УДК 512.64

Б. З. Шаваровський (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

РОЗКЛАДНІСТЬ НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ З КОМУТУЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

The list of known sets of factorable matrix polynomials is supplemented by new sets of polynomials of this sort. The known set of nonfactorable matrix polynomials is extended. These results can be applied to the study of matrix polynomial equations and systems of differential equations with constant coefficients.

Дополнен перечень известных множеств разложимых матричных многочленов новыми множествами таких многочленов. Расширено известное множество неразложимых матричных многочленов. Эти результаты можно применить к исследованию многочленных уравнений и систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Вступ. Будемо розглядати квадратні многочленні матриці з кільця $M_n(\mathbf{C}[x])$, де $\mathbf{C}$ — поле комплексних чисел, n — порядок матриці. Кожну таку матрицю $A(x)$ можна записати у вигляді матричного многочлена

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + A_2x^{s-2} + \ldots + A_s, \tag{1}$$

де A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, s$ — матриці з кільця $M_n(\mathbf{C})$, x — скалярна змінна, A_0 — ненульова матриця. Тоді число s називається степенем матричного многочлена (або многочленної матриці) $A(x)$. Многочленна матриця (м. м.) $A(x)$ називається *регулярною*, якщо її старший коефіцієнт A_0 — неособлива матриця, і *унітальною*, якщо $A_0 = E$ — одинична матриця. Многочлен $\det A(x)$ називається *характеристичним многочленом*, а його корені — *характеристичними коренями* м. м. $A(x)$. Регулярна м. м. називається *розкладною*, якщо її можна зобразити у вигляді добутку регулярних множників нижчих степенів. У протилежному випадку м. м. називається *нерозкладною*.

Я. Б. Лопатинським у свій час було поставлено задачу (див. [1]), яка полягає в тому, щоб знайти умови, за яких м. м. є розкладною у вищевказаному сенсі. Цю задачу в дещо іншій постановці сформулював М. Г. Крейн у середині 50-х років минулого століття. На той час не було систематичної теорії з цього питання, а окремі результати слід віднести скоріше до приємних випадковостей. Послідовні та систематичні дослідження в напрямку пошуку необхідних та достатніх умов для можливості зображення м. м. у вигляді добутку множників нижчих степенів і конкретної побудови таких добутків можна знайти в роботах П. С. Казімірського та його учнів, які пізніше узагальнено в монографії [2] (див. також [3]).

П. С. Казімірський остаточно розв'язав проблему виділення регулярного множника із м. м. (див. [4]). У зв'язку з цим для довільної квадратної матриці над кільцем $\mathbf{C}[x]$ вказано критерій існування регулярних дільників з наперед заданою канонічною діагональною формою (формою Сміта), а також розроблено метод безпосередньої побудови таких дільників.

Серед всіх м. м. особливий інтерес викликають розкладні на лінійні множники, а також їх „антиподи" — нерозкладні м. м. Деякі множини перших із них були відомі ще до розв'язання проблеми виділення регулярного множника із м. м. Однак і після завершення побудови теорії розкладу м. м. на множники інтерес до множин розкладних на лінійні множники м. м. не слабшає і пошук таких множин не припиняється.

Хоча багаторазовим застосуванням методу виділення регулярного множника (наприклад, запропонованого в [2]) можна в принципі одержати розклад м. м. на нерозкладні, і навіть лінійні, множники (якщо такий розклад взагалі існує), ця обставина не применшує значимість встановлених множин розкладних м. м. Насправді задача полягає в тому, щоб вказати множини розкладних м. м., належність до яких визначається за якимись зовнішніми, явними і досить наглядними ознаками.

Метою цієї роботи є доповнення переліку множин розкладних м. м. і започаткування списку множин нерозкладних м. м.

