УДК 517.9

О. Ю. Теплінський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРИКЛАДИ ДИФЕОМОРФІЗМІВ КОЛА ЗІ ЗЛАМОМ, ЯКІ СПРЯЖЕНІ C^1-ГЛАДКО, АЛЕ НЕ $C^{1+\gamma}$-ГЛАДКО

We prove the existence of two real-analytic circle diffeomorphisms with breaks of the same size and an irrational rotation number of half-bounded type that are not $C^{1+\gamma}$-smoothly conjugate for any $\gamma > 0$. In this way we show that the previous result concerning the C^1-smoothness of the conjugacy for such mappings is a sharp estimate for the smoothness of this conjugacy.

Доказано существование двух действительно-аналитических диффеоморфизмов окружности с изломом одинакового размера и иррациональным числом вращения полуограниченного типа, которые не являются $C^{1+\gamma}$-гладко сопряженными ни для какого $\gamma > 0$. Тем самым показано, что полученный ранее результат относительно C^1-гладкости сопряжения таких отображений является точной оценкой на гладкость этого сопряжения.

1. Вступ. Відповідно до класичної теореми Данжуа [1], два достатньо гладких зберігаючих орієнтацію дифеоморфізми кола, які мають одне і те ж саме ірраціональне число обертання, є топологічно еквівалентними, тобто існує неперервна заміна координат (яка в свою чергу є гомеоморфізмом цього кола), що переводить один із цих дифеоморфізмів у другий. Питання щодо гладкості цього *спряження*, як називають зазначену заміну координат (а вона є єдиною з точністю до жорсткого повороту кола на певний кут), було предметом розгляду теорії КАМ [2] в локальній постановці (тобто за умови близькості даного дифеоморфізму до жорсткого повороту кола) та теорії Ермана [3] у глобальній (без такого обмеження). Вже Арнольд виявив, що для забезпечення хоча б мінімальної гладкості спряження необхідно накладати певні обмеження на ірраціональне число обертання (так звані діофантові умови). Власне, він побудував [2] приклади дійсно-аналітичних дифеоморфізмів кола з одним і тим самим ірраціональним числом обертання, спряження між якими не є навіть абсолютно неперервним.

Оскільки теорема Данжуа є вірною не лише для „чистих” дифеоморфізмів кола, а й у випадку наявності в них ізольованих особливостей деяких типів, природним є прагнення розширити *теорію жорсткості* для дифеоморфізмів кола (так називають дослідження питань щодо гладкості їхнього спряження) на випадок дифеоморфізмів з особливостями. Ідеї та методи теорії жорсткості для дифеоморфізмів з особливостями викладено в оглядовій статті [4], в ній також анонсовано результати, про які йтиметься трохи нижче, та висловлено деякі гіпотези. Власне, є два природних типи ізольованих особливостей, для яких виконуються аналоги теореми Данжуа: критична точка (в якій похідна перетворюється на нуль) та точка зламу (в якій однобічні похідні зліва та справа відмінні між собою), і відповідні дві теореми анонсовано в [4]. В обох випадках результат полягає в доведенні C^1-гладкості спряження за певних умов. Для *критичних поворотів* кола (так називають дифеоморфізми кола з критичною точкою) анонсовану в [4] теорему доведено в [5], а для дифеоморфізмів зі зламом — у [6]. Ми не будемо зупинятися тут на деталях одержаних результатів щодо критичних поворотів кола; зауважимо лише, що точність доведеної в [5] оцінки на гладкість спряження підтверджують приклади дійсно-аналітичних критичних поворотів кола, що не є $C^{1+\gamma}$-гладко спряженими для жодного $\gamma > 0$, які побудовано Авілою в [7] (що, до речі, заперечує одну з висловлених в [4] гіпотез).

Дифеоморфізми кола зі зламом уперше було розглянуто у повідомленні [8]. У статті [9] означено ренормалізації таких дифеоморфізмів та доведено їхню експоненціально швидку збіжність до певної дробово-лінійної сім'ї. У важливій проміжній роботі [10] досліджено деякі аспекти поведінки ренормалізацій всередині цієї граничної сім'ї та доведено $C^{1+\gamma}$-гладкість спряження у спеціальному випадку, коли ланцюговий дріб числа обертання є періодичним (тобто це число є квадратичною ірраціональністю). В роботі [11] детально описано поведінку ренормалізацій дифеоморфізмів кола зі зламом у граничній дробово-лінійній сім'ї, а в [6] на основі цього доведено C^1-гладкість спряження за досить загальних умов (див. ненумеровану теорему в наступному пункті).

2. Означення та формулювання результатів. Домовимося одразу, що скрізь у цій статті для заданого натурального k та відображення F запис F^k позначає його k-ту ітерацію $F \circ F \circ \ldots \circ F$ (k разів), запис F^{-k} — k-ту ітерацію оберненого відображення $(F^{-1})^k$, запис F^0 — тотожне відображення $\mathbb{I}\mathrm{d}$. Натомість запис $F^{(k)}$ скрізь позначає k-ту похідну від F.

Для строгого формулювання результатів нам знадобляться деякі загальні означення. *Одиничним колом* назвемо фактор-простір $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ із зрозумілим чином заданими орієнтацією, метрикою, мірою Лебега та операцією додавання. Позначимо через $\mu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ відповідне факторизаційне відображення, яке „намотує" пряму на коло. Довільний зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм T одиничного кола $\mathbb{T}^1$ може бути, відповідно, „піднято" на пряму $\mathbb{R}$ у вигляді гомеоморфізму $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що має властивість $L(x+1) \equiv L(x)+1$ і пов'язаний із T співвідношенням $\mu \circ L = T \circ \mu$. Такий гомеоморфізм L носить назву *підняття* гомеоморфізму T і є визначеним з точністю до цілого доданка. Оскільки гомеоморфізм кола за своїм підняттям визначається однозначно, будемо використовувати позначення T_L для гомеоморфізму кола з даним підняттям L. Найважливішою арифметичною характеристикою зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму $T = T_L$ одиничного кола $\mathbb{T}^1$ є *число обертання* $\rho(T) = \mu\rho(L) \in \mathbb{T}^1$, де число обертання підняття $\rho(L) = \lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{L^j x}{j} \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, існує і не залежить від вибору початкової точки x. Це класичний результат теорії Пуанкаре (див. [12]), з якої також легко випливає, що число обертання є неперервним функціоналом на просторі усіх гомеоморфізмів кола (або на просторі піднять) з неперервною топологією.

Хоча число обертання гомеоморфізму одиничного кола є елементом цього кола, зазвичай його ототожнюють з відповідним дійсним числом з проміжку $[0,1)$, і ми також це робитимемо. Серед усіх піднять даного гомеоморфізму T можна виділити його *нормалізоване* підняття L_T, для якого $\rho(L_T) = \rho(T) \in [0,1)$. (Отже, для нормалізованого підняття L маємо еквівалентність позначень: $T = T_L \Leftrightarrow \Leftrightarrow L = L_T$.) Легко зрозуміти, що нормалізоване підняття або має властивість $\mathbb{I}\mathrm{d} < < L_T < \mathbb{I}\mathrm{d}+1$, і при цьому $\rho(T) \in (0,1)$, або має нерухому точку $L_T x_* = x_*$, $x_* \in \in \mathbb{R}$, і при цьому $\rho(T) = 0$. Також легко перевірити, що якщо $\rho(T) \in \left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{p+1}{q}\right)$, то $L_{T^q} = L_T^q - p$ (тут і далі, розглядаючи раціональне число у поданні вигляду $\dfrac{p}{q}$, вважаємо, що $p \geq 0$ та $q \geq 1$ — взаємно прості цілі числа).

