УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т экономики и права),
В. Г. Доронин (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

НАИЛУЧШИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ НА ПРЯМОЙ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

We obtain exact inequalities of the Jackson type in the case of the best mean square approximation by entire functions of exponential type of degree $\le \sigma$ on a line. For classes of functions determined by means of majorants of averaged smoothness characteristics $\Omega_1(f,t)$, $t > 0$, we find exact values of the Kolmogorov mean ν-width, a linear mean ν-width, and the Bernstein mean ν-width, $\nu > 0$.

Одержано точні нерівності типу Джексона у випадку найкращого середньоквадратичного наближення цілими функціями скінченного степеня $\le \sigma$ на прямій. Для класів функцій, означених за допомогою мажорант усереднених характеристик гладкості $\Omega_1(f,t)$, $t > 0$, знайдено точні значення колмогоровського, лінійного та бернштейнівського середніх ν-поперечників, $\nu > 0$.

1. Пусть $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\}$, есть пространство вещественных функций f, определенных и измеримых на $\mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2} < \infty .$$

Через $B_{\sigma,2}$ обозначим подпространство целых функций конечной степени $\le \sigma$, которые принадлежат $L_2(\mathbb{R})$, а через

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \overset{\text{df}}{=} \inf\left\{ \|f - g_\sigma\| : g_\sigma \in B_{\sigma,2} \right\}$$

— наилучшее приближение функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ элементами подпространства $B_{\sigma,2}$.

Напомним, что впервые вопросы аппроксимации функций на прямой $\mathbb{R}$ начал изучать С. Н. Бернштейн, использовавший для этого в качестве аппарата приближения подпространства целых функций конечной степени. Различные аспекты данной проблемы в последующем нашли свое отражение в работах Н. И. Ахиезера, С. М. Никольского, А. Ф. Тимана, И. И. Ибрагимова и других (см., например, [1 – 12]).

Для решения ряда задач конструктивной теории функций в пространстве 2π-периодических функций $L_p([0,2\pi])$, $0 < p < 1$, К. В. Руновский использовал вместо модуля непрерывности k-го порядка характеристику [13]

$$\Omega_k(f,t)_p \overset{\text{df}}{=} \left\{ \frac{1}{t^k} \int_0^t \ldots \int_0^t \left\| \Delta_{\overline{h}}^k f \right\|_{L_p([0,2\pi])}^p dh_1 \ldots dh_k \right\}^{1/p},$$

где $t > 0$, $\overline{h} \overset{\text{df}}{=} (h_1, \ldots, h_k)$, $\Delta_{\overline{h}}^k \overset{\text{df}}{=} \Delta_{h_1}^1 \circ \ldots \circ \Delta_{h_k}^1$, $\Delta_{h_j}^1 f(x) \overset{\text{df}}{=} f(x + h_j) - f(x)$, $j = \overline{1,k}$, которая слабо эквивалентна величине $\omega_k(f,t)_p$. Отметим, что ранее характеристика $\Omega_1(f,t)_p$ была использована Э. А. Стороженко, В. Г. Кротовым и П. Освальдом [14] для изучения поведения наилучшего приближения функций полиномами по системе Хаара.

2. Исходя из изложенного, при решении ряда зада теории аппроксимации функций определенный интерес представляет использование наряду с модулем непрерывности k-го порядка усредненной характеристики гладкости $\Omega_k(f,t)_p$. Так, в случае полиномиальной аппроксимации 2π-периодических функций в пространстве $L_2([0,2\pi])$ в работах [15, 16] были получены соответственно следующие результаты:

$$\sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Omega_k(f^{(r)},t/n)_2}:\ f\in L_2^r([0,2\pi]),\quad f\not\equiv\text{const}\right\} =$$

$$= \left\{2\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-k/2},\quad 0<t\le\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$\sup\left\{\frac{n^{r-1/2}E_{n-1}(f)_2}{\sqrt{\int_0^{t/n}\Omega_k^2(f^{(r)},u)_2\,du}}:\ f\in L_2^r([0,2\pi]),\quad f\not\equiv\text{const}\right\} =$$

$$= \left\{2^k\int\limits_0^t\left(1-\frac{\sin u}{u}\right)^k du\right\}^{-1/2},\quad 0<t\le\frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

где $r\in\mathbb{Z}_+$; $L_2^r([0,2\pi])$ $\{L_2^0([0,2\pi])\equiv L_2([0,2\pi])\}$ — множество функций $f\in$ $\in L_2([0,2\pi])$, производные $(r-1)$-го, $r\in\mathbb{N}$, порядка которых абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству $L_2([0,2\pi])$; $E_{n-1}(f)_2$ — наилучшее приближение функции $f\in L_2([0,2\pi])$ подпространством тригонометрических полиномов порядка $n-1$ в метрике пространства $L_2([0,2\pi])$. Отметим, что отношение $0/0$ полагаем равным нулю.

