УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЦІЛИМИ ФУНКЦІЯМИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Exact-order estimates for approximations of functional classes $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ by entire functions of a special form are obtained.

Получены точные по порядку оценки приближений функциональных классов $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ с помощью целых функций специального вида.

У роботі досліджуються питання найкращого наближення класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних, які задано на $\mathbb{R}^d$. Дані класи функцій вивчав Т. І. Аманов [1], який встановив теореми зображення функцій із цих класів, а також деякі теореми вкладення. Подальше дослідження класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ було продовжено в статті П. І. Лізоркіна та С. М. Нікольського [2], де отримано так зване декомпозиційне зображення норми функцій із цих класів та вивчено окремі питання наближення цілими функціями експоненціального типу. Наступний етап у дослідженні класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ пов'язаний з роботою Wang Heping та Sun Yongsheng [3], в якій встановлено порядки найкращого наближення функцій із класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу, носій перетворення Фур'є яких зосереджений на множині, що називається східчастим гіперболічним хрестом. Суттєвим при цьому було використання декомпозиційного зображення норми функцій із даних класів.

У даній роботі продовжено вивчення апроксимативних характеристик функцій із класів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ з метою знаходження їхніх порядків.

1. Означення класів функцій та апроксимативних характеристик. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$, $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Нехай, далі, $e_d := \{1, 2, \dots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e = \{j_1, \dots, j_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant d$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_m \leqslant d$, $e \subset e_d$. Задамо невід'ємний вектор $r^e = (r_{j_1}, \dots, r_{j_m})$ і $\bar{r}^e := (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_d)$, де

$$\bar{r}_i = \begin{cases} r_i, & i \in e, \\ 0, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Для функції $f(x)$, заданої на $\mathbb{R}^d$, визначимо різницю 1-го порядку з кроком h за змінною x_j таким чином:

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x)$$

і, відповідно, l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^l_{h_j,j} f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \ldots \Delta_{h,j}}^{l} f(x).$$

Нехай задано вектор $h = (h_1, \ldots, h_d),\ h_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,d}$, та вектор $k = (k_1, \ldots, k_d)$ з цілими невід'ємними координатами, тобто $k_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,d}$. Тоді мішана різниця k-го порядку з векторним кроком h визначається співвідношенням

$$\Delta^k_h f(x) = \Delta^{k_1}_{h_1,1} \Delta^{k_2}_{h_2,2} \ldots \Delta^{k_d}_{h_d,d} f(x).$$

Класи $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, де r — заданий вектор із невід'ємними координатами, означаються таким чином (див. [1, 2]):

1) якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, то

$$S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d) = S^r_{p,\theta}B = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{S^r_{p,\theta}B} \leqslant 1 \Big\},$$

де норма задається рівністю

$$\|f\|_{S^r_{p,\theta}B} = \sum_{e \subset e_d} \left(\int\limits_0^2 \ldots \int\limits_0^2 \prod_{j \in e} h_j^{-\theta r_j - 1} \|\Delta^{k^e}_{h^e} f(\cdot)\|^\theta_p \prod_{j \in e} dh_j \right)^{\frac{1}{\theta}}; \tag{1}$$

2) якщо $\theta = \infty$, то

$$S^r_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d) = S^r_{p,\infty}B = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{S^r_{p,\infty}B} \leqslant 1 \Big\}$$

і

$$\|f\|_{S^r_{p,\infty}B} = \sum_{e \subset e_d} \sup_{h > 0} \prod_{j \in e} h_j^{-r_j} \|\Delta^{k^e}_{h^e} f(\cdot)\|_p, \tag{2}$$

де $k_j > r_j,\ j = \overline{1,d}$. Зазначимо, що класи функцій $S^r_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ збігаються з класами S^r_pH, які були введені С. М. Нікольським в [4].

У подальшому будемо вважати, що координати вектора $r = (r_1, \ldots, r_d)$ впорядковано так: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_d$. Вектору $r = (r_1, \ldots, r_d)$ поставимо у відповідність вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j / r_1,\ j = \overline{1,d}$, а вектору γ — вектор γ', де $\gamma'_j = \gamma_j$, якщо $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j,\ \ j = \overline{\nu+1,d}$.

Для кожного вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(s) := \big\{ k = (k_1, \ldots, k_d) : \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1,d} \big\}$$

і розглянемо множину

$$Q_{2^s} := \big\{ \lambda \in \mathbb{R}^d :\ \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j},\ \ j = \overline{1,d} \big\},$$

в якій $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1,\ t > 0$.

Отже, для $\rho(s)$ і Q_{2^s} можемо записати співвідношення $\rho(s) = Q_{2^s} \cap \mathbb{Z}^d$.