У випадку ірраціонального числа обертання $\rho = \rho(T)$ (що є еквівалентним відсутності в T періодичних точок) будемо використовувати його розклад у нескінченний *ланцюговий дріб* [13]

$$\rho = 1/\big(k_1 + 1/(k_2 + 1/(\ldots/(k_n + \ldots)))\big) =: [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots]. \tag{1}$$

Значенням записаного „зліченно-поверхового" дробу вважається границя послідовності *раціональних наближень* — скінченних ланцюгових дробів $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots \ldots, k_n]$, $n \geq 0$ (де порожній ланцюговий дріб [ ] вважається розкладом числа 0). При цьому встановлена формулою (1) відповідність між усіма числами $\rho \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$ та усіма послідовностями *неповних часток* $[k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, є взаємно однозначною. Натомість кожне раціональне число $\dfrac{p}{q} \in (0,1)$ можна записати у вигляді (скінченного) ланцюгового дробу рівно двома способами внаслідок властивості $[k_1, k_2, \ldots, k_n, 1] = [k_1, k_2, \ldots, k_n + 1]$. Отже, можна зауважити (ми скористаємося цим фактом згодом), що кожне раціональне число обертання може бути єдиним чином подано у вигляді ланцюгового дробу парної довжини.

Зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм кола T називається *дифеоморфізмом* гладкості C^r, $r \in [2, +\infty] \cup \{\omega\} \cup \{\mathcal{E}\}$ (під гладкістю C^ω ми розуміємо аналітичність, а під гладкістю $C^{\mathcal{E}}$ — цілу голоморфність), *зі зламом* у точці ξ_0, якщо виконуються наступні умови, які простіше формулювати в термінах обмеження $\bar{L}_T$ підняття L_T на відрізок $[x_0, x_0 + 1]$, де $\mu x_0 = \xi_0$:

1) $\bar{L}_T \in C^r([x_0, x_0 + 1])$ (у випадку $r =$ „ω" мається на увазі, що функція $\bar{L}_T$ аналітично продовжується на певний окіл відрізка $[x_0, x_0 + 1]$ у комплексній площині $\mathbb{C}$, а у випадку $r =$ „$\mathcal{E}$" — на всю $\mathbb{C}$);

2) $\bar{L}'_T > 0$;

3) $\bar{L}'_T(x_0) \neq \bar{L}'_T(x_0 + 1)$.

Розміром зламу дифеоморфізму кола зі зламом ми називаємо додатне, відмінне від одиниці дійсне число

$$c = c(T) = \sqrt{\frac{\bar{L}'_T(x_0 + 1)}{\bar{L}'_T(x_0)}} = \sqrt{\frac{T'(\xi_0-)}{T'(\xi_0+)}}.$$

Легко переконатися, що розмір зламу є інваріантним відносно C^1-гладких замін координат на колі, а отже, два дифеоморфізми кола зі зламами різного розміру ніколи не можуть бути гладко спряженими, і якщо вони є гладко спряженими, то їхнє спряження переводить точку зламу одного в точку зламу іншого. Оскільки для дифеоморфізмів кола зі зламом виконується теорема Данжуа, то для пари таких дифеоморфізмів T, $\tilde{T}$, що мають одне й те ж саме ірраціональне число обертання та один і той самий розмір зламу, однозначно визначається гомеоморфізм кола $\varphi = \varphi(T, \tilde{T})$, який спрягає T і $\tilde{T}$ між собою в сенсі $\varphi \circ T \circ \varphi^{-1} = \tilde{T}$ і є єдиним можливим кандидатом на гладкість серед їхніх спряжень.

Якщо для дифеоморфізму зі зламом T додатково виконується умова $\bar{L}''_T > 0$ $(\bar{L}''_T < 0)$, то він називається *опуклим* донизу (догори); очевидно, при цьому розмір зламу $c > 1$ $(c < 1)$.

Позначимо через M_{o} та M_{e} два класи ірраціональних чисел $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] \in (0,1)$, для яких підпослідовності неповних часток з непарними та з парними індексами відповідно є обмеженими:

$$M_{\mathrm{o}} = \big\{\rho\colon\ (\exists K>0)\ (\forall m\in\mathbb{N})\ k_{2m-1}\le K\big\},$$

$$M_{\mathrm{e}} = \big\{\rho\colon\ (\exists K>0)\ (\forall m\in\mathbb{N})\ k_{2m}\le K\big\}.$$

В роботі [4] було анонсовано (з наступною помилкою: умови $\rho\in M_{\mathrm{e}}$ та $\rho\in M_{\mathrm{o}}$ там було співставлено умовам $c>1$ та $c<1$ з точністю до навпаки), а в роботі [6] — доведено наступний результат.

Теорема. *Нехай T і $\tilde T$ — два дифеоморфізми кола гладкості $C^{2+\alpha}$, $\alpha\in\in(0,1)$, зі зламом одного й того самого розміру $c>1$ $(c<1)$ з одним і тим самим ірраціональним числом обертання $\rho\in M_{\mathrm{e}}$ $(\rho\in M_{\mathrm{o}})$. Тоді їхнє спряження $\varphi=\varphi(T,\tilde T)$, яке переводить точку зламу T в точку зламу $\tilde T$, є дифеоморфізмом кола гладкості C^1.*

***Зауваження* 1.** Умова щодо обмеженості послідовностей неповних часток з парними (непарними) індексами є природною, тому що дозволяє обійти складний для аналізу випадок, коли відношення довжин сусідніх відрізків *динамічного розбиття* кола траєкторією точки зламу (див. будь-яку зі статей [4–6]) є необмеженим.

Мета цієї статті — довести, що оцінка на гладкість спряження $\varphi=\varphi(T,\tilde T)$, яка фігурує в даній теоремі (тобто C^1), є непокращуваною: її не можна підвищити до $C^{1+\gamma}$, $\gamma>0$, навіть якщо дозволити показнику γ залежати від T і $\tilde T$, навіть у випадку максимальної гладкості дифеоморфізмів зі зламом T і $\tilde T$, якою є $C^{\mathcal{E}}$ (тобто продовжуваність до цілих голоморфних функцій). Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. *Існує така пара T і $\tilde T$ дифеоморфізмів кола гладкості $C^{\mathcal{E}}$ зі зламом одного й того самого розміру $c>1$ $(c<1)$ з одним і тим самим ірраціональним числом обертання, розклад якого в ланцюговий дріб має вигляд $\rho==[k_1,1,k_2,1,k_3,1,\ldots]\in M_{\mathrm{e}}$ $(\rho=[1,k_1,1,k_2,1,k_3,\ldots]\in M_{\mathrm{o}})$, що їхнє спряження $\varphi=\varphi(T,\tilde T)$, яке переводить точку зламу T в точку зламу $\tilde T$, не є $C^{1+\gamma}$-гладким для жодного $\gamma>0$.*

***Зауваження* 2.** Важливою особливістю обох теорем є відсутність будь-якого обмеження на швидкість росту послідовності неповних часток, які стоять на непарних (парних) місцях в ланцюговому дробі для числа обертання. У першій теоремі це означає, що число обертання не зобов'язане бути діофантовим, як це вимагається для „чистих" дифеоморфізмів у зв'язку зі згаданими вище прикладами Арнольда. У другій теоремі ця послідовність повинна зростати до нескінченності досить швидко, але ми тут не досліджуємо цю швидкість. В роботі [10] доведено, що у випадку, коли послідовність неповних часток є періодичною, гладкість спряження є саме $C^{1+\gamma}$ для певного $\gamma>0$. Тобто оцінка першої теореми є непокращуваною лише якщо не дозволяється накладати додаткові умови на число обертання. Питання про залежність мінімальної можливої гладкості спряження для двох дифеоморфізмів з однаковим розміром зламу від їхнього спільного числа обертання залишається відкритим.