3. Обозначим через $L_2^r(\mathbb{R})$, $r\in\mathbb{N}$, множество функций $f\in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны, а $f^{(r)}\in L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^r(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|+\left\|f^{(r)}\right\|$. При этом полагаем $L_2^0(\mathbb{R})\ \equiv\ L_2(\mathbb{R})$. Подобно случаю 2π-периодических функций, в [10] в качестве усредненной характеристики гладкости произвольного элемента $f\in L_2(\mathbb{R})$ была рассмотрена величина

$$\Omega_k(f,t)\ \overset{\text{df}}{=}\ \left\{\frac{1}{t^k}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t\left\|\Delta_{\bar h}^k f\right\|^2 dh_1\ldots dh_k\right\}^{1/2},\quad t>0.$$

Там же было показано, что для произвольных чисел $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<\sigma<\infty$ и $0<$ $<t\le\pi/2$ имеет место равенство

$$\sup\left\{\frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Omega_k(f^{(r)},t/\sigma)}:\ f\in L_2^r(\mathbb{R})\right\} = \left\{2\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-k/2}. \tag{3}$$

Отметим, что при $r=0$ для вычисления экстремальной характеристики (3) рассматриваются функции $f\in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю. Очевидно, что соотношение (3) является своеобразным распространением результата (1) на случай наилучшего приближения функций $f\in L_2(\mathbb{R})$ элементами подпространства $B_{\sigma,2}$. Целью данной статьи является продолжение указанной тематики, а именно распространение и обобщение результата (2) на случай аппроксимации целыми функциями конечной степени $\leq \sigma$ на прямой. Для этого в наших рассуждениях, в частности, получили дальнейшее развитие некоторые идеи, изложенные в работах [10, 11, 17].

4. Полагаем

$$\theta_{\sigma,r,k,h}(\psi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{ \frac{\mathcal{A}_\sigma^2(f)}{\int_0^h \Omega_k^2(f^{(r)},t)\psi(t)\,dt} : f \in L_2^r(\mathbb{R}) \right\}, \tag{4}$$

где точная верхняя грань при $r = 0$ вычисляется на том же множестве функций, на котором в аналогичном случае определяется экстремальная характеристика (3). Обозначим

$$D_{t,r,k,h}(\psi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 2^k t^{2r} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin t\tau}{t\tau} \right)^k \psi(\tau)\,d\tau.$$

Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma \in (0,\infty)$, $h \in (0, \pi/\sigma)$ *и* ψ — *некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *функция, тождественно не равная нулю. Тогда выполняются следующие неравенства*:

$$\{D_{\sigma,r,k,h}(\psi)\}^{-1} \leq \theta_{\sigma,r,k,h}(\psi) \leq \{\inf_{\sigma \leq t < \infty} D_{t,r,k,h}(\psi)\}^{-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Установим вначале оценку сверху величины $\theta_{\sigma,r,k,h}(\psi)$. В работе [10] было показано, что для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо соотношение

$$\Omega_k^2(f^{(r)},\tau) = 2^{k+1} \int_0^\infty |\mathcal{F}(f,t)|^2 t^{2r} \left(1 - \frac{\sin t\tau}{t\tau} \right)^k dt, \tag{6}$$

где $\mathcal{F}(f)$ — преобразование Фурье функции f, $\tau > 0$.

Известно [4, 5], что для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует единственная целая функция $\Lambda_\sigma^*(f) \in B_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$\Lambda_\sigma^*(f,t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} \chi_\sigma(\tau) \mathcal{F}(f,\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{it\tau} \mathcal{F}(f,\tau)\,d\tau.$$

Здесь χ_σ — характеристическая функция множества $(-\sigma,\sigma)$. Исходя из этого для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $B_{\sigma,2}$ в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ равна [4 – 6]

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) = \left\| f - \Lambda_\sigma^*(f) \right\|^2 = \int_{|t| \geq \sigma} |\mathcal{F}(f,t)|^2\,dt.$$

Поскольку вследствие вещественности функции f функция $|\mathcal{F}(f)|$ является четной, то

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) = 2\int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,t)|^2\,dt. \tag{7}$$

Тогда с учетом (6), (7) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) \;=\; 2\int\limits_{\sigma}^{\infty} |\mathcal{F}(f,t)|^2 \,\frac{2^k t^{2r}\int_0^h \left(1-\dfrac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^k \psi(\tau)d\tau}{D_{t,r,k,h}(\psi)}\,dt \;\le$$

$$\le\; \frac{\int_0^h \left\{2^{k+1}\int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,t)|^2\, t^{2r}\left(1-\dfrac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^k dt\right\}\psi(\tau)d\tau}{\inf\limits_{\sigma\le t<\infty} D_{t,r,k,h}(\psi)} \;\le$$

$$\le\; \frac{\int_0^h \Omega_k^2(f^{(r)},\tau)\psi(\tau)d\tau}{\inf\limits_{\sigma\le t<\infty} D_{t,r,k,h}(\psi)}\,.$$

