных уравнений в банаховых пространствах // Журн. обчислюв. та прикл. математики. – 2001. – Вип. 86, № 1. – С. 29 – 50.
6. *Клюшин Д. А., Петунин Ю. И.* Концепция обобщенного решения нелинейных операторных уравнений в метрических пространствах // Там же. – 2002. – Вип. 87, № 1. – С. 11 – 23.
7. *Номировский Д. А.* Об обобщенной разрешимости линейных систем // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 26 – 33.
8. *Номіровський Д. А.* До питання єдиності узагальнених розв'язків операторних рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2004. – № 4. – С. 223 – 227.
9. *Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Двадцатая проблема Гильберта. – М.: ООО „И. Д. Вильямс", 2009. – 192 с.
10. *Lyashko S. I.* Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. – Boston etc.: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 466 p.
11. *Ляшко С. И., Номировский Д. А.* Обобщенная разрешимость и оптимизация параболических систем в областях с тонкими слабопроницаемыми включениями // Кибернетика и систем. анализ. – 2003. – № 5. – С. 131 – 142.
12. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 260 с.

Одержано 05.03.09,
після доопрацювання — 09.04.10