Легко переконатися, що якщо $\rho(T)=[k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n,\ldots]$ із $k_1\ge 2$, то $\rho(T^{-1})=[1,k_1-1,k_2,\ldots,k_{n-1},\ldots]$, і навпаки, а розмір зламу $c(T^{-1})=(c(T))^{-1}$. Тому досить довести теорему 1 в одному з двох включених до неї випадків, а інший випливатиме з доведеного шляхом обертання побудованої пари дифеоморфізмів зі зламом T, $\tilde T$. Ми побудуємо необхідні приклади з $c>1$, $\rho=[k_1,1,k_2,1,k_3,1,\ldots]$,

$k_1 \geq 2$, причому в класі опуклих донизу дифеоморфізмів зі зламом в точці 0. Отже, скрізь нижче вважаємо $c > 1$.

Для доведення теореми 1 нами буде адаптовано підхід Авіли до доведення аналогічного результату щодо критичних поворотів кола [7]. Ми почнемо з опису в п. 3 властивостей опуклих дифеоморфізмів кола зі зламом та їхніх сімей, що монотонно залежать від параметра. У пп. 4 та 5 наведемо інструментарій параболічної ренормалізації для таких дифеоморфізмів, який у п. 6 використаємо для побудови шуканих прикладів. Звернемо увагу, що побудови п. 3 вимагають від розглядуваних об'єктів гладкість принаймні C^2, п. 4 — принаймні C^3, п. 5 — принаймні C^4, і, зрештою, в п. 6 ми розглядатимемо цілі голоморфні функції.

3. Ітерації опуклих дифеоморфізмів зі зламом. Розглянемо клас $\mathcal{L}_c^r$, $c > 1$, $r \in [2, +\infty] \cup \{\omega\} \cup \{\mathcal{E}\}$, усіх функцій $L \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується закон $L(x+1) \equiv L(x) + 1$ та включення $L(0) \in [0, 1)$ і обмеження яких $\bar{L}$ на відрізок $[0, 1]$ задовольняють наступні умови: $\bar{L} \in C^r([0,1])$, $\bar{L}'' > 0$, $\bar{L}'(1) = c^2 \bar{L}'(0)$ (з цих умов також випливає, що $\bar{L}' > 0$). Легко бачити, що кожен елемент $L \in \mathcal{L}_c^r$ є нормалізованим підняттям певного дифеоморфізму кола $T = T_L$ гладкості C^r зі зламом розміру $c > 1$ в точці 0.

Очевидно, що для кожного $j \geq 1$ ітерація L^j відповідно до формули для похідної композиції функцій також має властивості $(L^j)' > 0$ та $(L^j)'' > 0$ (в точках зламу тут мова йде окремо про похідну зліва та похідну справа).

Нехай $L \in \mathcal{L}_c^r$, $\rho(T_L) = \dfrac{p}{q}$. Тоді ітерація T_L^q має в точності q точок зламу $T_L^{-j}(0)$, $0 \leq j < q$. Відповідно, функція $f = L^q - p = L_{T_L^q}$ має в точності q точок зламу на кожному проміжку $[A, A+1)$. Якщо ми впорядкуємо їх як $y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_{q-1} < y_q = 1$, $\{\mu y_j, 0 \leq j < q\} = \{T^{-j}(0), 0 \leq j < q\}$, то отримаємо, що f є строго опуклою донизу на кожному з відрізків $[y_j, y_{j+1}]$, $0 \leq j < q$. У гомеоморфізму кола T_L є хоча б одна періодична траєкторія, що складається з q різних точок, яким відповідають нерухомі точки функції f. Якщо точка зламу 0 є періодичною для T_L, то всі точки y_j, $0 \leq j \leq q$, є нерухомими для f, і внаслідок опуклості на кожному з відрізків $[y_j, y_{j+1}]$, $0 \leq j < q$, маємо $f \leq \mathbb{I}\mathrm{d}$, інших нерухомих точок, окрім точок зламу, ця функція не має, причому в кожній із цих точок зламу її похідна зліва є більшою за одиницю, а похідна справа — меншою. Припустимо тепер, що точка зламу не є періодичною. Періодична траєкторія розбиває коло на q дуг, які гомеоморфізм T_L певним чином циклічно переставляє. З цього випливає, що точки цієї періодичної траєкторії чергуються на колі із точками μy_j, $0 \leq j < q$, тобто на кожній дузі кола $(\mu y_j, \mu y_{j+1})$, $0 \leq j < q$, лежить рівно одна з точок даної періодичної траєкторії T_L. Відповідно, на кожному інтервалі прямої (y_j, y_{j+1}), $0 \leq j < q$, лежить рівно одна нерухома точка f, образ якої на колі належить до даної періодичної траєкторії. З цього випливає, що на кожному зі згаданих інтервалів лежить однакова кількість нерухомих точок функції f, а внаслідок опуклості ця кількість дорівнює одиниці або двом (графік опуклої функції f не може перетинати графік лінійної функції $\mathbb{I}\mathrm{d}$ більш ніж у двох точках). Неважко переконатися, що одиниці ця кількість дорівнює тоді і лише тоді, коли на кожному з указаних інтервалів графік f дотикається до графіка тотожного відображення, при цьому $f \geq \mathbb{I}\mathrm{d}$. Справді, якщо припустити, що дана кількість дорівнює одиниці, але хоча б на одному з інтервалів (y_j, y_{j+1}), $0 \leq j < q$, графік f перетинає графік $\mathbb{I}\mathrm{d}$ таким чином, що різниця $f - \mathbb{I}\mathrm{d}$ змінює знак, то на якомусь іншому з цих інтервалів внаслідок неперервності графіки повинні перетнутися „у зворотний бік”, отже, з відповідних двох нерухомих точок одна буде відштовхуючою, а інша притягуючою, що неможливо, бо вони відповідають одній і тій самій періодичній траєкторії T_L.

Позначимо через $\mathcal{L}^r_{c,p/q}$ множину піднять $L \in \mathcal{L}^r_c$ таких, що $\rho(T_L) = \dfrac{p}{q}$, і $f = L^q - p \geq \mathbb{I}\mathrm{d}$. Ми тільки що довели, що за таких умов гомеоморфізм кола T_L має єдину періодичну траєкторію, і графік функції $f = L_{T_L^q}$ дотикається до графіка тотожного відображення $\mathbb{I}\mathrm{d}$ в точках, які відповідають цій траєкторії (на $[0,1]$ їх рівно q) та чергуються з точками зламу цієї функції.

Тепер розглянемо, яким чином змінюється число обертання гомеоморфізму кола зі зламом, коли його підняття монотонно зростає. Нехай $L_s \in \mathcal{L}^r_c,\ s \in (A,B)$, — однопараметрична сім’я піднять, що строго неперервно зростає за параметром s, тобто $L_{s_1} < L_{s_2}$ при $s_1 < s_2$ і $L_s \to L_{s_0}$ при $s \to s_0$ рівномірно на $\mathbb{R}$. Нехай $T_s = T_{L_s},\ s \in (A,B)$. Легко бачити, що число обертання $\rho(s) = \rho(T_s) = = \lim_{j\to+\infty} \dfrac{L_s^j x}{j}$ є неспадною неперервною функцією параметра s. Можна показати, що даного ірраціонального значення ця функція може набувати лише при одному значенні параметра, тоді як даного раціонального значення $\dfrac{p}{q}$ вона набуватиме для всіх s з певного невиродженого замкненого проміжку $[s^*_{p/q}, s^{**}_{p/q}]$. При цьому для $s = s^*_{p/q}$ має місце описана вище ситуація, коли єдиною періодичною траєкторією T_s є траєкторія точки зламу і $f_s = L_s^q - p \leq \mathbb{I}\mathrm{d}$; для $s^*_{p/q} < s < s^{**}_{p/q}$ є рівно дві періодичні траєкторії (одна відштовхуюча, а інша притягуюча), а для $s = s^{**}_{p/q}$ маємо саме випадок $L_s \in \mathcal{L}^r_{c,p/q}$ ($f_s \geq \mathbb{I}\mathrm{d}$, дотикаючись в q точках на $[0,1]$). Важливою для нас є поведінка числа обертання $\rho(s)$ для значень параметра s, які наближаються до $s^{**}_{p/q}$ з правого боку, тобто для $s^{**}_{p/q} < s < s^{**}_{p/q} + \delta$ із малим $\delta > 0$.