Крім того, будемо використовувати перетворення Фур'є (див., наприклад, [5]) функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d),\ 1 < q < \infty$, і щоб навести його означення, нам будуть потрібні узагальнені функції.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір основних функцій Л. Шварца (див., наприклад, [6], гл. 2). Через S' позначимо простір лінійних функціоналів над S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi \rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi : S \to S$ визначається за формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) e^{-i(\lambda,t)} dt \equiv \widetilde{\varphi}(\lambda),$$

де $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $t = (t_1, \ldots, t_d)$ і $(\lambda, t) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i t_i$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$ векторів λ і $t \in \mathbb{R}^d$.

Обернене перетворення Фур'є задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\lambda) e^{i(\lambda,t)} d\lambda \equiv \widehat{\varphi}(t).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle,$$

де $f \in S'$, а $\varphi \in S$.

Обернене перетворення узагальнених функцій також позначимо $\mathfrak{F}^{-1}f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Зазначимо, що для кожного $1 < p < \infty$ існує природне неперервне вкладення L_p в S' і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Носієм функції f будемо називати замикання множини точок, де вона не дорівнює нулю, і позначатимемо $\operatorname{supp} f$.

Введемо апроксимативну характеристику, яку далі будемо досліджувати.

Розглянемо множину $\mathfrak{M}$, яка складається з векторів $s = (s_1, \ldots, s_d)$ із цілочисловими координатами.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d),\ 1 < q < \infty$, покладемо

$$S^{\mathfrak{M}}(f, x) = \sum_{s \in \mathfrak{M}} \delta_s^*(f, x),$$

де

$$\delta_s^*(f, x) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f \cdot \chi_{Q_{2^s}}),$$

і χ_A – характеристична функція множини A.

Таким чином ми визначили цілу функцію $S^{\mathfrak{M}}(f, x)$, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ [5], носій перетворення Фур'є якої зосереджений на множині, $\mathfrak{N} = \bigcup_{s \in \mathfrak{M}} Q_{2^s}$, тобто $\operatorname{supp} S^{\mathfrak{M}}(f, x) \subseteq \mathfrak{N}$.

Далі, для $f(x) \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо апроксимативну характеристику

$$e_M^{\mathfrak{F}}(f)_q = \inf_{\mathfrak{M} : \operatorname{mes} \bigcup\limits_{s \in \mathfrak{M}} Q_{2^s} \leqslant M} \| f(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f, \cdot) \|_q,$$

де $\operatorname{mes} A$ позначає лебегову міру множини A.

Якщо $K \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий клас функцій, то покладемо

$$e_M^{\mathfrak{F}}(K)_q = \sup_{f\in K} e_M^{\mathfrak{F}}(f)_q.$$

Нагадаємо означення ще однієї апроксимативної характеристики, що розглядалася в роботі [3].

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, позначимо

$$S_n^{\gamma}(f,x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta_s^*(f,x) \tag{3}$$

і зазначимо, що $S_n^{\gamma}(f,x)$ — ціла функція з носієм, зосередженим на множині $Q_n^{\gamma} = \bigcup_{(s,\gamma)<n} Q_{2^s}$. Множина Q_n^{γ} називається східчастим гіперболічним хрестом і при цьому $\operatorname{mes} Q_n^{\gamma} \asymp 2^n n^{d-1}$ (див., наприклад, [2]).

Для $f(x) \in L_q(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\mathcal{E}_n^{\gamma}(f)_q = \|f(\cdot) - S_n^{\gamma}(f,\cdot)\|_q$$

і, відповідно, для функціонального класу $K \subset L_q(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{E}_n^{\gamma}(K)_q = \sup_{f\in K} \mathcal{E}_n^{\gamma}(f)_q.$$

2. Допоміжні твердження. Для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \leqslant C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$.

У подальших міркуваннях нам буде зручно користуватися іншим зображенням норм (1) та (2). При цьому нерівності між векторами будемо розуміти покоординатно і, зокрема, запис $r > 0$ означає, що всі координати вектора r є додатними, а запис $s \geqslant 0$ — що всі координати вектора s невід'ємні.

Теорема А [2]. *Нехай задано* $1 < p < \infty$, $r > 0$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in S^r_{p,\theta}B$, $1 \leqslant \theta < \infty$, *маємо*

$$\|f\|_{S^r_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{s\geqslant 0} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

і якщо $\theta = \infty$, *то*

$$\|f\|_{S^r_{p,\infty}B} = \|f\|_{S^r_p H} \asymp \sup_{s\geqslant 0} 2^{(s,r)} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p.$$

Теорема Б (Літтлвуда – Пелі) (див., наприклад, [7, с. 81]). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_1, C_2 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_1\|f\|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{s\geq 0} |\delta_s^*(f,\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant C_2\|f\|_p.$$

Теорема В [3]. *Якщо* $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *і* $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, *то*

$$\mathcal{E}_n^{\gamma}(S^r_{p,\theta}B)_q \asymp 2^{-n(r_1-1/p+1/q)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)_+},$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Теорема Г [3]. *Нехай* γ *і* γ' — *вектори, які задаються таким чином*: $1 = \gamma_1 = = \gamma'_1 = \ldots = \gamma_\nu = \gamma'_\nu$ *і* $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1, d}$, $1 \leqslant \nu \leqslant d$, $r = r_1 \cdot \gamma$. *Тоді для* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *має місце співвідношення*

$$\mathcal{E}_n^{\gamma'}(S^r_{p,\theta}B)_p \asymp \begin{cases} 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)_+} & \textit{при} \quad 1 < p \leqslant 2, \\ 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} & \textit{при} \quad 2 < p < \infty. \end{cases}$$

Сформулюємо також два твердження, які для періодичних функцій були встановлені в [8, с. 25 – 28] і мають місце для функцій $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$.