Отсюда следует требуемая оценка сверху

$$\theta_{\sigma,r,k,h}(\psi) \;\le\; \{\inf_{\sigma\le t<\infty} D_{t,r,k,h}(\psi)\}^{-1}. \tag{8}$$

Перейдем к установлению оценки снизу экстремальной характеристики (4). Для этого, подобно [10], рассмотрим целую функцию

$$q_\varepsilon(t) \;\overset{\text{df}}{=}\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin t(\sigma+\varepsilon)}{t} - \frac{\sin t\sigma}{t}\right)$$

экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\sigma(t^*/\pi-1)$. Здесь через t^* обозначена точка из интервала $(0,\infty)$, в которой четная функция $x^{-1}\sin x$ принимает наименьшее значение. Очевидно, что t^* $(4,49<t^*<4,51)$ является наименьшим положительным корнем уравнения $x-\operatorname{tg}x = 0$ [15, 16]. Поскольку преобразование Фурье функции $\gamma_a(t) \overset{\text{df}}{=} t^{-1}\sin at$, $a>0$, имеет вид

$$\mathcal{F}(\gamma_a,t) \;=\; \left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \text{если}\ |t|<a;\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \text{если}\ |t|=a;\quad 0,\ \text{если}\ |t|>a\right\},$$

для функции

$$q_\varepsilon(t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\gamma_{\sigma+\varepsilon}(t)-\gamma_\sigma(t))$$

имеем

$$\mathcal{F}(q_\varepsilon,t) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ \sigma<|t|<\sigma+\varepsilon,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \text{если}\ \ |t|=\sigma+\varepsilon\ \ \text{или}\ \ |t|=\sigma,\\[2mm] 0, & \text{если}\ \ |t|>\sigma+\varepsilon\ \ \text{или}\ \ |t|<\sigma. \end{cases}$$

Поскольку $q_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, в силу соотношения (7) получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(q_\varepsilon) \;=\; 2\,\varepsilon. \tag{9}$$

С учетом (6) для функции q_ε запишем

$$\Omega_k^2(q_\varepsilon^{(r)},\tau) \;=\; 2^{k+1}\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} t^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^k dt \;\le\; 2^{k+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}\left(1-\frac{\sin\tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right)^k. \tag{10}$$

Используя формулы (4), (9), (10) и определение точной верхней грани, находим

$$\theta_{\sigma,r,k,h}(\psi) \ \geq \sup_{0<\varepsilon<\sigma(t^*/\pi-1)} \frac{\mathcal{A}_\sigma^2(q_\varepsilon)}{\int_0^h \Omega_k^2(q_\varepsilon^{(r)},\tau)\psi(\tau)d\tau} \ \geq \ \frac{1}{D_{\sigma,r,k,h}(\psi)}. \tag{11}$$

Сопоставляя соотношения (8) и (11), получаем требуемые неравенства (5), что и завершает доказательство теоремы 1.

5. Из полученной теоремы вытекают такие следствия.

***Следствие* 1.** *Пусть* $0 < h \leq 3\pi/(4\sigma)$ *и выполнены все остальные требования теоремы* 1*. Тогда справедливо равенство*

$$\theta_{\sigma,r,k,h}(\psi) = \{D_{\sigma,r,k,h}(\psi)\}^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Учитывая поведение функции $\gamma_1(t) = t^{-1}\sin t$ (см., например, [18, с. 129, 132]), для произвольных $x \geq 1$ и $0 < y \leq 3\pi/4$ имеем $\gamma_1(y) \geq \gamma_1(xy)$. Поэтому выполняется неравенство

$$x^\nu\left(1-\gamma_1(xy)\right)^\alpha \geq \left(1-\gamma_1(y)\right)^\alpha, \tag{13}$$

где ν и α — произвольные положительные числа. Пусть $y = \sigma\tau$, $0 < \tau \leq h$; $x = t/\sigma$, $t \geq \sigma$, $\nu = 2r$; $\alpha = k$. Тогда из (13) имеем

$$t^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^k \geq \sigma^{2r}\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^k. \tag{14}$$

Умножая обе части неравенства (14) на функцию $2^k\psi(\tau)$ и интегрируя полученное соотношение по τ в пределах от 0 до h, получаем

$$D_{t,r,k,h}(\psi) \geq D_{\sigma,r,k,h}(\psi) \quad \forall t\in[\sigma,\infty). \tag{15}$$

С учетом (15) из (5) следует требуемое равенство (12), что завершает доказательство следствия 1.