Твердження 1. *Нехай $L_s \in \mathcal{L}^2_c,\ s \in (A,B)$, — однопараметрична сім’я піднять, що строго неперервно зростає за параметром s, і для певного $s^{**} \in (A,B)$ маємо $L_{s^{**}} \in \mathcal{L}^2_{c,[k_1,k_2,\ldots,k_{2n}]}$. Тоді існує така строго спадна послідовність значень параметра $s_k,\ k \geq k_0$, яка прямує до s^{**}, що $L_{s_k} \in \mathcal{L}^2_{c,[k_1,k_2,\ldots,k_{2n},k]}$, і число обертання $\rho(s)$ може бути подано у вигляді $[k_1,k_2,\ldots,k_{2n},k,\ldots]$ тоді і лише тоді, коли $s \in [s_{k+1}, s_k]$.*

Доведення. Твердження випливає з упорядкування для кожного $k \geq 1$ ланцюгових дробів

$$[k_1,k_2,\ldots,k_{2n},k] \geq [k_1,k_2,\ldots,k_{2n},k,\ldots] \geq$$

$$\geq [k_1,k_2,\ldots,k_{2n},k,1] = [k_1,k_2,\ldots,k_{2n},k+1]$$

та очевидного прямування $[k_1,k_2,\ldots,k_{2n},k] \to [k_1,k_2,\ldots,k_{2n}]$ при $k \to +\infty$, з урахуванням неперервності $\rho(s)$ і означення класів $\mathcal{L}^2_{c,p/q}$.

Зауваження 3. Кожне раціональне число $\dfrac{p}{q} \in [0,1)$ можна подати єдиним чином у вигляді ланцюгового дробу парної довжини.

Ми описали клас піднять $\mathcal{L}^r_{c,p/q},\ r \geq 2$, таких, що дифеоморфізм кола гладкості C^r зі зламом з підняттям у цьому класі має єдину q-періодичну траєкторію *параболічного типу*, тобто таку, яка з одного боку (лівого) притягує траєкторії, а з іншого (правого) — відштовхує, при цьому перша похідна від його ітерації T^q в точках цієї траєкторії дорівнює одиниці, а друга є додатною. Для більш глибокого вивчення динаміки ітерацій таких відображень нам знадобиться інструментарій параболічної ренормалізації.

4. Параболічна ренормалізація. Прикладна важливість вивчення одновимірних динамічних систем із дискретним часом у випадку, коли графік відповідного відображення майже дотикається до графіка тотожного відображення, вперше обґрунтовано в теорії так званого перемежовування Помо й Манневілля [14]. Ці автори зауважили, що в багатьох дисипативних системах (наприклад, в системі Лоренца) перехід від притягуючого циклу до хаотичного атрактора типово відбувається через характерну проміжну поведінку, в якій майже періодичний рух (регулярні осциляції) перемежовується „спалахами" хаотичного руху. Пояснити це їм вдалося, коли виявилося, що певне відображення Пуанкаре в цьому випадку поводиться саме як гладка функція, графік якої при біфуркаційному значенні параметра дотикається до графіка тотожного відображення (параболічна нерухома точка), при менших значеннях перетинає його — при цьому система має притягуючий цикл, а при більших майже дотикається, утворюючи вузеньку „воронку" повз нього — при цьому регулярні осциляції відповідають руху траєкторії через цю воронку, а хаотичні спостерігаються від одного потрапляння в неї до іншого. Виявилося, що в голоморфному випадку існує класичний інструмент дослідження такої ситуації, який має назву „координати Фату" (див. [15]) і по суті визначає ренормалізацію ітерації нескінченного порядку даного відображення в околі параболічної нерухомої точки. На дійсний випадок цей підхід було узагальнено О. Ланфордом (але не опубліковано) і використано, наприклад, у [16]. Отже, за неможливістю вказати посилання ми змушені будемо означити в цьому пункті „фольклорне" поняття параболічної ренормалізації для дійсних відображень скінченної гладкості.

Асимптотику траєкторії одновимірного відображення в околі точки дотику або майже дотику до тотожного вивчено досить непогано методами класичного математичного аналізу. У випадку відображення низької гладкості асимптотику таких його ітерацій пораховано в [5] (леми 5 та 6; їх же сформульовано в [4] як леми 4 та 5 відповідно). Але для необхідної тут конструкції параболічних ренормалізацій достатньо наступного більш простого твердження.

Лема 1. *Нехай функція* $F\colon [0,B] \to \mathbb{R}$ *строго зростає і задовольняє асимптотичну оцінку вигляду* $F(x) = x - ax^2 + \mathcal{O}(x^3)$, *причому* $F(x) < x$ *для всіх* $x \neq 0$. *Тоді для кожного* $0 < A < B$ *рівномірно по* $x \in [A,B]$ *та* $n \geq 2$ *виконуються оцінки*

$$F^n(x) = a^{-1}n^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2}\ln n), \tag{2}$$

$$F^{n+1}(x) - F^n(x) = -a^{-1}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3}\ln n). \tag{3}$$

Доведення. Оцінку (2) легко вивести, наприклад, з побудов розділу 8.5 книги [17]. Оцінка (3) є безпосереднім наслідком (2) та оцінки $F(x)-x = -ax^2+\mathcal{O}(x^3)$ з умови.

Для дійсної функції F, яка строго зростає на відрізку $[A,B]$, означимо її *афінну нормалізацію* $N_{F,[A,B]}\colon [0,1] \to [0,1]$ згідно з формулою

$$N_{F,[A,B]}(t) = \frac{F(A+t(B-A)) - F(A)}{F(B)-F(A)}.$$

Очевидно, що афінна нормалізація композиції двох функцій є композицією їхніх афінних нормалізацій: $N_{G\circ F,[A,B]} = N_{G,[F(A),F(B)]} \circ N_{F,[A,B]}$.

Нехай $L \in \mathcal{L}^3_{c,p/q}$. Позначимо через $d_+ > 0$ та $d_- < 0$ найближчі до нуля нерухомі точки функції $f = L^q - p$ (вони ж є точками дотику графіків f та $\mathbb{I}\mathrm{d}$). Розглянемо дві послідовності функцій $\Phi_{L,+,n} = N_{f^n,[0,f(0)]}$, $\Phi_{L,-,n} = N_{f^{-n},[0,f(0)]}$, $n \geq 0$.

Лема 2. *Послідовності* $\Phi_{L,+,n}$, $\Phi_{L,-,n}$, $n \geq 1$, *у просторі* $C^1([0,1])$ *збігаються до певних граничних функцій* $\Phi_{L,+}$ *та* $\Phi_{L,-}$ *відповідно. Для цих функцій виконуються нерівності* $\Phi'_{L,+}, \Phi'_{L,-} > 0$ *та рівності* $\Phi_{L,+}(0) = \Phi_{L,-}(0) = 0$, $\Phi_{L,+}(1) = \Phi_{L,-}(1) = 1$.

