УДК 517.956

Р. В. Андрусяк, Н. О. Бурдейна, В. М. Кирилич (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

КВАЗІЛІНІЙНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

By applying the method of contractive mappings, for small values of time, we prove the existence and uniqueness of the generalized Lipschitzian solution of the mixed problem with unknown boundaries for a hyperbolic quasilinear system of first-order equations, which is presented in terms of the Riemann invariants and contains nonlocal (unseparated and integral) boundary conditions.

С помощью метода сжимающих отображений доказаны существование и единственность при малых значениях времени обобщенного липшицевого решения смешанной задачи с неизвестными границами для записанной в инвариантах Римана гиперболической квазилинейной системы уравнений первого порядка с нелокальными (неразделенными и интегральными) граничными условиями.

1. Вступ. Задачі Стефана, як правило, пов'язують з рівняннями параболічного та еліптичного типів (див. [1] та наведену в ній бібліографію). Однак, багато математичних моделей теорії в'язкопружних середовищ (середовища з „пам'яттю") [2 – 4], теплопровідності (якщо швидкість поширення тепла є скінченною) [1, 5, 6], руху ґрунтових вод [7] приводять до коливальних процесів, що вказує на хвильову „природу" температуропровідності [1]. Зокрема, якщо в класичному законі Фур'є поширення тепла в середовищі замість $q(x,t) = -kT_x(x,t)$ розглянути $q(x,t+\tau) = -kT_x(x,t)$, $\tau > 0$ (при цьому швидкість поширення тепла вважати скінченною), то прийдемо до гіперболічного рівняння теплопровідності (телеграфного рівняння) [1, 5 – 8]

$$\tau T_{tt} + T_t = a^2 T_{xx}.$$

Застосувавши цей підхід, наприклад, в задачі з невідомими межами [8], отримаємо до відповідну задачу для гіперболічної системи рівнянь першого порядку ($s(t)$ — невідома межа)

$$\begin{aligned} & T_t + q_x = 0, \\ & \tau q_t + a^2 T_x = -q, \end{aligned} \qquad 0 < x < s(t), \quad t > 0,$$

з умовою на поведінку вільної межі

$$s'(t)(1 + T(s(t),t)) = q(s(t),t), \quad t > 0,$$

та певними початковими і крайовими умовами.

Зокрема, якщо підпорядкувати узагальненому закону Фур'є (закону Каттанео – Фур'є [1, 5]) математичні моделі із [9], а саме,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = x^{1-\beta} u^{\beta}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < s(0),$$

$$u(s(t),t) = u_x(s(t),t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\int_0^{s(t)} [u_t + x^{1-\beta} u^\beta] x dx = u(0,t), \quad t > 0,$$

то одержимо задачу з невідомою межею $s(t)$ та інтегральними умовами для вказаної вище гіперболічної системи рівнянь першого порядку.

Задачі з нелокальними (інтегральними) умовами виникають в теорії біопопуляцій, демографії, фізиці тощо. Наприклад, вивчення пружних коливань п'єзоелектричного перетворювача [10], який має форму тонкого плоского кільця, між зовнішнім і внутрішнім радіусами якого прикладено імпульсну напругу $v(t)$, базується на дослідженні розв'язків задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u \right), \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0,$$

$$u(r,0) = u_t(r,0) = 0, \quad u(r_2,t) = 0,$$

$$h \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u \right) dr = v(t),$$

а математична модель динаміки популяцій в демографічних дослідженнях [11] формулюється як задача про знаходження розв'язків рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = \mu(x,t)\rho(x,t) + \omega(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0,$$

з умовами

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad x > 0,$$

$$\rho(0,t) = \beta(t) \int_{x_1}^{x_2} h(x,t) k(x,t) \rho(x,t) dx, \quad t > 0.$$

Тут $\rho(x,t)$ — щільність розподілу популяції за віком x в момент часу t, $\mu(x,t)$ — коефіцієнт смертності, $\omega(x,t)$ — величина, що описує популяцію мігрантів, а ρ_0, β, h, k — стандартні демографічні параметри.

Є інші приклади задач, що приводять до нелокальних додаткових умов для рівнянь і систем гіперболічного типу [7, 12 – 15].

Вірогідно, одними з перших публукацій щодо гіперболічних задач з невідомими межами були праці [16 – 18]. Пізніше такі задачі почали називати гіперболічними задачами Стефана [19 – 22]. Літературний огляд із проблематики гіперболічних задач з невідомими межами наведено в [1] (гл. 8).

Гіперболічні задачі Стефана для лінійних або напівлінійних рівнянь і систем з нелокальними умовами досліджувались, наприклад, у [15, 23, 24].

У даній статті розглянуто мішану задачу з невідомими межами для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з нелінійними нелокальними (нерозділеними та інтегральними) крайовими умовами у випадку двох незалежних змінних. Коректну розв'язність задачі для малих значень часу одержано з використанням методики із [25 – 27].

Деякі варіанти квазілінійних гіперболічних задач Стефана вивчались у працях [25, 27 – 30].