Історія питання зв'язку мультиплікативних та спектральних властивостей м. м. бере свій початок в крайньому разі від роботи [5]. Однак традиційно відлік множин розкладних м. м., як правило, починають з м. м. простої структури, тобто м. м., всі елементарні дільники яких є лінійними. Позначимо множину таких м. м. через K_1. Розкладність на лінійні множники м. м. із множини K_1 доведено в роботах [6 – 8].

Далі, можливість зображення у вигляді добутку лінійних множників м. м., всі характеристичні корені яких мають кратності, що не перевищують два (множина K_2), обґрунтовано в роботі [9]. У роботі [10] анонсовано теорему, що стверджує розкладність на лінійні множники квадратичних м. м., всі елементарні дільники яких мають степені не вище ніж два. В [11] доведено розкладність у вказаному вище сенсі так званих м. м. квазіпростої структури — множини K_3. Остання складається із м. м., кожний нелінійний елементарний дільник яких має степінь два, а відповідний йому характеристичний корінь – геометричну кратність один. Очевидно, множини K_1, K_2 мають не порожній перетин, що містить множину K_0 м. м. без кратних характеристичних коренів, а їх об'єднання міститься у множині K_3. В роботі [12] (див. також [13]) доведено у загальному випадку теорему, анонсовану в [10] для квадратичних м. м. При цьому суттєво використано результат роботи [9]. Так, одержано ще одну множину K_4 розкладних м. м., степені елементарних дільників яких не перевищують два. В роботі [14] одержано результат відносно розкладності на лінійні множники м. м., один із елементарних дільників якої має степінь три, а степені решти не перевищують два. Цим виділено множину K_5 факторизовних у нашому розумінні м. м. Цей результат, як зазначено в роботі [14], покращити не можна, допускаючи наявність в м. м. більше ніж одного елементарного дільника степеня три або наявність елементарних дільників степеня більше ніж три. У зв'язку з цим виникає наступне питання: які додаткові умови повинна задовольняти м. м., степені елементарних дільників якої не перевищують три, щоб вона допускала розклад на лінійні множники ? Відповідь на це питання ми частково одержимо у п. 2.

У всіх множинах $K_1 - K_5$ бралися до уваги, в основному, лише степені елементарних дільників і, почасти, кратності характеристичних коренів м. м. Відмітимо у зв'язку з цим також роботу [15], в якій доведено теорему, що гарантує виділення із м. м. певної кількості лінійних множників, якщо сума степенів елементарних дільників вище ніж два не перевищує суми степеня м. м. та числа таких елементарних дільників (степеня вище ніж два).

Зрозуміло, що степені елементарних дільників та кратності характеристичних коренів м. м. — це далеко не повний перелік параметрів, від яких залежить розкладність м. м. на множники. Цією обставиною і пояснюється те, що матриця

$$\operatorname{diag}(x^s, x^s), \quad s \geq 3, \tag{2}$$

яка є найпростішим (до тривіальності) прикладом розкладної м. м., не належить до жодної із множин $K_1 - K_5$ і навіть до множини м. м., що досліджується у роботі [15] (позначимо цю множину через K_6). У даній роботі розглядаються також інші фактори, які впливають на мультиплікативну структуру м. м. (див. п. 2).

Можливість зображення у вигляді добутку лінійних множників м. м. з попарно комутуючими коефіцієнтами простої структури (множина K_7) доведено в [16].

Нарешті, у роботі [5] (див. також [2], § 9, роз. II) доводиться розкладність на лінійні множники унітального матричного двочлена $Ex^s - A$, якщо система елементарних дільників матриці A, що відповідає нульовому власному значенню, складається лише з підсистем, які мають або елементарні дільники тільки першого степеня, або s елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю. Множину таких розкладних двочленів позначимо через K_8.

***Зауваження* 1.** М. м. (2) належить перетину множин $K_7 \bigcap K_8$.

Що стосується нерозкладних м. м., то, як показано в роботі [5] (див. також [2], § 11, розд. II), матричний двочлен $Ex^s + A$, де A — нільпотентна матриця порядку n індексу нільпотентності n (або, що те ж саме, рангу $n-1$), не можна зобразити у вигляді добутку щонайменше двох унітальних множників. У п. 3 цю множину нерозкладних м. м. дещо розширено.