Лема А [3]. *Нехай задано* $1 < p < q < \infty$ *і* $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. *Тоді*

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_{s \geqslant 0} \|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p^q 2^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

де $\|s\|_1 = \sum_{j=1}^d s_j$.

Як було показано у роботі [8, с. 28], має місце і двоїсте твердження.

Лема Б. *Нехай задано* $1 < q < p < \infty$ *і* $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. *Тоді*

$$\|f\|_q \gg \left(\sum_{s \geqslant 0} \|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p^q 2^{q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

3. Основні результати. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $r_1 > 1/p - 1/q$. *Тоді для* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *справджується порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_q \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \tag{6}$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Доведення. Спочатку отримаємо в (6) оцінку зверху. Зазначимо, що у випадку $\theta \geqslant q$ дана оцінка випливає з відповідної оцінки наближення класів $S^r_{p,\theta}B$ цілими функціями вигляду

$$S_n^{\gamma}(f,x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta^*_s(f,x)$$

за умови, що числа n підібрано із співвідношення $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Відповідний результат був отриманий в теоремі В.

Тому отримаємо оцінку зверху у випадку $1 \leqslant \theta \leqslant q$.

Зазначимо, що при цьому ми будемо використовувати деякі міркування з роботи [9], де розглядалися аналогічні питання у періодичному випадку.

Нехай $f \in S^r_{p,\theta}B$, $1 \leqslant \theta < q$. За числом M підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ і покладемо $n_0 = [n + (\nu-1)\log n]$, де $[a]$ — ціла частина числа a.

Побудуємо множину $\mathfrak{N}$ і, відповідно цілу функцію $S^{\mathfrak{M}}(f,x)$, за допомогою якої будемо виконувати наближення функції $f \in S^r_{p,\theta}B$.

Спочатку включимо в $\mathfrak{N}$ множину $Q^\gamma_n = \bigcup_{(s,\gamma)<n} Q_{2^s}$, а далі будемо розширювати її за рахунок включення допустимої кількості множин Q_{2^s}, $l \leqslant (s,\gamma) < l+1$ і $n \leqslant l < n_0$.

Кожному $l \in \mathbb{N},\ n \leqslant l < n_0$ поставимо у відповідність величину

$$S_l = \left(\sum_{l \leqslant (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta^*_s(f,\cdot)\|^\theta_p \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{7}$$

і покладемо

$$m_l = [2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S^\theta_l] + 1.$$

Нехай, далі, $a_i(f,l),\ i = 1,2,\ldots$, позначають числа $\|\delta^*_s(f,\cdot)\|_p$, які входять у (7) у порядку спадання. Зазначимо, що з (7) випливає співвідношення

$$a_i(f,l) \ll i^{-\frac{1}{\theta}} 2^{-lr_1} S_l.$$

Тепер із суми $\sum_{l \leqslant (s,\gamma) < l+1} \delta^*_s(f,x)$ виберемо m_l блоків $\delta^*_s(f,x)$, які відповідають першим m_l числам $a_i(f,l)$, чим задамо також m_l множин Q_{2^s}. Дані множини породжуються m_l векторами s, які відповідають вибраним $\delta^*_s(f,x)$. Виконавши цю процедуру для кожного $l \in [n, n_0)$, $l \in \mathbb{N}$, отримаємо набір множин Q_{2^s}, а разом з тим і множину векторів s, яку позначимо через $\mathfrak{M}_l$. Відповідно позначимо $\widetilde{Q}_l = \bigcup_{s \in \mathfrak{M}_l} Q_{2^s}$. Отже, $\mathfrak{N} = Q^\gamma_n \cup \widetilde{Q}_l$, і функцію $S^{\mathfrak{M}}(f,x)$ виберемо таким чином:

$$S^{\mathfrak{M}}(f,x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta^*_s(f,x) + R(x),$$

де $R(x) = \sum_{s \in \mathfrak{M}_l} \delta^*_s(f,x)$, тобто $\operatorname{supp} R(x) \subseteq \widetilde{Q}_l$.

Покажемо, що $\operatorname{mes} \mathfrak{N} \ll M$.