Доведення. Очевидно, що

$$\Phi'_{L,+,n}(t) = \frac{f(0)}{f^{n+1}(0) - f^n(0)} \prod_{j=0}^{n-1} (f'(f^j(f(0)t))) > 0$$

для всіх $n \geq 0$, оскільки $f' > 0$ (в точці нуль похідну від f беремо справа). Легко бачити, що при заміні координат $x \mapsto d_+ - x$ лема 1 стає застосовною до функції f. З оцінок (2), (3) та формули Ейлера $\sum_{j=1}^{n-1} j^{-1} = \ln n + \mathrm{const} + \alpha_n$, де $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$, випливає рівномірна по $t \in [0,1]$ оцінка

$$\ln \Phi'_{L,+,n}(t) - \ln \Phi'_{L,+,n+k}(t) =$$

$$= \ln \frac{f^{n+k+1}(0) - f^{n+k}(0)}{f^{n+1}(0) - f^n(0)} - \sum_{j=n}^{n+k-1} \ln f'(f^j(f(0)t)) =$$

$$= \ln \frac{2(f''(d_+))^{-1}(n+k)^{-2} + \mathcal{O}((n+k)^{-3}\ln(n+k))}{2(f''(d_+))^{-1}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3}\ln n)} -$$

$$- \sum_{j=n}^{n+k-1} \ln f'(d_+ - 2(f''(d_+))^{-1}j^{-1} + \mathcal{O}(j^{-2}\ln j)) =$$

$$= 2\ln n - 2\ln(n+k) + \mathcal{O}(n^{-1}\ln n) +$$

$$+ \sum_{j=n}^{n+k-1} \Big((\ln f')'(d_+) \cdot 2(f''(d_+))^{-1} j^{-1} + \mathcal{O}(j^{-2}\ln j) \Big) =$$

$$= 2\ln n - 2\ln(n+k) + 2\sum_{j=n}^{n+k-1} j^{-1} + \mathcal{O}(n^{-1}\ln n) +$$

$$+ \mathcal{O}\left(\sum_{j=n}^{+\infty} j^{-2}\ln j \right) = \mathcal{O}(\beta_n),$$

де $\beta_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Отже, послідовність неперервних функцій $\ln \Phi'_{L,+,n}$, $n \geq 0$, є фундаментальною за неперервною нормою, а тому рівномірно обмежено і рівномірно збігається до певної неперервної функції. З цього випливає, що послідовність $\Phi'_{L,+,n}$, $n \geq 0$, рівномірно збігається до певної відокремленої від нуля додатної неперервної функції. А оскільки для всіх $n \geq 0$ має місце рівність $\Phi_{L,+,n}(0) = 0$ (і так само $\Phi_{L,+,n}(1) = 1$), то збіжність послідовності похідних за неперервною нормою обумовлює збіжність послідовності власне функцій $\Phi_{L,+,n}$, $n \geq 0$, за C^1-нормою.

Для послідовності $\Phi_{L,-,n}$ доведення є повністю аналогічним, якщо зауважити, що заміна $x \mapsto x - d_-$ дозволяє застосувати лему 1 до оберненої функції f^{-1}.

Лему 2 доведено.

Функцію $R_L = \Phi_{L,+} \circ \Phi_{L,-}^{-1} \in C^1([0,1])$ назвемо *параболічною ренормалізацією* підняття $L \in \mathcal{L}^3_{c,p/q}$ (чи то відповідного дифеоморфізму кола зі зламом T_L).

Твердження 2. *Нехай два дифеоморфізми кола зі зламом T, $\tilde{T}$ з підняттями $L = L_T$, $\tilde{L} = L_{\tilde{T}}$ з класу $\mathcal{L}^3_{c,p/q}$ є C^1-гладко спряженими, тобто $\varphi \circ T \circ \varphi^{-1} = \tilde{T}$ для певного C^1-гладкого дифеоморфізму кола φ. Тоді $R_L = R_{\tilde{L}}$.*

Доведення. З динамічних міркувань очевидно, що спряження φ переводить точку зламу T в точку зламу $\tilde{T}$ і (єдину) періодичну траєкторію T в періодичну траєкторію $\tilde{T}$. Відповідно, підняття $\psi = L_\varphi$ є C^1-гладким дифеоморфізмом дійсної прямої, що, зокрема, має наступні властивості: $\psi \circ L \circ \psi^{-1} = \tilde{L}$, $\psi \circ f \circ \psi^{-1} = \tilde{f}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(d_\sigma) = \tilde{d}_\sigma$, де $\sigma \in \{+,-\}$, а $\tilde{d}_\sigma$ позначає найближчу до нуля з відповідного боку нерухому точку функції $\tilde{f} = \tilde{L}^q - p$.

Зрозуміло, що $N_{f^{2n},[f^{-n}(0),f^{-n+1}(0)]} = \Phi_{n,+} \circ \Phi_{n,-}^{-1} \to R_L$ та $N_{\tilde{f}^{2n},[\tilde{f}^{-n}(0),\tilde{f}^{-n+1}(0)]} \to R_{\tilde{L}}$ при $n \to +\infty$ за C^1-нормою. Оскільки $[\tilde{f}^{-n}(0), \tilde{f}^{-n+1}(0)] = \psi[f^{-n}(0), f^{-n+1}(0)]$, $[\tilde{f}^n(0), \tilde{f}^{n+1}(0)] = \psi[f^n(0), f^{n+1}(0)]$ і $\psi \circ f^{2n} = \tilde{f}^{2n} \circ \psi$, то маємо рівність $N_{\psi,[f^n(0),f^{n+1}(0)]} \circ N_{f^{2n},[f^{-n}(0),f^{-n+1}(0)]} = N_{\tilde{f}^{2n},[\tilde{f}^{-n}(0),\tilde{f}^{-n+1}(0)]} \circ N_{\psi,[f^{-n}(0),f^{-n+1}(0)]}$. Для завершення доведення досить зауважити, що $N_{\psi,[f^n(0),f^{n+1}(0)]}, N_{\psi,[f^{-n}(0),f^{-n+1}(0)]} \to \mathbb{I}\mathrm{d}$ за C^1-нормою хоча б тому, що ψ' неперервна й додатна в околі точок d_+ та d_-, до яких у границі стягуються відрізки $[f^n(0), f^{n+1}(0)]$ та $[f^{-n}(0), f^{-n+1}(0)]$ відповідно.

Твердження доведено.

5. Збурення, що змінюють параболічну ренормалізацію. Наша наступна мета — показати, що як завгодно малі збурення підняття L, які мають вигляд певних 1-періодичних тригонометричних поліномів (тобто сум вигляду $a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx)$), змінюють його параболічну ренормалізацію.

Отже, нехай підняття $L \in \mathcal{L}^4_{c,p/q}$ зафіксовано. Неважко побудувати 1-періодичний інтерполяційний тригонометричний поліном $P_L(x)$, який задовольняє наступні рівності: $P_L(L^j(0)) = 0$, $0 \leq j < 2q$; $P_L(L^j(d_+)) = P'_L(L^j(d_+)) = 0$, $0 \leq j < q$; $P_L\left(\frac{1}{2}f(0)\right) = 1$. З іншого боку, розглянемо 1-періодичну функцію Δ_L класу C^∞, яка дорівнює нулеві зовні інтервалів $(0, f(0)) + \mathbb{Z}$, додатна на цих інтервалах, і $\Delta_L\left(\frac{1}{2}f(0)\right) = 1$ є її максимальним значенням на $(0, f(0))$. Для кожного $\eta > 0$ знайдеться 1-періодичний апроксимуючий тригонометричний поліном $P_\eta(x)$ такий, що $\max_x \left|P_\eta^{(k)}(x) - \Delta_L^{(k)}(x)\right| \leq \eta$, $0 \leq k \leq 3$. Позначимо $v(x) = (P_L(x))^2 P_\eta(x)$. Збурення $v(x)$ є 1-періодичним тригонометричним поліномом, що має наступний ряд властивостей: $v(L^j(0)) = 0,\ 0 \le j < 2q$; $v^{(k)}(L^j(d_+)) = 0,\ 0 \le k \le 2,\ 0 \le j < q$; $|v(x)| \le (1+\eta)P_L^2(x),\ x \in \mathbb{R}$; $v^{(k)}(x) = \mathcal{O}(\eta),\ 0 \le k \le 3$, рівномірно по $x \notin (0, f(0)) + \mathbb{Z}$; $\left|v\left(\frac{1}{2}f(0)\right) - 1\right| \le \eta$. Очевидно, що при достатньо малих $\varepsilon > 0$ та $\eta > 0$ збурене відображення $L + \varepsilon v$ належить до класу піднять $\mathcal{L}^r_{c,p/q}$, причому відрізок траєкторії точки зламу довжини $2q$ та періодична траєкторія у дифеоморфізмів кола зі зламом T_L та $T_{L+\varepsilon v}$ одні й ті самі, до того ж значення першої та другої похідної в точках періодичної траєкторії також є тими самими для T_L і $T_{L+\varepsilon v}$. Відповідно, для функції $g = (L+\varepsilon v)^q - p$ виконуються рівності $g(0) = f(0),\ g^2(0) = f^2(0)$, $g(d_\sigma) = f(d_\sigma) = d_\sigma,\ g'(d_\sigma) = f'(d_\sigma) = 1,\ g''(d_\sigma) = f''(d_\sigma) > 0$, де $\sigma \in \{+, -\}$.