***Зауваження* 2.** Матричний двочлен $Ex^s + A$, про нерозкладність якого йде мова в [2] (§ 11, розд. II), розглядається над довільним алгебраїчно замкненим полем. Деякі із одержаних в цій роботі результатів також можна перенести на випадки загальніших полів. Але для простоти викладу будемо припускати основним поле комплексних чисел $\mathbf{C}$.

2. Розкладні многочленні матриці. Нехай м. м. $A(x)$ порядку n, записана у вигляді матричного многочлена (1), має попарно комутуючі коефіцієнти, тобто $A_i A_j = A_j A_i$, $i, j = 0, 1, \ldots, s$. Припустимо, що кожний нелінійний елементарний дільник матриці A_i, $i = 0, 1, \ldots, s$, взаємно простий зі всіма іншими елементарними дільниками цієї матриці. Іншими словами, якщо α — кратне власне значення матриці A_i, то або всі елементарні дільники, що відповідають цьому власному значенню, лінійні, або існує лише один (нелінійний) елементарний дільник з цим власним значенням. В останньому випадку $\operatorname{rank}(E\alpha - A_i) = n-1$. До виділеної таким чином множини м. м. належать, очевидно, м. м. з попарно комутуючими коефіцієнтами квазіпростої структури.

Теорема 1. *Нехай унітальна м. м. задовольняє наступні умови*:

1) *коефіцієнти попарно комутують*;

2) *кожний нелінійний елементарний дільник кожної матриці-коефіцієнта взаємно простий зі всіма іншими його елементарними дільниками.*
Якщо степені елементарних дільників м. м. не перевищують три, *то така м. м. розкладається в добуток лінійних унітальних попарно комутуючих множників*.

Перед доведенням цієї теореми сформулюємо деякі допоміжні твердження, які мають і самостійне значення.

Лема 1. *Унітальна м. м., яка задовольняє умови* 1, 2 *теореми* 1, *одночасним перетворенням подібності її коефіцієнтів зводиться до прямої суми* $k \geq 1$ *трикутних однакового найменування теплицевих м. м.*, *неодиничні порядки яких не менші за мінімальний і не більші за максимальний із степенів нелінійних елементарних дільників матриць-коефіцієнтів цієї м. м.*

Доведення. Якщо всі коефіцієнти м. м. (1) мають просту структуру, то доведення є очевидним, оскільки згідно з відомою теоремою лінійної алгебри (див. [17], наслідок 3, § 2, гл. VIII) всі коефіцієнти можуть бути одночасно діагоналізовані одним перетворенням подібності. В іншому разі фіксуємо в м. м. (1) коефіцієнт, що має нелінійний елементарний дільник мінімального степеня. Нехай це буде матриця A_1. Застосовуємо до м. м. (1) перетворення подібності за допомогою матриці T такої, що

$$TA_1T^{-1} = J_1 \oplus \bar{A}_1,$$

де J_1 — верхня (нижня) жорданова клітина, що відповідає нелінійному елементарному дільнику мінімального степеня. Тоді м. м. набере вигляду

$$TA(x)T^{-1} = B_1(x) \oplus \bar{B}_1(x),$$

де $B_1(x)$ — теплицева м. м., що має верхню (нижню) трикутну форму і розмір, рівний розміру клітини Жордана J_1. Блок $\bar{B}_1(x)$, можливо, є порожнім. Тоді все доведено. В іншому разі м. м. $\bar{B}_1(x)$ задовольняє всі умови даної леми і, отже, застосовуючи до неї ті ж міркування, ми, не порушуючи перший доданок, отримуємо виділення із неї теплицевого прямого доданка верхньої (нижньої) трикутної форми, порядок якого не менший за порядок першого доданка. Продовжуючи так і далі, приходимо до розкладу м. м. $A(x)$ у пряму суму верхніх (нижніх) трикутних теплицевих м. м., неодиничні порядки яких знаходяться у вказаних у лемі межах.