Пусть $h = \beta/\sigma$, где $0 < \beta < \pi$, и $\psi(\tau) = g(\sigma\tau)$. Тогда

$$D_{t,r,k,h}(\psi) = 2^k t^{2r}\int_0^{\beta/\sigma}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^k g(\sigma\tau)\,d\tau =$$

$$= 2^k\sigma^{2r-1}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{2r}\int_0^{\beta}\left(1-\frac{\sin(t\tau/\sigma)}{t\tau/\sigma}\right)^k g(\tau)\,d\tau, \quad \sigma \leq t < \infty.$$

Следовательно,

$$\inf_{\sigma\leq t<\infty} D_{t,r,k,h}(\psi) \geq 2^k\sigma^{2r-1}\inf_{1\leq x<\infty} G_{x,r,k,\beta}(g),$$

где

$$G_{x,r,k,\beta}(g) \overset{\text{df}}{=} x^{2r}\int_0^{\beta}\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^k g(\tau)\,d\tau.$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, g *— некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0,\beta]$ *функция, где* $0 < \beta < \pi$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\left\{G_{1,r,k,\beta}(g)\right\}^{-1} \le \inf_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{2^k\,\sigma^{2r}\mathcal{A}_\sigma^2(f)}{\int_0^\beta \Omega_k^2(f^{(r)},\tau/\sigma)g(\tau)d\tau} \le \left\{\inf_{1\le x<\infty} G_{x,r,k,\beta}(g)\right\}^{-1}.$$

При этом если функция g *такова, что*

$$\inf_{1\le x<\infty} G_{x,r,k,\beta}(g) = G_{1,r,k,\beta}(g),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{2^k\,\sigma^{2r}\mathcal{A}_\sigma^2(f)}{\int_0^\beta \Omega_k^2(f^{(r)},\tau/\sigma)g(\tau)d\tau} = \left\{G_{1,r,k,\beta}(g)\right\}^{-1}.$$

При $r = 0$ *точная верхняя грань вычисляется на том же множестве функций, на котором в аналогичном случае определяется экстремальная характеристика* (3).

***Следствие* 3.** *Пусть* $g_*(t) \overset{\mathrm{df}}{=} t^{2r-1}g_1(t)$, $r\in\mathbb{N}$, *— неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0,\beta]$, $0<\beta<\pi$, *функция,* g_1 *— невозрастающая на* $[0,\beta]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\inf_{1\le x<\infty} G_{x,r,k,\beta}(g_*) = G_{1,r,k,\beta}(g_*) \tag{16}$$

и справедлива формула

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{2^k\,\sigma^{2r}\mathcal{A}_\sigma^2(f)}{\int_0^\beta \Omega_k^2(f^{(r)},\tau/\sigma)\tau^{2r-1}g_1(\tau)d\tau} = \left\{G_{1,r,k,\beta}(g_*)\right\}^{-1}. \tag{17}$$

Действительно, достаточно показать справедливость равенства (16), поскольку тогда равенство (17) будет сразу же получено из второй части следствия 2. Полагаем

$$g_1^*(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{g_1(t),\ \text{если}\ 0\le t\le\beta;\quad g_1(\beta),\ \text{если}\ \beta\le t<\infty\right\}.$$

При любом $1\le x<\infty$ получаем

$$G_{x,r,k,\beta}(g_*) = x^{2r}\int_0^\beta\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^k\tau^{2r-1}g_1(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{\beta x}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^k\tau^{2r-1}g_1^*(\tau/x)d\tau \ge \int_0^{\beta x}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^k\tau^{2r-1}g_1^*(\tau)d\tau \ge$$

$$\ge \int_0^{\beta}\left(1-\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^k\tau^{2r-1}g_1(\tau)d\tau = G_{1,r,k,\beta}(g_*),$$

т. е. формула (16) имеет место.

6. Поскольку все промежуточные производные функции $f\in L_2^r(\mathbb{R})$ также принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$, определенный интерес представляет вычисление экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений промежуточных производных $f^{(r-\nu)}$, $\nu=1,\ldots,r-1$, элементами подпространства $B_{\sigma,2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Основываясь на результатах предыдущего пункта, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $r, k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in (0, \infty)$, $0 < h \le 3\pi/(4\sigma)$, ψ — *некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *функция, тождественно не равная нулю. Тогда имеют место равенства*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{2\mu} \mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)})}{\int_0^h \Omega_k^2(f^{(r)}, \tau)\psi(\tau)d\tau} = \left\{ 2^k \int_0^h \left(1 - \frac{\sin \sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^k \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1}, \tag{18}$$

где $\mu = 0, 1, \ldots, r$.