Скориставшись співвідношенням (див., наприклад, [8, c. 11])

$$\sum_{(s,\gamma)<n} 2^{(s,1)} \ll 2^n n^{\nu-1},$$

а також врахувавши вибір чисел m_l, будемо мати

$$mes\, \mathfrak{N} \ll 2^n n^{\nu-1} + \sum_{l=n}^{n_0} 2^l m_l \ll 2^n n^{\nu-1} +$$

$$+ 2^n n^{\nu-1} \sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l \leqslant (s,\gamma) < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta^*_s(f,\cdot)\|^\theta_p \ll$$

$$\ll 2^n n^{\nu-1} + 2^n n^{\nu-1} \|f\|^\theta_{S^r_{p,\theta}B} \ll 2^n n^{\nu-1} \asymp M.$$

Тепер перейдемо безпосередньо до встановлення оцінки наближення.

Нехай $\widetilde{\mathfrak{M}}_l$ позначає множину тих векторів $s : n \leqslant (s,\gamma) < n_0$, для яких $\delta^*_s(f,x)$ не попали в $R(x)$. Тоді для $f(x) \in S^r_{p,\theta}B$ отримаємо

$$\|f(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_q = \|f(\cdot) - \sum_{(s,\gamma)<n_0} \delta^*_s(f,\cdot) + \sum_{s \in \widetilde{\mathfrak{M}}_l} \delta^*_s(f,\cdot)\|_q \leqslant$$

$$\leqslant \|f(\cdot) - \sum_{(s,\gamma)<n_0} \delta_s^*(f,\cdot)\|_q + \| \sum_{s\in\widetilde{\mathfrak{M}}_l} \delta_s^*(f,\cdot)\|_q = I_1 + I_2. \tag{8}$$

Згідно з теоремою В і вибором числа n_0 можемо записати

$$I_1 \ll 2^{-n_0(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \leqslant 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} n^{-(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{9}$$

Для оцінки I_2, скориставшись співвідношенням (4), а також врахувавши значення чисел $a_i(f,l)$, будемо мати

$$I_2 \ll \left(\sum_{l=n}^{n_0}\sum_{i>m_l}\left(a_i(f,l)2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{l=n}^{n_0}\sum_{i>m_l} a_i^\theta(f,l) a_i^{q-\theta}(f,l) 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q}\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0}\sum_{i>m_l} a_i^\theta(f,l) i^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \sum_{i>m_l} a_i^\theta(f,l)\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \sum_{l\leqslant(s,\gamma)<l+1} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(q-\theta)r_1} S_l^{q-\theta} 2^{l(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} 2^{-l\theta r_1} \sum_{l\leqslant(s,\gamma)<l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})q} S_l^{q-\theta} S_l^\theta\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{l=n}^{n_0} m_l^{-(q-\theta)/\theta} 2^{-l(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})q} S_l^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

Далі, підставивши в останню суму в (10) замість m_l їх значення, отримаємо

$$I_2 \ll (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n}^{n_0} 2^{-lq(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} S_l^\theta\right)^{\frac{1}{q}} = (2^n n^{\nu-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} I_3. \tag{11}$$

Для оцінки I_3 розглянемо два випадки:
1) $r_1 \geq \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{q} + \dfrac{1}{\theta}$;
2) $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < r_1 < \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{q} + \dfrac{1}{\theta}$.
У випадку 1

$$I_3 \leqslant 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^\theta\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \sum_{l\leqslant(s,\gamma)<l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}\|f\|^{\theta/q}_{S^r_{p,\theta}B} \leqslant 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{12}$$

Співставивши (10) – (12), отримаємо

$$I_2 \ll M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{13}$$

Нехай $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}<r_1<\dfrac{1}{p}-\dfrac{2}{q}+\dfrac{1}{\theta}$. Тоді

$$I_3 \leqslant 2^{-n_0(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}\left(\sum_{l=n}^{n_0} S_l^\theta\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{-n_0(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}\left(\sum_{l=n}^{n_0}\sum_{l\leqslant(s,\gamma)<l+1} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll 2^{-n_0(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}\|f\|^{\theta/q}_{S^r_{p,\theta}B} \leqslant 2^{-n(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})} n^{-(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{14}$$

Відповідно до (10), (11) і (14) отримаємо

$$I_2 \ll M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{15}$$

Насамкінець, підставивши по черзі оцінки (9) і (13), а потім (9) і (15) в (8), отримаємо оцінку для $e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_q$ у випадку $1\leqslant\theta<q$. Оцінку зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу, яку достатньо отримати для випадку $\nu=d$. При цьому будемо використовувати відоме співвідношення (див., наприклад, [10, с. 22]).

Нехай f — вимірна функція на $\mathbb{R}^d$, тоді

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)\,g(x)|dx,$$

де $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$.

Нехай $f\in S^r_{p,\theta}B$ і $S^{\mathfrak{M}}(f,x)$ — ціла функція, носій перетворення Фур'є якої міститься на множині $\mathfrak{N}=\bigcup_{s\in\mathfrak{M}} Q_{2^s}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{N}\leqslant M$. Зазначимо, що множина $\mathfrak{N}$ визначає множину векторів k з цілочисловими координатами, кількість яких не перевищує M.