Лема 2. *Унітальна трикутна теплицева м. м. з не менш ніж двома різними характеристичними коренями розкладається на унітальні трикутні того ж найменування теплицеві попарно комутуючі множники, кожний з яких має лише один (без урахування кратності) характеристичний корінь.*

Доведення. Нехай задано унітальну м. м. вигляду

$$F(x) = \begin{Vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_{k-1}(x) & f_k(x) \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & f_1(x) & f_2(x) \\ 0 & & & f_1(x) \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

де $\deg f_1(x) \geq 2$. Досить показати можливість виділення вліво із цієї матриці унітального теплицевого множника, що має верхню трикутну форму та лише один характеристичний корінь, і застосувати індукцію за числом попарно різних характеристичних коренів м. м. $F(x)$.

Нехай α – корінь кратності l многочлена $f_1(x)$, що знаходиться на головній діагоналі матриці (3). Тоді $f_1(x) = (x-\alpha)^l \bar{f}_1(x)$ і можна отримати розклад

$$F(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (x-\alpha)^l \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_{k-1}(x) & f_k(x) \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & f_1(x) & f_2(x) \\ 0 & & & \bar{f}_1(x) \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\bar{f}_1(\alpha) \neq 0$, то існує такий многочлен $c_1(x)$, $\deg c_1(x) < l$, що

$$f_2(x) - c_1(x)\bar{f}_1(x) = (x-\alpha)^l \bar{f}_2(x)$$

для деякого многочлена $\bar{f}_2(x)$, $\deg \bar{f}_2(x) < \deg f_1(x) - l$. Тоді існує розклад

$$F(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (x-\alpha)^l & c_1(x) \\ 0 & & & & (x-\alpha)^l \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccccc} f_1(x) & \ldots & f_{k-2}(x) & f_{k-1}(x) & f_k(x) \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ & & & \overline{f}_1(x) & \overline{f}_2(x) \\ 0 & & & & \overline{f}_1(x) \end{array} \right\|. \quad (4)$$

Оскільки знайдеться многочлен $c_2(x)$, $\deg c_2(x) < l$, такий, що виконується умова

$$f_3(x) - c_1(x)\,\overline{f}_2(x) - c_2(x)\,\overline{f}_1(x) = (x-\alpha)^l\,\overline{f}_3(x)$$

для деякого $f_3(x) \in \mathbf{C}[x]$, $\deg \overline{f}_3(x) < \deg f_1(x) - l$, то від (4) перейдемо до розкладу

$$F(x) = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & (x-\alpha)^l & c_1(x) & c_2(x) \\ & & & & (x-\alpha)^l & c_1(x) \\ 0 & & & & & (x-\alpha)^l \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cccccc} f_1(x) & \ldots & f_{k-3}(x) & f_{k-2}(x) & f_{k-1}(x) & f_k(x) \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ & & & \overline{f}_1(x) & \overline{f}_2(x) & \overline{f}_3(x) \\ & & & & \overline{f}_1(x) & \overline{f}_2(x) \\ 0 & & & & & \overline{f}_1(x) \end{array} \right\|.$$

Продовжуючи далі за індукцією, одержуємо розклад

$$F(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} (x-\alpha)^l & c_1(x) & \ldots & c_{k-1}(x) \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & (x-\alpha)^l & c_1(x) \\ 0 & & & (x-\alpha)^l \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} \overline{f}_1(x) & \overline{f}_2(x) & \ldots & \overline{f}_k(x) \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & \overline{f}_1(x) & \overline{f}_1(x) \\ 0 & & & \overline{f}_1(x) \end{array} \right\|$$

з комутуючими множниками. Зауважимо, що деякі з многочленів $c_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots, k-1$, або навіть всі одночасно, можливо, тотожно дорівнюють нулю.