Твердження 3. *Якщо η і ε достатньо малі, то $R_L \ne R_{L+\varepsilon v}$.*

Доведення. Властивості полінома $v(x)$ обумовлюють рівномірну по $x \notin (0, f(0)) + \mathbb{Z}$ оцінку

$$\left|g^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\right| = \mathcal{O}(\varepsilon\eta), \quad 0 \le k \le 3. \tag{4}$$

Справді, цю оцінку легко довести у вигляді $\left((L+\varepsilon v)^j\right)^{(k)}(x) - (L^j)^{(k)}(x) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$, $x \notin (0, f(0)) + \mathbb{Z}$, скінченною індукцією по $1 \le j \le q$. (Це, до речі, єдине місце в доведенні, де використовується четверта похідна від L: вона необхідна для того, щоб вивести з оцінки $(L+\varepsilon v)^j(x) - L^j(x) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$ оцінку $L^{(3)}((L+\varepsilon v)^j(x)) - - L^{(3)}(L^j(x)) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$.)

Для досить малих $\eta_0 > 0,\ \varepsilon_0 > 0$ мають місце рівномірні по $x \in [f(0), f^2(0)]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \eta \in (0, \eta_0]$ та $n \ge 2$ оцінки

$$g^n(x) = d_+ - 2(f''(d_+))^{-1}n^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2}\ln n), \tag{5}$$

$$g^{n+1}(x) - g^n(x) = 2(f''(d_+))^{-1}n^{-2} + \mathcal{O}(n^{-3}\ln n). \tag{6}$$

Вони є наслідками рівномірних обмежень $g_* \le g \le g_{**}$, де $g_* = (L - 2\varepsilon_0 P_L^2)^q - p$, $g_{**} = (L + 2\varepsilon_0 P_L^2)^q - p$, і застосування леми 1 до цих g_* та g_{**}.

Нехай $\Psi_{L,+,n} = N_{f^{n-1},[f(0),f^2(0)]},\ n \ge 1$. Очевидно, $\Phi_{L,+,n} = \Psi_{L,+,n} \circ N_L$, де $N_L = N_{f,[0,f(0)]}$, і існує границя $\Psi_{L,+} = \lim_{n\to+\infty}\Psi_{L,+,n} \in C^1([0,1])$, при цьому $\Phi_{L,+} = \Psi_{L,+} \circ N_L$, а отже параболічна ренормалізація $R_L = \Psi_{L,+} \circ N_L \circ \Phi_{L,-}^{-1}$; також маємо $\Psi_{L,+}(0) = 0,\ \Psi_{L,+}(1) = 1$ та $\Psi' > 0$. Ми покажемо, що відмінність між функціями $\Psi_{L,+}$ та $\Psi_{L+\varepsilon v,+}$, а також між $\Phi_{L,-}$ та $\Phi_{L+\varepsilon v,-}$ має порядок $\varepsilon\eta$, тоді як функції N_L та $N_{L+\varepsilon v}$ відрізняються на величину порядку ε, з чого випливатиме неможливість рівності R_L та $R_{L+\varepsilon v}$.

Спочатку оцінимо різницю $g^n - f^n$ на відрізку $[f(0), f^2(0)]$. По-перше, з (5) випливає рівномірна оцінка $f'(g^n(x)) = f'(d_+ - 2(f''(d_+))^{-1}n^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2}\ln n)) = = 1 - 2n^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2}\ln n),\ n \ge 2$. По-друге, внаслідок (5) та (4) з урахуванням $(g-f)^{(k)}(d_+) = 0,\ 0 \le k \le 2$, маємо $g(g^n(x)) - f(g^n(x)) = (g-f)(d_+ + \mathcal{O}(n^{-1})) = = \mathcal{O}(\varepsilon\eta n^{-3}),\ n \ge 2$. Складаючи ці дві оцінки, одержуємо, що існує таке $C > 0$, що

$$\left|g^{n+1}(x) - f^{n+1}(x)\right| \le C\varepsilon\eta n^{-3} + (1 - 2n^{-1} + Cn^{-2}\ln n)|g^n(x) - f^n(x)|$$

для всіх $n \ge 2,\ x \in [f(0), f^2(0)],\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \eta \in (0, \eta_0]$. Телескопуючи останню нерівність, отримуємо

$$|g^{n+1}(x) - f^{n+1}(x)| \le$$

$$\le C\varepsilon\eta\left(n^{-3} + \sum_{k=n_0+1}^{n} P_k^n (k-1)^{-3}\right) + P_{n_0}^n \left|g^{n_0}(x) - f^{n_0}(x)\right| \qquad (7)$$

для всіх $n \ge n_0 \ge 2$, де $P_k^n = \prod_{j=k}^{n}(1 - 2j^{-1} + Cj^{-2}\ln j)$. Вважатимемо n_0 настільки великим, що $\ln(1 - 2j^{-1} + Cj^{-2}\ln j) = -2j^{-1} + Cj^{-2}\ln j + \mathcal{O}((-2j^{-1} + Cj^{-2}\ln j)^2) \le -2j^{-1} + 2Cj^{-2}\ln j$ при $j \ge n_0$. Тоді для $n_0 \le k \le n$ маємо $\ln P_k^n \le \sum_{j=k}^{n}(-2j^{-1} + 2Cj^{-2}\ln j) = 2(\ln(k-1) - \ln n + \alpha_{k-1} - \alpha_n + C\sum_{j=k}^{n} j^{-2}\ln j)$ за формулою Ейлера, а отже, $P_k^n \le C_1(k-1)^2 n^{-2}$, де $C_1 = \exp\left(4\max_{j\ge n_0-1}|\alpha_j| + 2C\sum_{j=n_0}^{+\infty} j^{-2}\ln j\right)$. З одержаної нерівності виводимо оцінку на суму у великих дужках в (7): $n^{-3} + \sum_{k=n_0+1}^{n} P_k^n(k-1)^{-3} \le n^{-3} + C_1\sum_{k=n_0+1}^{n}(k-1)^{-1}n^{-2} \le C_1 n^{-2}\sum_{j=n_0}^{n} j^{-1} = C_1 n^{-2}(\ln n - \ln(n_0-1) + \alpha_n - \alpha_{n_0-1}) = \mathcal{O}(n^{-2}\ln n)$. У підсумку з (7) отримуємо рівномірну по $x \in [f(0), f^2(0)]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\eta \in (0, \eta_0]$ та $n \ge 2$ оцінку

$$g^n(x) - f^n(x) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta n^{-2}\ln n). \qquad (8)$$