Доказательство. При $\mu = 0$ или $\mu = r$ соотношение (18) можно получить непосредственно из формулы (12). Поэтому рассмотрим случай $\mu \in (0, r) \cap \mathbb{N}$. Запишем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)}) = 2\int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f, t)|^{2(1-\mu/r)} t^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, t)|^{2\mu/r} dt. \tag{19}$$

Применяя к правой части равенства (19) неравенство Гельдера, имеем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)}) \le \left\{ 2\int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f, t)|^2 t^{2r} dt \right\}^{1-\mu/r} \left\{ 2\int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f, t)|^2 dt \right\}^{\mu/r} =$$

$$= \mathcal{A}_\sigma^{2(1-\mu/r)}(f^{(r)}) \mathcal{A}_\sigma^{2\mu/r}(f). \tag{20}$$

Поскольку в силу (12) выполняются неравенства

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r)}) \le \left\{ 2^k \int_0^h \left(1 - \frac{\sin \sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^k \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1} \int_0^h \Omega_k^2(f^{(r)}, \tau)\psi(\tau)d\tau,$$

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) \le \left\{ 2^k \sigma^{2r} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin \sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^k \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1} \int_0^h \Omega_k^2(f^{(r)}, \tau)\psi(\tau)d\tau,$$

используя неравенство (20), получаем оценку сверху

$$\frac{\sigma^{2\mu} \mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)})}{\int_0^h \Omega_k^2(f^{(r)}, \tau)\psi(\tau)d\tau} \le \left\{ 2^k \int_0^h \left(1 - \frac{\sin \sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^k \psi(\tau)d\tau \right\}^{-1} \tag{21}$$

для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $q_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, использованную при доказательстве теоремы 1. Учитывая, что

$$\mathcal{A}_\sigma^2(q_\varepsilon^{(r-\mu)}) = 2\int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(q_\varepsilon, t)|^2 t^{2(r-\mu)} dt =$$

$$= 2\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} t^{2(r-\mu)} dt \ge 2\varepsilon\sigma^{2(r-\mu)},$$

и используя полученное на основании (10) неравенство

$$\int_0^h \Omega_k^2(q_\varepsilon^{(r)}, \tau)\psi(\tau)d\tau \le 2^{k+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin \tau(\sigma+\varepsilon)}{\tau(\sigma+\varepsilon)}\right)^k d\tau,$$

имеем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{2\mu}\mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)})}{\int_0^h \Omega_k^2(f^{(r)},\tau)\psi(\tau)d\tau} \geq$$

$$\geq \sup_{0<\varepsilon<\sigma(t^*/\pi-1)} \frac{\sigma^{2\mu}\mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)})}{\int_0^h \Omega_k^2(q_\varepsilon^{(r)},\tau)\psi(\tau)d\tau} \geq \left\{2^k\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^k\psi(\tau)d\tau\right\}^{-1}. \quad (22)$$

Из соотношений (21), (22) получаем (18).

Теорема 2 доказана.

7. Следует особо отметить, что подпространство $B_{\sigma,2}$ до недавнего времени было изолированным и в некотором смысле уникальным аппаратом приближения в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Введение Г. Г. Магарил-Ильяевым [19] определения средней размерности, явившегося определенной модификацией соответствующего понятия, данного ранее В. М. Тихомировым, позволило определить асимптотическую структуру подпространств, подобную поперечникам, когда средняя размерность играет роль размерности. В результате этого оказалось возможным сравнивать аппроксимативные свойства подпространства $B_{\sigma,2}$ с аналогичными характеристиками других подпространств из $L_2(\mathbb{R})$ той же средней размерности и решать экстремальные задачи теории приближения, имеющие оптимизационное содержание.

Приведем ряд необходимых понятий из работ [19, 21, 22]. Пусть $\mathbb{B}L_2(\mathbb{R})$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$; $\mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$ — совокупность всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$;

$$\mathrm{Lin}_n(L_2(\mathbb{R})) = \left\{\mathcal{L}\in\mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R})):\ \dim\mathcal{L}\leq n\right\}, \quad n\in\mathbb{Z}_+;$$

$$E(A,C,L_2(\mathbb{R})) = \sup\left\{\inf\left\{\|x-y\|:\ y\in A\right\}:\ x\in C\right\}$$

— наилучшее приближение множества $C\subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A\subset L_2(\mathbb{R})$. Под A_T, $0<T<\infty$, понимаем множество суженных на отрезок $[-T,T]$ функций из $A\subset L_2(\mathbb{R})$, а через $\mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L}\in\mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L}\cap\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_2([-T,T])$ при любом $0<T<\infty$.