Лема 3. *Унітальна верхня (нижня) трикутна теплицева м. м., всі характеристичні корені якої рівні між собою і всі елементарні дільники якої мають степені не вище ніж три, розкладається в добуток унітальних трикутних того ж найменування теплицевих комутуючих множників.*

Доведення випливає з наступної леми.

Лема 4. *Нелінійна унітальна верхня трикутна м. м. порядку* n, *що задовольняє умови леми* 3, *або має степінь два і вигляд*

$$\left\|\begin{matrix} (x-\alpha)^2 & 0 & \ldots & 0 & a_1(x-\alpha) & \ldots & a_k(x-\alpha) \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & (x-\alpha)^2 & 0 & \ldots & 0 & a_1(x-\alpha) \\ & & & (x-\alpha)^2 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & (x-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & & & & & & (x-\alpha)^2 \end{matrix}\right\|,$$

де $k = [n/2]$ (*ціла частина*), $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$, *або має степінь три та вигляд*

$$\operatorname{diag}\left((x-\alpha)^3, \ldots, (x-\alpha)^3\right).$$

Доведення. Те, що степінь м. м. із вказаними в лемі властивостями не перевищує три, не викликає сумніву. Безпосереднім підрахунком переконуємося, що всі елементарні дільники таких матриць мають степені не вище ніж три (у другому випадку це очевидно). З іншого боку, якщо одна із наддіагоналей матриці містить ненульовий елемент поля $\mathbf{C}$ або ж одна із перших $n-[n/2]-1$ наддіагоналей не дорівнює тотожно нулю, то, як легко переконатися, степені деяких елементарних дільників такої матриці перевищують три.

***Доведення теореми* 1.** Нехай м. м. (1) задовольняє умови теореми 1. Тоді згідно з лемою 1 існує зображення

$$TA(x)\,T^{-1} \;=\; \bigoplus_i B_i(x), \quad i \geq 1,$$

де $B_i(x)$ — унітальна верхня (нижня) трикутна теплицева м. м. За лемою 2 для кожного i маємо

$$B_i(x) \;=\; \prod_{j_i} B_{ij_i}(x), \quad j_i \geq 1,$$

де $B_{ij_i}(x)$ – унітальні верхні (нижні) трикутні теплицеві попарно комутуючі м. м., що мають по одному характеристичному кореню. Нарешті, враховуючи те, що система елементарних дільників блочно-діагональної м. м. є об'єднанням систем елементарних дільників діагональних блоків (див. [17], теорема 5, § 3, гл. VI) і канонічна діагональна форма множника ділить канонічну діагональну форму добутку (див. [18]), можемо застосувати до кожної із м. м. $B_{ij_i}(x)$ лему 3, в результаті чого дістанемо можливість розкладу

$$TA(x)\,T^{-1} \;=\; \bigoplus_i \left(\prod_{j=1}^{s} B_{ij}(x)\right),$$

де $B_{ij}(x)$ – унітальні верхні (нижні) трикутні лінійні теплицеві м. м., причому матриці $B_{i1}(x), \ldots, B_{is}(x)$ попарно комутують (для кожного i). Тому

$$TA(x)\,T^{-1} \;=\; \prod_{j=1}^{s}\left(\bigoplus_i B_{ij}(x)\right),$$

де

$$\underset{i}{\oplus} B_{i1}(x), \ldots, \underset{i}{\oplus} B_{is}(x)$$

— попарно комутуючі унітальні лінійні м. м. Тоді

$$A(x) = \prod_{j=1}^{s} \left(T^{-1} \left(\underset{i}{\oplus} B_{ij}(x) \right) T \right),$$

де

$$T^{-1} \left(\underset{i}{\oplus} B_{i1}(x) \right) T, \ldots, T^{-1} \left(\underset{i}{\oplus} B_{is}(x) \right) T$$

— лінійні унітальні попарно комутуючі м. м.

Теорему 1 доведено.

Із доведення теореми 1, яка дає умови існування розкладів м. м. на лінійні множники, випливає наслідок, що описує структуру та властивості таких розкладів.