Згідно з наведеним співвідношенням можемо записати

$$\|f(\cdot)-S^{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\big(f(x)-S^{\mathfrak{M}}(f,x)\big)g(x)\Big|dx. \tag{16}$$

Для $k\in\mathbb{N}^d$ розглянемо функцію

$$D_k(x)=\prod_{j=1}^d D_{k_j}(x_j),$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\left(2\sin\frac{x_j}{2}\cos\frac{2k_j+1}{2}x_j\right)x_j^{-1}$$

та

$$D_{\frac{1}{2}}(x_j) = D_0(x_j) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Тоді для перетворення Фур'є функції $D_k(x)$ можемо записати [3]

$$\mathfrak{F}D_k(x) = \chi_k(x) = \prod_{j=1}^{d}\chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j+1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x_j| = k_j \text{ або } |x_j| = k_j+1, \\ 0 & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x_j| = 1, \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_k(t) = D_k(x).$$

Підберемо число $l \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувались співвідношення $2^l l^{d-1} \asymp M$ і $2^l l^{d-1} \geqslant 2M$. Розглянемо функцію

$$F(x) = \sum_{(s,1)\leqslant l}\sum_{k\in\rho(s)} D_k(x),$$

і зазначимо, що $\operatorname{mes}\bigcup_{s:(s,1)\leqslant l} Q_{2^s} \asymp 2^l l^{d-1}$.

Використавши оцінку [3]

$$\|\delta_s^*(F,\cdot)\|_p = \left\|\sum_{k\in\rho(s)} D_k(\cdot)\right\|_p \asymp 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 < p < \infty, \tag{17}$$

у випадку $1 \leqslant \theta < \infty$ отримаємо

$$\|F\|_{S^r_{p,\theta}B} = \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s^*(F,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 2^{(s,r)\theta}\left\|\sum_{k\in\rho(s)} D_k(\cdot)\right\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 2^{(s,r)\theta}2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 2^{(s,1)(r_1+1-\frac{1}{p})\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{l(r_1+1-\frac{1}{p})}l^{(d-1)/\theta}.$$

Отже,

$$f_1(x) = C_3 2^{-l(r_1+1-\frac{1}{p})}l^{-(d-1)/\theta}F(x) \tag{18}$$

належить класу $S^r_{p,\theta}B$ з деякою сталою $C_3 > 0$.

Якщо ж $\theta = \infty$, то, використавши (17), отримаємо

$$\|F\|_{S^r_{p,\infty}B} = \sup_{(s,1)\leqslant l} 2^{(s,r)} \|\delta^*_s(F,\cdot)\|_p \ll 2^{l(r_1+1-\frac{1}{p})}$$

і тому функція

$$f_2(x) = C_4 2^{-l(r_1+1-\frac{1}{p})} F(x) \tag{19}$$

належить класу $S^r_{p,\infty}B$ з деякою сталою $C_4 > 0$.

Тепер покажемо, що функція

$$g(x) = C_5 2^{-l/q} l^{-(d-1)/q'} F(x) \tag{20}$$

з деякою константою $C_5 > 0$ задовольняє умову $\|g\|_{q'} \leqslant 1$.

Для цього необхідно встановити, що $\|F\|_{q'} \ll 2^{l/q} l^{(d-1)/q'}$, $1 < q' < \infty$.

Розглянемо два випадки.

Нехай $1 < q' \leqslant 2$. Тоді згідно з теоремою Б і нерівністю $|a+b|^\alpha \leqslant |a|^\alpha + |b|^\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можемо записати

$$\|F\|_{q'} \ll \left\| \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} |\delta^*_s(F,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q'} = \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} \|\delta^*_s(F,\cdot)\|^{q'}_{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{21}$$

Використавши (17), продовжимо оцінку (21):

$$\|F\|_{q'} \ll \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \ll 2^{l/q} \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \ll 2^{l/q} l^{(d-1)/q'}.$$

Якщо $2 < q' < \infty$, то, використавши лему А та співвідношення (17), отримаємо

$$\|F\|_{q'} \ll \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} \|\delta^*_s(F,\cdot)\|^{q'}_q 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q}-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{q})q'} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q}-\frac{1}{q'})q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leqslant 2^{l/q} \left(\sum_{(s,1)\leqslant l} 1 \right)^{\frac{1}{q'}} \ll 2^{l/q} l^{(d-1)/q'}.$$

Нехай $1 \leqslant \theta < \infty$. Тоді, підставивши (18) і (20) в (16) та врахувавши, що $M \asymp 2^l l^{d-1}$ і $\|g(\cdot)\|_{q'} \leqslant 1$, будемо мати

$$e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_q \geqslant e^{\mathfrak{F}}_M(f_1)_q = \inf_{\mathfrak{M}:\mathrm{mes}\mathfrak{N}\leqslant M} \|f_1(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f_1,\cdot)\|_q \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\mathfrak{M}:\mathrm{mes}\mathfrak{N}\leqslant M} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \Big(f_1(x) - S^{\mathfrak{M}}(f_1,x) \Big) g(x) \right| dx \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\mathfrak{M}:\mathrm{mes}\mathfrak{N}\leqslant M} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \Big(2^{-l(r_1+1-\frac{1}{p})} l^{-(d-1)/\theta} F(x) - S^{\mathfrak{M}}(f_1,x) \Big) 2^{-l/q} l^{-(d-1)/q'} F(x) \right| dx \gg$$

$$\gg 2^{-l(r_1+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} l^{-(d-1)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'})} \inf_{\mathfrak{M}:mes\mathfrak{N}\leqslant M} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} |S^{\mathfrak{M}}(F,x)F(x)| dx \right). \tag{22}$$

Щоб продовжити оцінку (22), оцінимо кожен з інтегралів.