Если $\mathcal{L}\in\mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $0<T$, $\varepsilon<\infty$, то существуют такие $n\in\mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M}\in\mathrm{Lin}_n(L_2([-T,T]))$, для которых

$$E((\mathcal{L}\cap\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}))_T,\ \mathcal{M},\ L_2([-T,T])) < \varepsilon.$$

Пусть

$$\mathcal{D}_\varepsilon(T,\mathcal{L},L_2(\mathbb{R})) = \min\Big\{n\in\mathbb{Z}_+:\ \exists\mathcal{M}\in\mathrm{Lin}_n(L_2([-T,T])),$$

$$E((\mathcal{L}\cap\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}))_T,\ \mathcal{M},\ L_2([-T,T]))<\varepsilon\Big\}.$$

Эта величина не убывает по T и не возрастает по ε [22].

Величину

$$\overline{\dim}(\mathcal{L},L_2(\mathbb{R})) = \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{T\to\infty}\frac{\mathcal{D}_\varepsilon(T,\mathcal{L},L_2(\mathbb{R}))}{2T},$$

где $\mathcal{L}\in\mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. В работах [19, 21, 22] отмечалось, что

$$\overline{\dim}\,(B_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) \;=\; \frac{\sigma}{\pi}. \tag{23}$$

Пусть Q — центрально-симметричное подмножество из $L_2(\mathbb{R})$ и $0 < \nu < < \infty$ — произвольное число. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ понимаем величину

$$\overline{d_\nu}(Q, L_2(\mathbb{R})) \;=\; \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\big\{\|f-\varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}\big\} : f \in Q\Big\} :$$
$$\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})),\;\; \overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \le \nu\Big\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя точная нижняя грань, называется экстремальным.

Средним линейным ν-поперечником множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta_\nu}(Q, L_2(\mathbb{R})) \;=\; \inf\Big\{\sup\big\{\|f - \Lambda f\| : f \in Q\big\} : (X, \Lambda)\Big\},$$

в которой точная нижняя грань берется по всем парам (X, Λ) таким, что X есть нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_2(\mathbb{R})$; $Q \subset X$; $\Lambda : X \to L_2(\mathbb{R})$ — непрерывный линейный оператор, для которого $\mathrm{Im}\,\Lambda \in \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $\overline{\dim}\,(\mathrm{Im}\,\Lambda, L_2(\mathbb{R})) \le \nu$. Напомним, что подпространство вида $\Lambda f,\; f \in X$, являющееся образом оператора Λ, обозначается символом $\mathrm{Im}\,\Lambda$ (см., например, [23]). Пару (X_*, Λ_*), на которой достигается точная нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b_\nu}(Q, L_2(\mathbb{R})) \;=\; \sup\Big\{\sup\big\{\rho > 0 : \mathcal{L} \cap \rho\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}) \subset Q\big\} :$$
$$\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})),\;\; \overline{\dim}\,(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > \nu,\;\; \overline{d_\nu}(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1\Big\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества Q в $L_2(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на подпространство $\mathcal{L}$ при вычислении точной верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых справедлив аналог теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике шара. Этому требованию удовлетворяет, например, подпространство $B_{\sigma,2}$, если $\sigma > \nu\pi$ [21].

Между перечисленными экстремальными характеристиками множества Q выполняются неравенства

$$\overline{b_\nu}(Q, L_2(\mathbb{R})) \;\le\; \overline{d_\nu}(Q, L_2(\mathbb{R})) \;\le\; \overline{\delta_\nu}(Q, L_2(\mathbb{R})). \tag{24}$$

Точные значения, точные порядковые оценки либо асимптотически точные значения средних поперечников некоторых классов функций в разное время были вычислены, например, в работах [19, 21, 22, 24, 10].

8. Пусть $\Phi(t)$, $t \ge 0$, — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W^r(\Omega_1, \Phi)$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, производные r-го порядка которых $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int_0^t \Omega_1^2(f^{(r)}, \tau)\,d\tau \;\le\; \Phi^2(t), \qquad 0 < t < \infty.$$

Очевидно, что класс функций $W^r(\Omega_1, \Phi)$ принадлежит пространству $L_2^r(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\mathcal{A}_\sigma(W^r(\Omega_1,\Phi)) \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\mathcal{A}_\sigma(f) : f \in W^r(\Omega_1,\Phi)\right\},$$

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* \overset{\text{df}}{=} \left\{1-\frac{\sin t}{t}, \text{ если } 0 < t \le t^*;\ 1-\frac{\sin t^*}{t^*}, \text{ если } t \ge t^*\right\},$$

где значение точки t^* определено в ходе доказательства теоремы 1.