Наслідок. *Набір попарно комутуючих лінійних унітальних множників, в добуток яких розкладається м. м., що задовольняє умови теореми* 1, *одночасним перетворенням подібності зводиться до однакового блочно-діагонального вигляду з* $k \geq 1$ *діагональними блоками. При цьому кожний діагональний блок або має порядок* 1, *або є верхньою* (*нижньою*) *трикутною теплицевою матрицею, порядок якої не менший за мінімальний і не більший за максимальний із степенів нелінійних елементарних дільників матриць-коефіцієнтів початкової м. м.*

Варто зазначити, що теорему 1 не можна покращити через послаблення умови обмеження для степенів елементарних дільників м. м., наприклад, до рівня чотири, про що свідчить наступний приклад.

***Приклад* 1.** Матриця

$$\begin{Vmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & x^2 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

з комутуючими коефіцієнтами квазіпростої структури та єдиним елементарним дільником є нерозкладною.

Наступна теорема, як і теорема 1, також виділяє множину, яка доповнює перелік відомих множин розкладних м. м.

Теорема 2. *Нехай деякий коефіцієнт унітальної м. м комутує з усіма іншими її коефіцієнтами і має лише один елементарний дільник. Якщо степені елементарних дільників м. м. не перевищують три, то вона розкладається в добуток лінійних унітальних попарно комутуючих множників.*

Доведення. Нехай в м. м. $A(x)$ (1) матрицею-коефіцієнтом, що комутує зі всіма іншими коефіцієнтами і має лише один елементарний дільник, без обмеження загальності є матриця A_1. Застосуємо до м. м. $A(x)$ перетворення подібності, яке зводить до верхньої форми Жордана матрицю A_1:

$$PA(x)P^{-1} = Ex^s + \overline{A}_1 x^{s-1} + \overline{A}_2 x^{s-2} + \ldots + \overline{A}_s,$$

де

$$\overline{A}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, матриця $\bar{A}_1$ комутує з усіма матрицями $\bar{A}_i$, $i = 2, \ldots, s$. Тому на підставі результатів [17] (§ 2, гл. VIII) кожна із матриць $\bar{A}_i$, а отже м. м. $PA(x)P^{-1}$ в цілому, має верхню трикутну теплицеву форму

$$PA(x)P^{-1} = \begin{Vmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \ldots & g_n(x) \\ & g_1(x) & \ldots & g_{n-1}(x) \\ & & \ldots & \\ 0 & & & g_1(x) \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Матриця (6) або задовольняє умови леми 3, або, згідно з лемою 2, розкладається в добуток множників, що задовольняють умови леми 3. В кожному із цих випадків маємо розкладність матриці (6) і, отже, матриці $A(x)$ у добуток лінійних унітальних попарно комутуючих множників.

Теорему доведено.

Таким чином, множини м. м., які задовольняють умови теорем 1 та 2 (позначимо їх відповідно через K_9 і K_{10}), доповнюють наведений у вступі перелік відомих множин $K_1 - K_8$ розкладних м. м. Зазначимо, що належність до них, так само як до множин із вищевказаного переліку, визначається за зовнішніми ознаками (степенями елементарних дільників м. м. та її коефіцієнтів, комутативністю коефіцієнтів). Звернемо увагу, що множини K_1, K_{10}, а також K_7, K_{10} не перетинаються: $K_1 \cap K_{10} = \varnothing$, $K_7 \cap K_{10} = \varnothing$. Крім того,

$$K_0 \cap K_7 \cap K_8 \cap K_9 \neq \varnothing, \qquad K_2 \cap K_8 \cap K_9 \cap K_{10} \neq \varnothing.$$

Підтвердженням цього є наступний приклад.