Наступним кроком оцінимо різницю $\ln\Psi'_{L+\varepsilon v,+} - \ln\Psi'_{L,+}$. Нехай $x = f(0) + t(f^2(0) - f(0))$, $t \in [0,1]$. За означенням функцій $\Psi_{L,+,n}$ та $\Psi_{L+\varepsilon v,+,n}$ маємо $\ln\Psi'_{L,+,n}(t) = \ln\left(f^2(0) - f(0)\right) - \ln\left(f^{n+1}(0) - f^n(0)\right) + \sum_{j=0}^{n-2}\ln f'(f^j(x))$, $\ln\Psi'_{L+\varepsilon v,+,n}(t) = \ln\left(g^2(0) - g(0)\right) - \ln\left(g^{n+1}(0) - g^n(0)\right) + \sum_{j=0}^{n-2}\ln g'(g^j(x))$, а отже, з урахуванням $g(0) = f(0)$, $g^2(0) = f^2(0)$ дістаємо

$$\ln\Psi'_{L+\varepsilon v,+,n}(t) - \ln\Psi'_{L,+,n}(t) = \ln\frac{f^{n+1}(0) - f^n(0)}{g^{n+1}(0) - g^n(0)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-2}\left(\ln f'(g^j(x)) - \ln f'(f^j(x))\right) + \sum_{j=0}^{n-2}\left(\ln g'(g^j(x)) - \ln f'(g^j(x))\right). \qquad (9)$$

Оцінимо кожен із трьох доданків у правій частині (9) окремо. Внаслідок (6) перший із них є $\mathcal{O}(n^{-1}\ln n)$. Другий є $\mathcal{O}(\varepsilon\eta)$, оскільки $\ln f'(g^j(x)) - \ln f'(f^j(x)) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta j^{-2}\ln j)$, $2 \le j \le n-2$, згідно з (8), а ряд $\sum_{j=2}^{+\infty} j^{-2}\ln j$ збігається, тоді як при $j = 1$ досить використати (4). Третій доданок також є $\mathcal{O}(\varepsilon\eta)$, тому що $g'(g^j(x)) - f'(g^j(x)) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta j^{-2})$ внаслідок (4) та (5) з урахуванням $(g-f)'(d_+) = 0$, $(g-f)''(d_+) = 0$, а ряд $\sum_{j=2}^{+\infty} j^{-2}$ збігається. Всі записані тут оцінки є рівномірними по $x \in [f(0), f^2(0)]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\eta \in (0, \eta_0]$ та $n \ge 2$. Отже, спрямувавши $n \to +\infty$, з (9) дістанемо $\ln\Psi'_{L+\varepsilon v,+}(t) - \ln\Psi'_{L,+}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$, з чого одразу випливає рівномірна по $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\eta \in (0, \eta_0]$ оцінка

$$\Psi_{L+\varepsilon v,+}(t) - \Psi_{L,+}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta). \qquad (10)$$

Аналогічним чином доводиться, що $\ln\Phi'_{L+\varepsilon v,-}(t) - \ln\Phi'_{L,-}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$, з чого випливає рівномірна по $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\eta \in (0, \eta_0]$ оцінка

$$\Phi^{-1}_{L+\varepsilon v,-}(t) - \Phi^{-1}_{L,-}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta). \tag{11}$$

З іншого боку,

$$g\left(\frac{f(0)}{2}\right) - f\left(\frac{f(0)}{2}\right) = (L+\varepsilon v)^q\left(\frac{f(0)}{2}\right) - L^q\left(\frac{f(0)}{2}\right) =$$

$$= L^{q-1}\left((L+\varepsilon v)\left(\frac{f(0)}{2}\right)\right) - L^{q-1}\left(L\left(\frac{f(0)}{2}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon\eta) =$$

$$= (L^{q-1})'\left(L\left(\frac{f(0)}{2}\right)\right)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$$

(тут ми використали оцінку $((L+\varepsilon v)^{q-1})(x) - L^{q-1}(x) = \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$ для $x \notin (0, f(0)) + \mathbb{Z}$, див. доведення оцінки (4) вище). Відповідно, має місце рівномірна по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $\eta \in (0, \eta_0]$ оцінка

$$N_{L+\varepsilon v}(1/2) - N_L(1/2) = K\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon\eta), \tag{12}$$

де $K = \big((f^2(0) - f(0))\big)^{-1}(L^{q-1})'\left(L\left(\frac{f(0)}{2}\right)\right) > 0.$

Збираючи разом оцінки (10), (11) та (12), в точці $t_* = \Phi_{L,-}(1/2)$ отримуємо $R_{L+\varepsilon v}(t_*) - R_L(t_*) = \Psi'_{L,+}(\theta)K\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon\eta)$, де θ — певна точка між $N_{L+\varepsilon v}(\Phi^{-1}_{L+\varepsilon v}(t_*))$ та $N_L(1/2)$. Очевидно, що при досить малих η та ε з останньої оцінки випливає, що $R_{L+\varepsilon v}(t_*) - R_L(t_*) \geq K_1\varepsilon$ із $K_1 = \dfrac{1}{2}K\Psi'_{L,+}(N_L(1/2)) > 0$, отже, $R_{L+\varepsilon v} \neq R_L$.

Твердження доведено.

6. Побудова прикладу. Нам знадобляться деякі нескладні конструкції з області функціонального аналізу (див., наприклад, [18]).

По-перше, клас $H^{1+}(\mathbb{T}^1)$ усіх зберігаючих орієнтацію дифеоморфізмів кола, які переводять нуль в нуль і мають гладкість $C^{1+\gamma}$ хоча б для якогось $\gamma > 0$, можна подати як об'єднання зліченної кількості класів K_n, $n \geq 0$, що є компактними за C^1-топологією. Наприклад, за K_n можна взяти множину усіх C^1-гладких дифеоморфізмів, що задовольняють нерівність $|\varphi'(\xi_1) - \varphi'(\xi_2)| \leq M_n|\xi_1 - \xi_2|^{\gamma_n}$ (тут $|\xi_1 - \xi_2|$ — довжина меншої з двох дуг кола з кінцями ξ_1 і ξ_2), де M_n, γ_n — довільні монотонні послідовності додатних чисел, перша з яких прямує до нескінченності, а друга — до нуля. Очевидно, що $K_n \subset K_{n+1}$ і $H^{1+}(\mathbb{T}^1) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$, а компактами за C^1-топологією кожен із класів K_n є внаслідок теореми Арцела.

По-друге, неважко переконатися, що функція

$$\operatorname{dist}(f, g) = D(f - g),$$

де

$$D(f) = \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} \frac{\max_{|z|\leq m}|f(z)|}{\max_{|z|\leq m}|f(z)| + 1},$$

задає скінченну метрику на просторі всіх цілих голоморфних функцій, причому в індукованій нею топології цей простір є повним, і збіжність послідовності функцій за цією метрикою обумовлює рівномірну збіжність їхніх похідних усіх порядків на усіх компактних підмножинах $\mathbb{C}$. Такий самий запис $\mathrm{dist}(L, \tilde{L})$ для функцій $L, \tilde{L} \in \mathcal{L}_c^{\mathcal{E}}$ позначатиме означену вище відстань між цілими голоморфними функціями, до яких продовжуються обмеження $L, \tilde{L}$ на відрізок $[0, 1]$.

Необхідним для доведення теореми 1 прикладом стане границя послідовності пар піднять $L_n, \tilde{L}_n \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,[k_1,1,k_2,1,\ldots,1,k_n,1]}$, $n \geq 0$, $R_{L_n} \neq R_{\tilde{L}_n}$, для побудови яких буде використано наступну індуктивну процедуру. В якості бази виберемо довільне підняття $L_0 \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,0}$ і $\tilde{L}_0 = L_0 + \varepsilon_0 v_0$ — його збурення, побудоване відповідно до п. 5 таким чином, що $R_{L_0} \neq R_{\tilde{L}_0}$.