Для пары $(L_2^r(\mathbb{R}),\Lambda)$, где $\Lambda : L_2^r(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — непрерывный линейный оператор, для которого $\operatorname{Im}\Lambda \in \operatorname{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$, $\overline{\dim}\,(\operatorname{Im}\Lambda, L_2(\mathbb{R})) \le \nu$, полагаем

$$\mathcal{E}_\nu(W^r(\Omega_1,\Phi);(L_2^r(\mathbb{R}),\Lambda)) \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\|f-\Lambda f\| : f \in W^r(\Omega_1,\Phi)\right\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть для любого* $\sigma > \nu\pi$, *где* ν *— произвольное положительное число, мажорирующая функция* Φ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi^2(t)}{\Phi^2(\pi/(2\sigma))} \ge \frac{\int_0^{\sigma t}(1-\tau^{-1}\sin\tau)_* d\tau}{\pi/2 - Si(\pi/2)}, \quad 0 < t < \infty. \tag{25}$$

Здесь $Si(t) = \int_0^t \tau^{-1}\sin\tau\, d\tau$ *— интегральный синус. Тогда справедливы равенства*

$$\overline{b_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R})) = \overline{d_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R})) = \overline{\delta_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R})) =$$

$$= \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\Omega_1,\Phi)) = \mathcal{E}_\nu(W^r(\Omega_1,\Phi);(L_2^r(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*)) =$$

$$= \frac{\nu^{1/2-r}}{\pi^r(1-2Si(\pi/2)/\pi)^{1/2}}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{26}$$

При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*)$, *где* $\Lambda_{\nu\pi}^*$ *определяется из условия*

$$\mathcal{F}(\Lambda_{\nu\pi}^* f,\cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)\mathcal{F}(f,\cdot)$$

($\mathcal{F}$ *— преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ *— характеристическая функция множества* $(-\nu\pi,\nu\pi)$*), будет экстремальной для линейного* ν*-поперечника* $\overline{\delta_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R}))$, *а подпространство* $B_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего* ν*-поперечника по Колмогорову* $\overline{d_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R}))$. *Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению* (25), *не пусто.*

Доказательство. Полагая в формуле (18) $\psi \equiv 1$, $k=1$, $\mu = r$, $r \in \mathbb{N}$, $h = \pi/(2\sigma)$, для любой функции $f \in L_2^r(\mathbb{R})$ получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) \le \frac{1}{\sigma^{2r}}\left\{2\int_0^{\pi/(2\sigma)}\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)d\tau\right\}^{-1}\int_0^{\pi/(2\sigma)}\Omega_1^2(f^{(r)},t)dt. \tag{27}$$

Из [21] следует, что средняя размерность пространства $B_{\nu\pi,2}$

$$\overline{\dim}\,(B_{\nu\pi,2};\ L_2(\mathbb{R})) = \nu.$$

Тогда из (27), где $\sigma = \nu\pi$, с учетом определения класса $W^r(\Omega_1,\Phi)$ имеем

$$\mathcal{E}_\nu(W^r(\Omega_1,\Phi);(L_2^r(\mathbb{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*)) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\Omega_1,\Phi)) \le$$
$$\le \frac{\nu^{1/2-r}}{\pi^r(1-2Si(\pi/2)/\pi)^{1/2}}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{28}$$

Из определений средних ν-поперечников, приведенных в п. 7, неравенств (24) и соотношения (28) следуют оценки сверху

$$\Pi_\nu(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R})) \le \frac{\nu^{1/2-r}}{\pi^r(1-2Si(\pi/2)/\pi)^{1/2}}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right), \tag{29}$$

где $\Pi_\nu(\cdot)$ — любой из рассмотренных выше средних ν-поперечников.

Установим оценки снизу рассматриваемых экстремальных характеристик, использовав формулу (24) и оценив снизу величину $\overline{b_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R}))$. Для этого, положив $\hat\sigma \overset{\text{df}}{=} \nu\pi(1+\varepsilon)$, где ε — произвольное положительное число, рассмотрим шар

$$\mathcal{B}_{\hat\sigma}(\rho_*(\varepsilon)) \overset{\text{df}}{=} B_{\hat\sigma,2}\bigcap\rho_*(\varepsilon)\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}) = \left\{g_{\hat\sigma}\in B_{\hat\sigma,2}:\|g_{\hat\sigma}\|\le\rho_*(\varepsilon)\right\}$$

радиуса

$$\rho_*(\varepsilon) \overset{\text{df}}{=} \frac{(\hat\sigma)^{1/2-r}}{(\pi-2Si(\pi/2))^{1/2}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\hat\sigma}\right).$$

В силу (23) и результатов [21] имеем

$$\overline{d_\nu}(B_{\hat\sigma,2}\bigcap\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}),L_2(\mathbb{R})) = 1.$$