Для оцінки $\int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 dx$, скориставшись співвідношенням (17), одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 dx = \|F(\cdot)\|_2^2 \asymp 2^l l^{d-1}.$$

Для оцінки другого інтеграла введемо додаткові позначення. Через L позначимо множину векторів s, для яких $(s,1) \leqslant l$, і, відповідно, через $\overline{\mathfrak{M}}$ — множину векторів $\{s : s \in \mathfrak{M} \cap L\}$. Нехай $\overline{\mathfrak{N}} = \bigcup_{s\in\overline{\mathfrak{M}}} Q_{2^s}$. Тоді можемо записати $\overline{\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{N}$ і $\operatorname{mes}\overline{\mathfrak{N}} \leqslant M$.

Далі, взявши до уваги, що добуток $S^{\mathfrak{M}}(F,x)\ F(x)$ відмінний від нуля лише на множині $\overline{\mathfrak{N}}$, можемо записати

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| S^{\mathfrak{M}}(F,x)F(x)\right| dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| S^{\overline{\mathfrak{M}}}(F,x)\right|^2 dx = \left\| S^{\overline{\mathfrak{M}}}(F,\cdot)\right\|_2^2 =$$

$$= \left\| \left(\sum_{s\in\overline{\mathfrak{M}}} |\delta_s^*(F,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 = \sum_{s\in\overline{\mathfrak{M}}} \|\delta_s^*(F,\cdot)\|_2^2 \asymp \sum_{s\in\overline{\mathfrak{M}}} \left(2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{2})}\right)^2 = \operatorname{mes}\overline{\mathfrak{N}} \leqslant M.$$

Тоді оцінку (22) можна продовжити таким чином:

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_q \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}(f_1)_q \gg 2^{-l(r_1+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} l^{-(d-1)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'})}(2^l l^{d-1} - M) \gg$$

$$\gg 2^{-l(r_1+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} l^{-(d-1)(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'})} 2^l l^{d-1} \asymp$$

$$\asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}}. \qquad (23)$$

Нехай тепер $\theta = \infty$, тоді, підставивши в (16) функції (19) і (20), отримаємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_q \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}(f_2)_q = \inf_{\mathfrak{M}:\operatorname{mes}\mathfrak{N}\leqslant M} \|f_2(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f_2,\cdot)\|_q \gg$$

$$\gg M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\left(\log^{d-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}}. \qquad (24)$$

Зазначимо, що отримані оцінки збігаються за порядком з оцінками зверху у випадку $r_1 \geqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{\theta}$.

Для того щоб завершити оцінку знизу, розглянемо випадок $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < r_1 < \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{q} + \dfrac{1}{\theta}$. Оскільки за даних умов оцінка зверху величини $e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_{p,\theta}B)_q$ не залежить від розмірності простору $\mathbb{R}^d$, то її достатньо отримати для $d=1$. Однак в одновимірному випадку оцінка (23) збігається за порядком з відповідною оцінкою зверху для всіх $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і* $\theta = \infty$, *то з* (6) *отримуємо оцінку*

$$e_M^{\mathfrak{F}}(S^r_p H)_q \asymp M^{-(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q})}.$$

***Зауваження* 1.** Порівнюючи теорему 1 з відповідним результатом наближення функцій з класів $S^r_{p,\theta}B$ цілими функціями $S^\gamma_n(f,x)$ (теорема В), можемо зробити такий висновок: якщо $1 < p < q < \infty$ і $q \leqslant \theta \leqslant \infty$, то

$$e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_q \asymp \mathcal{E}^\gamma_n(S^r_{p,\theta}B)_q, \ M \asymp 2^n n^{\nu-1}$$

і

$$e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_q \asymp \mathcal{E}^\gamma_n(S^r_{p,\theta}B)_q n^{-(\nu-1)(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}, \ M \asymp 2^n n^{\nu-1},$$

якщо $1 \leqslant \theta < q < \infty$, а $1/p - 1/q < r_1 < 1/p - 2/q + 1/\theta$.