Приклад 2. $A(x) = \begin{Vmatrix} x^2-1 & 0 \\ 0 & x^2-4 \end{Vmatrix}$, $B(x) = \begin{Vmatrix} x^2-4 & 1 \\ 0 & x^2-4 \end{Vmatrix}$,

$$A(x) \in K_0 \cap K_7 \cap K_8 \cap K_9, \qquad B(x) \in K_2 \cap K_8 \cap K_9 \cap K_{10}.$$

З іншого боку, кожен із перетинів $K_7 \cap K_8 \cap K_9$ і $K_8 \cap K_9 \cap K_{10}$ не міститься цілком в обхоплюваній множині $K_6 \supset K_5 \supset K_4 \supset K_3 \supset (K_2 \cup K_1)$. Основою для такого твердження є наступний приклад.

Приклад 3. $C(x) = \begin{Vmatrix} x^3 & 0 \\ 0 & x^3 \end{Vmatrix}$, $D(x) = \begin{Vmatrix} x^3-1 & 1 & 0 \\ 0 & x^3-1 & 1 \\ 0 & 0 & x^3-1 \end{Vmatrix}$,

$$C(x) \in K_7 \cap K_8 \cap K_9, \qquad D(x) \in K_8 \cap K_9 \cap K_{10},$$

$$C(x) \notin K_6, \quad D(x) \notin K_6.$$

3. Нерозкладні многочленні матриці. Задамося далі питанням пошуку множин нерозкладних м. м.

Якщо проаналізувати отриманий після доповнення перелік множин розкладних м. м., то неважко зауважити, що всі вони, за винятком K_{10}, перетинаються з множиною K_0 м. м. без кратних характеристичних коренів. Ця обставина наводить на думку, що нерозкладні м. м. займають, в деякому розумінні, „протилежну позицію” до множини K_0. Однією із таких „протилежних”, до певної міри, є множина м. м., які мають лише один елементарний дільник.

Прикладом нерозкладної матриці з цієї множини є матриця (5). Однак у цій множині містяться також і розкладні м. м.

***Приклад* 4.** Матриця

$$\begin{Vmatrix} x^2 - x & 0 \\ -x & x^2 + x + 1 \end{Vmatrix}$$

має єдиний елементарний дільник і допускає розклад на лінійні множники:

$$\begin{Vmatrix} x^2 - x & 1 \\ -x & x^2 + x + 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x - 1 & 1 \\ -1 & x + 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{Vmatrix}.$$

Справджується наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай деякий коефіцієнт унітальної м. м. комутує з усіма іншими її коефіцієнтами і має лише один елементарний дільник. Якщо ця м. м. має лише один елементарний дільник, то вона нерозкладна.*

Доведення. Якщо м. м. $A(x)$ (1) задовольняє умови теореми, то існує перетворення подібності, яке зводить її до вигляду

$$PA(x)P^{-1} = \begin{Vmatrix} (x-\alpha)^s & h_1(x) & \dots & h_{n-1}(x) \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & (x-\alpha)^s & h_1(x) \\ 0 & & & (x-\alpha)^s \end{Vmatrix} = \bar{A}(x),$$

де $h_1(\alpha) \neq 0$. Нехай $\bar{A}_*(x)$ — взаємна (приєднана) до матриці $\bar{A}(x)$, тобто $\bar{A}_*(x) = \operatorname{adj} \bar{A}(x)$. Остання, очевидно, має вигляд

$$\bar{A}_*(x) = \begin{Vmatrix} (x-\alpha)^{s(n-1)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (x-\alpha)^{s(n-1)} \end{Vmatrix}.$$

Побудуємо матриці

$$A_{(r-1)}(x) = \bar{A}_*(x)\begin{Vmatrix} E & xE & \dots & x^{r-1}E \end{Vmatrix}, \quad r = 1, 2, \dots, s-1, \quad A_{(0)}(x) = A_*(x),$$

і

$$M_{A_{(r-1)}(x)}\Big((x-\alpha)^{rn}\Big) = \begin{Vmatrix} A_{(r-1)}(\alpha) \\ A^{(1)}_{(r-1)}(\alpha) \\ \dots \\ A^{(rn-1)}_{(r-1)}(\alpha) \end{Vmatrix}, \quad r = 1, 2, \dots, s-1,$$