Для кожної вже побудованої пари L_n, $\tilde{L}_n \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,[k_1,1,k_2,1,\ldots,1,k_n,1]}$, $n \geq 0$, $R_{L_n} \neq R_{\tilde{L}_n}$, знайдеться таке $\delta_n^* > 0$, що жодні два дифеоморфізми кола зі зламом, чиї підняття $L, \tilde{L} \in \mathcal{L}_c^{\mathcal{E}}$ лежать в замкнених δ_n^*-околах (за метрикою dist) піднять $L_n, \tilde{L}_n$ відповідно, не можуть бути спряженими за допомогою дифеоморфізму з множини K_n. Справді, якби це було не так, то існувала б послідовність дифеоморфізмів $\varphi_{n,j} \in K_n$, $j \geq 1$, і піднять $L_{n,j}, \tilde{L}_{n,j} \in \mathcal{L}_c^{\mathcal{E}}$ таких, що $L_{n,j} \to L_n$, $\tilde{L}_{n,j} \to \tilde{L}_n$ при $j \to +\infty$ за метрикою dist, і $\psi_{n,j} \circ L_{n,j} \circ \psi_{n,j}^{-1} = \tilde{L}_{n,j}$, де $\psi_{n,j} = L_{\varphi_{n,j}}$. Оскільки множина K_n компактна за C^1-топологією, то з цього випливала б рівність $\psi_n \circ L_n \circ \psi_n^{-1} = \tilde{L}_n$, а отже й $\varphi_n \circ T_{L_n} \circ \varphi_n^{-1} = T_{\tilde{L}_n}$ з певним $\psi_n = L_{\varphi_n}$, $\varphi_n \in K_n$, тому за твердженням 2 мала б місце рівність $R_{L_n} = R_{\tilde{L}_n}$, що суперечить припущенню щодо пари $L_n, \tilde{L}_n$.

Покладемо $\delta_0 = \delta_0^*$, $\delta_n = \min\left\{2^{-n}, \delta_n^*, \delta_{n-1} - \mathrm{dist}(L_n, L_{n-1}), \delta_{n-1} - \mathrm{dist}(\tilde{L}_n, \tilde{L}_{n-1})\right\}$ при $n \geq 1$. Відповідно до твердження 1 (та зауваження до нього), знайдуться такі досить малі $u_n > 0$ та $\tilde{u}_n > 0$, що $\rho(L_n + u_n) = \rho(\tilde{L}_n + \tilde{u}_n) = [k_1, 1, k_2, 1, \ldots, 1, k_n, 1, k_{n+1}, 1]$ з певним досить великим k_{n+1}, і при цьому $D(u_n) < \delta_n$, $D(\tilde{u}_n) < \delta_n/2$. Якщо $R_{L_{n+1}} \neq R_{\tilde{L}_n + \tilde{u}_n}$, то покладаємо $L_{n+1} = L_n + u_n$, $\tilde{L}_{n+1} = \tilde{L}_n + \tilde{u}_n$, в протилежному випадку беремо $\tilde{L}_{n+1} = \tilde{L}_n + \tilde{u}_n + \varepsilon_n v_n$, де збурення $\varepsilon_n v_n$ побудовано відповідно до п. 5 таким чином, що $R_{\tilde{L}_n + \tilde{u}_n} \neq R_{\tilde{L}_{n+1} + \tilde{u}_n + \varepsilon_n v_n}$, причому ε_n настільки мале, що $D(\varepsilon_n v_n) < \delta_n/2$ і $\varepsilon_n |v_n''| < 2^{-n} \inf_{x \in (0,1)} \tilde{L}_0''(x)$. В результаті одержуємо підняття $L_{n+1}, \tilde{L}_{n+1} \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,[k_1,1,k_2,1,\ldots,1,k_n,1,k_{n+1},1]}$, $R_{L_{n+1}} \neq R_{\tilde{L}_{n+1}}$, $\mathrm{dist}(L_{n+1}, L_n) < \delta_n$, $\mathrm{dist}(\tilde{L}_{n+1}, \tilde{L}_n) < \delta_n$.

Побудовані описаним чином послідовності L_n, $\tilde{L}_n$, $n \geq 0$, задовольняють нерівності $\mathrm{dist}(L_{n+m}, L_n) < \delta_n \leq \delta_n^*$, $\mathrm{dist}(\tilde{L}_{n+m}, \tilde{L}_n) < \delta_n \leq \delta_n^*$ для всіх $n, m \geq 0$, причому $\delta_n \to 0$, $n \to +\infty$. Внаслідок повноти ці послідовності збігаються у просторі цілих голоморфних функцій, граничні цілі голоморфні функції породжують певні підняття $L, \tilde{L} \in \mathcal{L}_c^{\mathcal{E}}$ відповідно $\Big($рівності $L(1) = L(0) + 1$, $L'(1-) = c^2 L'(0+)$ та $\tilde{L}(1) = \tilde{L}(0) + 1$, $\tilde{L}'(1-) = c^2 \tilde{L}'(0+)$ виконуються внаслідок граничного переходу; $L'' = L_0'' > 0$, $\tilde{L}'' = L_0'' - \sum_n \varepsilon_n v_n'' > 0$ за побудовою; $L(0), \tilde{L}(0) \in (0, 1)$, оскільки їхнє число обертання ірраціональне$\Big)$, і число обертання $\rho(L) = \rho(\tilde{L}) = [k_1, 1, k_2, 1, \ldots, 1, k_n, 1, \ldots]$ внаслідок його неперервності як функції підняття. З іншого боку, L та $\tilde{L}$ належать δ_n^*-околам L_n та $\tilde{L}_n$ відповідно для кожного $n \geq 0$, а тому вони не можуть бути спряжені жодним дифеоморфізмом з $\bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n = H^{1+}(\mathbb{T}^1)$, що й потрібно було довести.

Автор висловлює подяку С. Коляді, І. Мітельману, В. Савчуку, К. Ханіну, М. Якобсону та М. Ямпольському за допомогу у з'ясуванні окремих питань.

1. *Denjoy A.* Sur les courbes definies par les equation differentielles a la surface du tore // J. math. pures et appl. – 1932. – **11**. – P. 333 – 375.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21 – 86.
3. *Herman M.-R.* Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations // I. H. E. S.Publ.Math. – 1979. – **49**. – P. 5 – 233.
4. *Теплинский А. Ю., Ханин К. М.* Жесткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями // Успехи мат. наук. – 2004. – **59**, № 2. – С. 137 – 160.
5. *Khanin K., Teplinsky A.* Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities // Invent. math. – 2007. – **169**, № 1. – P. 193 – 218.
6. *Теплінський О. Ю., Ханін К. М.* Гладке спряження дифеоморфізмів кола зі зламом // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 1. – С. 100 – 114.
7. *Avila A.* On rigidity of critical circle maps. – Paris, 2005. – 5 p. – Preprint / Univ. Paris 6. (Available from http://www.impa.br/∼avila/circle.pdf).
8. *Вул Е. Б., Ханин К. М.* Гомеоморфизмы окружности с особенностью типа излома // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 3. – С. 189 – 190.
9. *Khanin K. M., Vul E. B.* Circle homeomorphisms with weak discontinuities // Proc. Int. Conf. "Dynamical systems and statistical mechanics" (Moscow, 1991). – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. – P. 57 – 98.
10. *Khanin K., Khmelev D.* Renormalizations and rigidity theory for circle homeomorphisms with singularities of break type // Communs Math. Phys. – 2003. – **235**, № 1. – P. 69 – 124.
11. *Теплінський О. Ю.* Гіперболічна підкова для дифеоморфізмів кола зі зламом // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 1. – С. 112 – 127.
12. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
13. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1960. – 112 с.
14. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Communs Math. Phys. – 1980. – **74**, № 2. – P. 189 – 197.
15. *Milnor J.* Dynamics in one complex variable. – 3 rd ed. // Ann. Math. Stud. – Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2006. – **160**. – 310 p.
16. *Bleher P. M., Jakobson M. V.* Absolutely continuous invariant measures for some maps of the circle // Statistical Physics and Dinamical Systems. Progress in Physics. – 1985. – **10**. – P. 303 – 315.
17. *де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 247 с.
18. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.

Одержано 12.01.10