Тепер сформулюємо результат, який дає оцінку величини $e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_q$ для іншого співвідношення між параметрами p і q, а саме $1 < p = q < 2$.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < 2$, $r_1 > 0$. *Тоді для* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *має місце порядкове співвідношення*

$$e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_p \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})_+}, \tag{25}$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Попередньо зауважимо, що у випадку $p \leqslant \theta \leqslant \infty$ оцінка одержується з теореми Г, якщо $\mathfrak{N} = Q^{\gamma'}_n$, де $Q^{\gamma'}_n = \bigcup_{(s,\gamma')<n} Q_{2^s}$, $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, і при цьому $S^{\mathfrak{M}}(f,x) = \sum_{(s,\gamma')<n} \delta^*_s(f,x)$.

Перейдемо до встановлення оцінки зверху у випадку $1 \leqslant \theta < p$. Зазначимо, що при цьому будемо використовувати ті ж міркування, що і при доведенні оцінки зверху в теоремі 1. Зупинимося лише на відмінностях у доведенні.

Для $f \in S^r_{p,\theta}B$ функцію, з допомогою якої здійснюватимемо наближення, будемо вибирати таким чином:

$$S^{\mathfrak{M}}(f,x) = \sum_{(s,\gamma')<n} \delta^*_s(f,x) + R_1(x),$$

де $R_1(x)$, а відповідно і множина, на якій зосереджено носій її перетворення Фур'є, будується, як R і $\widetilde{Q}_l$ в теоремі 1, з тією відмінністю, що замість величини S_l будемо використовувати

$$\widetilde{S}_l = \left(\sum_{l \leqslant (s,\gamma') < l+1} 2^{(s,r)\theta} \|\delta^*_s(f,\cdot)\|^\theta_p \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

тобто вектор γ у величині S_l замінимо на γ'.

Припустимо, що функцію $S^{\mathfrak{M}}(f,x)$ побудовано. Отримаємо оцінку зверху величини $\|f(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_p$, $f \in S^r_{p,\theta}B$.

Нехай $\widetilde{\mathfrak{M}'}_l$ позначає множину тих векторів $s : n \leqslant (s,\gamma') < n_0$, для яких $\delta^*_s(f,x)$ не потрапили в $R_1(x)$. Тоді

$$\|f(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_p \leqslant \Big\| f(\cdot) - \sum_{(s,\gamma')<n_0} \delta^*_s(f,\cdot) + \sum_{s \in \widetilde{\mathfrak{M}'}_l} \delta^*_s(f,\cdot) \Big\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \Big\| f(\cdot) - \sum_{(s,\gamma')<n_0} \delta^*_s(f,\cdot) \Big\|_p + \Big\| \sum_{s \in \widetilde{\mathfrak{M}'}_l} \delta^*_s(f,\cdot) \Big\|_p = I_4 + I_5. \tag{26}$$

Для оцінки I_4, скориставшись теоремою Г, отримаємо

$$I_4 \ll 2^{-n_0 r_1} = 2^{-nr_1} n^{-(\nu-1)r_1} \asymp M^{-r_1}. \tag{27}$$

Для оцінки I_5 спочатку використаємо теорему Б (Літтлвуда – Пелі), а потім нерівність $|a+b|^c \leqslant |a|^c + |b|^c$, $0 \leqslant c \leqslant 1$. Тоді

$$I_5 = \left\| \sum_{s \in \widetilde{\mathfrak{M}}'_l} \delta_s^*(f,\cdot) \right\|_p \ll \left\| \left(\sum_{s \in \widetilde{\mathfrak{M}}'_l} |\delta_s^*(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant \left(\sum_{s \in \widetilde{\mathfrak{M}}'_l} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{28}$$

Далі, міркуючи, як і при встановленні оцінки величини I_2 (див. (10) і (11)), з (28) одержимо

$$I_5 \ll (2^n n^{\nu-1})^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})} \left(\sum_{l=n}^{n_0} 2^{-pl(r_1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p})} \widetilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{29}$$

Щоб продовжити оцінку I_5, розглянемо два випадки:

1) $r_1 \geqslant \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$;

2) $0 < r_1 < \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$.

Якщо $r_1 \geqslant \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$, то з (29) будемо мати

$$I_5 \ll (2^n n^{\nu-1})^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})} 2^{-n(r_1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p})} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \widetilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{\nu-1})^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})} 2^{-n(r_1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p})} \|f\|_{S_{p,\theta}^r}^{\theta/p} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/p-1/\theta)} \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}}. \tag{30}$$

Підставивши (27) і (30) в (26), отримаємо

$$\|f(\cdot) - S^{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_p \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}}.$$

Нехай тепер $0 < r_1 < \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$. Тоді оцінку (29) можемо продовжити таким чином:

$$I_5 \ll (2^n n^{\nu-1})^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})} 2^{-n_0(r_1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p})} \left(\sum_{l=n}^{n_0} \widetilde{S}_l^\theta \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{\nu-1})^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})} 2^{-n(r_1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p})} n^{-(\nu-1)(r_1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{p})} = 2^{-nr_1} n^{-(\nu-1)r_1} \asymp M^{-r_1}.$$

Отже, оцінку зверху в теоремі 2 встановлено.

Встановимо оцінку знизу.