де $A^{(t)}_{(r-1)}(\alpha)$, $t = 1, \dots, rn-1$, — значення t-ї похідної матриці $A_{(r-1)}(x)$ при $x = \alpha$. У випадку $s(n-1) > rn - 1$ всі стовпці з номерами $1, n+1, \dots, (r-1)n + 1$ матриці $M_{A_{(r-1)}(x)}\Big((x-\alpha)^{rn}\Big)$ нульові. Тому

$$\operatorname{rank} M_{A_{(r-1)}(x)}\Big((x-\alpha)^{rn}\Big) < rn, \quad r = 1, 2, \dots, s-1.$$

Якщо $s(n-1) \le rn - 1$, то вищевказані стовпці утворюють підматрицю, яка містить не більше ніж $rn - s(n-1)$ ненульових рядків. Але через те, що $r > rn - s(n-1)$, всі ці стовпці лінійно залежні. Отже, і в цьому випадку для всіх $r = 1, 2, \ldots, s-1$ ранг матриці $M_{A_{(r-1)}(x)}\left((x-\alpha)^{rn}\right)$ менший за rn. Цей факт на основі теореми 2 з § 2, розд. III [2] дає підстави стверджувати відсутність у матриці $\bar{A}(x)$ лівого регулярного дільника степеня r, $r = 1, 2, \ldots, s-1$, тобто матриця $\bar{A}(x)$, а отже і матриця $A(x)$, насправді нерозкладна.

Теорему доведено.

Очевидно, встановлена теоремою 3 множина нерозкладних м. м. включає в себе множину, про яку йдеться у вступі (див. [5]).

Отримані результати можна застосувати до розв'язування матричних многочленних рівнянь, матричного рівняння Ріккаті (у випадку неособливого старшого коефіцієнта) та до розв'язування систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. – 1956. – **38**, № 2. – С. 3 – 7.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
3. *Gohberg I., Lankaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, 1982. – 409 p.
4. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483 – 498.
5. *Казимирский П. С., Урбанович М. Н.* О разложении матричного двучлена на множители // Там же. – 1973. – **24**, № 4. – С. 454 – 464.
6. *Маркус А. С., Мереуца И. В.* О некоторых свойствах простых λ-матриц // Мат. исслед. – 1975. – **10**, № 3. – С. 207 – 213.
7. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976 – С. 29 – 40.
8. *Сахнович Л. А.* О факторизации передаточных оператор-функций // Докл. АН СССР. – 1976. – **226**, № 4. – С. 781 – 784.
9. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – **8**. – С. 3 – 9.
10. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Одно достаточное условие разложимости матричного квадратного трехчлена на линейные множители // II Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Резюме сообщений. – Кишинев: Штиинца, 1974. – С. 29 – 30.
11. *Шаваровский Б. З.* Преобразования подобия матричных многочленов и их разложимость на множители: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1985. – 137 с.
12. *Крупник И. Н.* О разложении матричного пучка на линейные множители // Мат. заметки. – 1991. – **49**, № 2. – С. 95 – 101.
13. *Krupnik I.* Decomposition of a monic polynomial into a product of linear factors // Linear Algebra and Appl. – 1992. – **167**. – P. 239 – 242.
14. *Шаваровский Б. З.* О разложимых многочленных матрицах // Мат. заметки. – 2000. – **68**, № 4. – С. 593 – 607.
15. *Петричкович В. М.* Про кратності характеристичних коренів, степені елементарних дільників і факторизацію многочленних матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 7 – 17.
16. *Зелиско В. Р., Шаваровский Б. З.* Разложение матричного многочлена в произведение множителей простой структуры // Там же. – 1982. – **15**. – С. 43 – 48.
17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
18. *Newman M.* On the Smith normal form // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1971. – **75**. – P. 81 – 84.

Одержано 23.03.07,
після доопрацювання — 25.05.10