Рассмотрим произвольный элемент $g_{\hat\sigma}\in\mathcal{B}_{\hat\sigma}(\rho_*(\varepsilon))$. В силу (6) получаем

$$\Omega_1^2(g_{\hat\sigma}^{(r)},\tau) = 4\int_0^{\hat\sigma}|\mathcal{F}(g_{\hat\sigma},t)|^2t^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)dt \le 2\left(1-\frac{\sin\hat\sigma\tau}{\hat\sigma\tau}\right)_*(\hat\sigma)^{2r}\|g_{\hat\sigma}\|^2.$$

Отсюда с учетом условия (25) для любого $t\in(0,\infty)$ имеем

$$\int_0^t\Omega_1^2(g_{\hat\sigma}^{(r)},\tau)d\tau \le 2(\hat\sigma)^{2r}\|g_{\hat\sigma}\|^2\int_0^t\left(1-\frac{\sin\hat\sigma\tau}{\hat\sigma\tau}\right)_*d\tau \le$$
$$\le \frac{\int_0^{\hat\sigma t}(1-\tau^{-1}\sin\tau)_*d\tau}{\pi/2-Si(\pi/2)}\Phi^2\left(\frac{\pi}{2\hat\sigma}\right) \le \Phi^2(t).$$

Следовательно, справедливо включение $\mathcal{B}_{\hat\sigma}(\rho_*(\varepsilon)) \subset W^r(\Omega_1,\Phi)$, где $\varepsilon>0$ — любое конечное число. Воспользовавшись определением среднего ν-поперечника по Бернштейну, запишем

$$\overline{b_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R})) \ge \overline{b_\nu}(\mathcal{B}_{\hat\sigma}(\rho_*(\varepsilon));L_2(\mathbb{R})) \ge \rho_*(\varepsilon). \tag{30}$$

Из (30) имеем

$$\overline{b_\nu}(W^r(\Omega_1,\Phi);L_2(\mathbb{R})) \ge \sup\{\rho_*(\varepsilon):\varepsilon>0\} = \frac{\nu^{1/2-r}}{\pi^r(1-2Si(\pi/2)/\pi)^{1/2}}\Phi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{31}$$

Сопоставляя соотношения (24), (28) и (31), получаем требуемые равенства (26).

В заключение отметим, что, как следует из результатов работы [16], функция $\Phi_*(t) \overset{\text{df}}{=} t^{\beta/2}$, где

$$\beta \overset{\text{df}}{=} \frac{\pi - 2}{\pi - 2Si(\pi/2)},$$

удовлетворяет условию (25) при любом $\sigma > \nu\pi$.

Теорема 3 доказана.

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
3. *Ибрагимов И. И.* Теория приближения целыми функциями. – Баку: Элм, 1979. – 468 с.
4. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 5. – С. 1013 – 1016.
5. *Насибов Ф. Г.* О приближении в L_2 целыми функциями // Докл. АН АзССР. – 1986. – **42**, № 4. – С. 3 – 6.
6. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 6. – С. 65 – 73.
7. *Дзядик В. К.* Про точні верхні грані найкращих наближень на деяких класах неперервних функцій, визначених на дійсній осі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1975. – № 7. – С. 589 – 592.
8. *Громов А. Ю.* О точных константах приближения целыми функциями дифференцируемых функций // Исследования по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил. – 1976. – Вып. 7. – С. 17 – 21.
9. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
10. *Vakarchuk S. B.* Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – P. 27 – 39.
11. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О точных неравенствах типа Джексона для целых функций в L_2 // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. мат. – 2007. – № 8. – С. 89 – 93.
12. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* О наилучшем среднеквадратическом приближении целыми функциями конечной степени на прямой // Там же. – 2009. – **17**, № 6/1. – С. 36 – 41.
13. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.
14. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Там же. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
15. *Вакарчук С. Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. – 2005. – **78**, № 5. – С. 792 – 796.
16. *Vakarchuk S. B., Zabutna V. I.* Widths of functional classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East J. Approxim. – 2008. – **14**, № 4. – P. 411 – 421.
17. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785 – 792.
18. *Рыбасенко В. Д., Рыбасенко И. Д.* Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
19. *Магарил-Ильяев Г. Г.* φ-Средние поперечники классов функций на прямой // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 2. – С. 211 – 212.
20. *Тихомиров В. М.* Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных // Теория кубатурных формул и вычислительная математика / Тр. конф. по дифференц. уравнениям и вычислит. математике (Новосибирск, 1978). – Новосибирск, 1980. – С. 183 – 188.
21. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 11. – С. 1635 – 1656.
22. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 1. – С. 35 – 38.
23. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
24. *Вакарчук С. Б.* О сильной асимптотике средних N-поперечников классов функций, аналитических на вещественной прямой // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 1 – 4.

Получено 28.01.10