Для цього будемо використовувати міркування, які були запропоновані В. М. Темляковим [8, с. 94]. За числом M підберемо n так, щоб $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кількість точок з цілочисловими координатами у множині $F_n = \bigcup_{(s,1)=n} \rho(s)$ була б більшою за $4M$.

Розглянемо функції

$$f_3(x) = C_6 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{(d-1)}{\theta}} \sum_{k\in F_n} D_k(x), \quad C_6 > 0, 1 \leqslant \theta < \infty,$$

та

$$f_4(x) = C_7 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} \sum_{k\in F_n} D_k(x), \quad C_7 > 0, \text{ якщо } \theta = \infty.$$

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що функції f_3 і f_4 належать $S^r_{p,\theta}B$ і $S^r_{p,\infty}B$ (S^r_pH) відповідно.

Нехай $\mathfrak{M}$ — довільна множина векторів $s = (s_1, \ldots, s_d)$ така, що для множини $\mathfrak{N} = \bigcup_{s\in\mathfrak{M}} Q_{2^s}$ має місце співвідношення $\operatorname{mes}\mathfrak{N} \leqslant M$. Для кожного вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, який задовольняє умову $(s,1) = n$, розглянемо множину $\mathfrak{N} \cap \rho(s)$. Згідно з вибором числа n множина

$$\mathfrak{M}' = \left\{ s \in \mathbb{Z}^d_+ : \ (s,1) = n, \ \left|\mathfrak{N} \cap \rho(s)\right| < \frac{1}{2}|\rho(s)| \right\}$$

буде містити, принаймні, половину всіх векторів s, що задовольняють умову $(s,1) = n$, і тому $|\mathfrak{M}'| \asymp n^{d-1}$.

Нехай

$$S^{\mathfrak{M}'}(f_3, x) = \sum_{s\in\mathfrak{M}'} \delta^*_s(f_3, x).$$

Тоді згідно з (5) для $f_3(x)$ отримаємо

$$\|f_3(\cdot) - S^{\mathfrak{M}'}(f_3,\cdot)\|_p \gg \left(\sum_{(s,1)=n} \|\delta^*_s(f_3(\cdot) - S^{\mathfrak{M}'}(f_3,\cdot))\|^p_2 2^{\|s\|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{p}} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s\in\mathfrak{M}'} \|\delta^*_s(f_3(\cdot) - S^{\mathfrak{M}'}(f_3,\cdot))\|^p_2 \right)^{\frac{1}{p}} 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \gg$$

$$\gg 2^{-n(r_1+1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{(d-1)}{\theta}} 2^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{s\in\mathfrak{M}'} 1 \right)^{\frac{1}{p}} 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{-\frac{(d-1)}{\theta}} |\mathfrak{M}'|^{\frac{1}{p}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1} \left(\log^{d-1} M\right)^{r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}}. \tag{31}$$

Відповідно для $f_4(x)$ отримаємо

$$\|f_4(\cdot) - S^{\mathfrak{M}'}(f_4,\cdot)\|_p \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)/p} \asymp M^{-r_1} \left(\log^{d-1} M\right)^{r_1+\frac{1}{p}}. \tag{32}$$

Оцінки (31) і (32) збігаються за порядком з оцінками зверху величини $e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_p$ у випадку $r_1 \geq \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$. Якщо ж $0 < r_1 < \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$, то шукана оцінка випливає з одновимірного випадку.

Оцінку (25) встановлено.

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Якщо виконуються умови теореми* 2 *і* $\theta = \infty$, *то з* (25) *отримуємо оцінку*

$$e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_pH)_p \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+\frac{1}{p})}.$$

***Зауваження* 2.** Порівнюючи теорему 2 з відповідним результатом для наближення функцій з класів $S^r_{p,\theta}$ цілими функціями $S^\gamma_n(f,x)$ (теорема Г), можемо зробити такий висновок: якщо $p \leqslant \theta \leqslant \infty$, $p \in (1,2)$, то

$$e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_p \asymp \mathcal{E}^{\gamma'}_n(S^r_{p,\theta}B)_p, \ M \asymp 2^n n^{\nu-1}$$

і

$$e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_p \asymp \mathcal{E}^{\gamma'}_n(S^r_{p,\theta}B)_p n^{-(\nu-1)r_1}, \quad M \asymp 2^n n^{\nu-1},$$

якщо $1 \leqslant \theta < p$, а $0 < r_1 < 1/p - 1/\theta$.

***Зауваження* 3.** Зазначимо, що дослідження величини, аналогічної до $e^{\mathfrak{F}}_M(S^r_{p,\theta}B)_q$, для класів Бєсова періодичних функцій багатьох змінних були проведені в роботах [9, 11].

1. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{r*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi;\ j = 1,\ldots,n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
2. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Там же. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
3. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. – 1995. – **11(4)**. – P. 454 – 466.
4. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1342 – 1363.
5. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1969. – **105**. – С. 89 – 167.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
8. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
9. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 1. – С. 109 – 121.
10. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
11. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 513 – 523.

Одержано 28.12.09