2. Постановка задачі. Нехай $D_T^s = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < t < T,\ s_1(t) < x < s_2(t)\}$ — область з вільними (невідомими) межами $s(t) = (s_1(t), s_2(t)) \colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$.

В області D_T^s розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь, записану в інваріантах

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \tag{1}$$

де $u(x,t) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)) \colon \overline{D_T^s} \to \mathbb{R}^n$ — шукані функції, а $\lambda_i(x,t,u) \colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $f_i(x,t,u) \colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ — відомі функції.

Нехай поведінка функцій s_j описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{ds_j}{dt} = g_j(s,t,\hat{u}(s,t)), \quad j \in \{1,2\}. \tag{2}$$

Тут $\hat{u}(s,t) = (u(s_1,t), u(s_2,t)) \colon \mathbb{R}^2 \times [0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$, а $g_j(s,t,\hat{u}) \colon \mathbb{R}^{2n+3} \to \mathbb{R}$ — відомі функції.

Доповнимо системи (1), (2) початковими умовами вигляду

$$s(0) = s^0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in [s_1^0, s_2^0], \tag{4}$$

де $s^0 = (s_1^0, s_2^0)$ — задані значення, а $\alpha(x) = (\alpha_1(x),\ldots,\alpha_n(x)) \colon [s_1^0, s_2^0] \to \mathbb{R}^n$ — заданий набір функцій.

Визначимо множини індексів I_1, I_2 таким чином:

$$I_1 = \Big\{ i \in \{1,\ldots,n\} \colon \lambda_i\big(s_1^0, 0, \alpha(s_1^0)\big) > g_1\big(s^0, 0, \hat{\alpha}(s^0)\big) \Big\},$$

$$I_2 = \Big\{ i \in \{1,\ldots,n\} \colon \lambda_i\big(s_2^0, 0, \alpha(s_2^0)\big) < g_2\big(s^0, 0, \hat{\alpha}(s^0)\big) \Big\},$$

де $\hat{\alpha}(s^0) = \big(\alpha(s_1^0), \alpha(s_2^0)\big)$.

Припустимо, що на бічних межах області D_T^s виконуються нелокальні крайові умови вигляду

$$u_i(s_j(t),t) = \beta_{ij}\left(s(t), t, \tilde{u}(s(t),t), \int\limits_{s_1(t)}^{s_2(t)} \gamma_{ij}\big(y,t,u(y,t)\big)dy \right), \quad j \in \{1,2\}, \quad i \in I_j, \tag{5}$$

де $\tilde{u}(s,t) = \big(u_{i_1}(s_1,t),\ldots,u_{i_{k_1}}(s_1,t), u_{j_1}(s_2,t),\ldots,u_{j_{k_2}}(s_2,t)\big)$, а $\{i_1,\ldots,i_{k_1}\} = \{1,\ldots,n\} \setminus I_1$, $\{j_1,\ldots,j_{k_2}\} = \{1,\ldots,n\} \setminus I_2$, до того ж $\beta_{ij}(s,t,\tilde{u},v) \colon \mathbb{R}^{k_1+k_2+4} \to \mathbb{R}$, $\gamma_{ij}(x,t,u) \colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ — відомі функції.

3. Узагальнений розв'язок задачі. Нехай $i \in \{1,\ldots,n\}$, $s(t) \colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$, $u(x,t) \colon \overline{D_T^s} \to \mathbb{R}^n$ — визначені функції. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t, u(x, t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Умови теореми та припущення простору $\mathcal{M}$, в межах якого будуть вибиратися пари функцій (u, s) (див. доведення теореми нижче), забезпечують неперервність та ліпшицевість за змінною x правої частини рівняння на множині $\overline{D^s_T}$, тому задача Коші має єдиний розв'язок, який можна продовжити до межі області D^s_T. Позначимо його через $\varphi_i[u](t; x_0, t_0)$. В результаті отримаємо сім'ю функцій аргументу t з параметрами x_0, t_0, яка, в свою чергу, залежить від вибору функції u, тобто, іншими словами, сім'ю операторів.

Зауважимо, що розв'язок $\varphi_i[u](t; x_0, t_0)$ при фіксованих i, s, u, x_0, t_0 можна продовжити до перетину з межею області D^s_T. Нехай

$$\chi_i[u, s](x_0, t_0) = \min \Big\{ t \in [0, t_0] \colon (\varphi_i[u](t; x_0, t_0), t) \in \overline{D^s_T} \Big\}.$$

Таким чином, функцію $\varphi_i[u](t; x_0, t_0)$ визначено на відрізку $[\chi_i[u, s](x_0, t_0),\ t_0]$, до того ж $\chi_i[u, s](x_0, t_0)$ є сім'єю функціоналів із параметрами x_0, t_0.

Запишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\frac{du_i(\varphi_i[u](t; x_0, t_0), t)}{dt} = f_i(\varphi_i[u](t; x_0, t_0), t, u(\varphi_i[u](t; x_0, t_0), t)), \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Зінтегруємо кожне рівняння отриманої системи в межах від $\chi_i[u, s](x_0, t_0)$ до t_0. В результаті отримаємо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x, t) = u_i(\varphi_i[u](\chi_i[u, s](x, t); x, t), \chi_i[u, s](x, t)) +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i[u,s](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u](\tau; x, t), \tau, u(\varphi_i[u](\tau; x, t), \tau))\, d\tau, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Зауважимо, що системи (1) та (6) еквівалентні в класі функцій $(u, s) \in [C^1(\overline{D^s_T})]^n \times [C^1[0, T]]^2$, проте розв'язок останньої системи може бути, взагалі кажучи, недиференційовним.

Означення. *Узагальненим ров'язком задачі* (1) – (5), *визначеним на відрізку* $[0, T_0]$, *будемо називати набір функцій* $(u, s) \in \big[\mathrm{Lip}(\overline{D^s_{T_0}})\big]^n \times \big[C^1[0, T_0]\big]^2$, $0 < T_0 \le T$, *що задовольняє системи* (2), (6), *а також умови* (3) – (5). *Якщо* $T_0 < T$, *то розв'язок є локальним.*

Розв'язність задачі. Визначимо наступні множини:

$$D^1_T(U, S) = \Big\{ (x, t, u) \in \mathbb{R}^{n+2} \colon 0 \le t \le T,\ s^0_1 - St \le x \le s^0_2 + St,\ |u| \le U \Big\},$$

$$D^2_T(U, S) = \Big\{ (s, t, \hat{u}) \in \mathbb{R}^{2n+3} \colon 0 \le t \le T,$$

$$s^0_j - St \le s_j \le s^0_j + St,\ j \in \{1, 2\},\ |\hat{u}| \le U \Big\},$$

$$D^3_T(U, V, S) = \Big\{ (s, t, \tilde{u}, v) \in \mathbb{R}^{k_1 + k_2 + 4} \colon$$

$$0 \le t \le T,\ s_j^0 - St \le s_j \le s_j^0 + St,\ j \in \{1,2\},\ |\tilde{u}| \le U,\ |v| \le V\Big\}.$$

Тут $|\cdot|$ — норма у просторі $\mathbb{R}^N$ в сенсі максимум модулів (розмірність N у кожному випадку буде зрозумілою із контексту),

$$U = \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ x\in[s_1^0,s_2^0]}} |\alpha_i(x)| + 1, \qquad S = \max_{j\in\{1,2\}} \left|g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))\right| + 1,$$

$$V = (s_2^0 - s_1^0 + 2ST)\Gamma, \qquad \Gamma = \max_{\substack{j\in\{1,2\},\, i\in I_j\\ (x,t,u)\in D_T^1(U,S)}} |\gamma_{ij}(x,t,u)|.$$

Введемо також інші позначення:

$$\Lambda = \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t,u)\in D_T^1(U,S)}} |\lambda_i(x,t,u)|, \qquad F = \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t,u)\in D_T^1(U,S)}} |f_i(x,t,u)|,$$

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{i\in\{1,\dots,n\},\, j\in\{1,2\}} \left|\lambda_i(s_j^0,0,\alpha(s_j^0)) - g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))\right|,$$

і нехай λ_0, f_0, g_0, α_0, β_0, γ_0 — сталі Ліпшиця функцій λ_i, f_i, g_j, α_i, β_{ij}, γ_{ij} за відповідними змінними.

Визначимо

$$\overline{\alpha_i}(x) = \begin{cases} \alpha_i(x), & \text{якщо } x \in [s_1^0, s_2^0], \\ \alpha_i(s_1^0), & \text{якщо } x \in (-\infty, s_1^0), \\ \alpha_i(s_2^0), & \text{якщо } x \in (s_2^0, +\infty). \end{cases}$$

Далі будемо використовувати позначення $\triangle_k F(k)$ для різниці $F(1)-F(2)$ (зміст функції F у кожному випадку буде зрозумілим із контексту).

Теорема. *Нехай виконуються наступні умови*:

1) $\lambda_i \in C(D_T^1(U,S)) \cap Lip_{x,u}(D_T^1(U,S))$, $i \in \{1,\dots,n\}$;
2) $f_i \in C(D_T^1(U,S)) \cap Lip_{x,u}(D_T^1(U,S))$, $i \in \{1,\dots,n\}$;
3) $g_j \in C(D_T^2(U,S)) \cap Lip_{s,\hat{u}}(D_T^2(U,S))$, $j \in \{1,2\}$;
4) $\alpha_i \in Lip[s_1^0, s_2^0]$, $i \in \{1,\dots,n\}$;
5) $\beta_{ij} \in Lip(D_T^3(U,V,S))$, $j \in \{1,2\}$, $i \in I_j$;
6) $\gamma_{ij} \in C(D_T^1(U,S)) \cap Lip_{t,u}(D_T^1(U,S))$, $j \in \{1,2\}$, $i \in I_j$;
7) $\lambda_i(s_j^0,0,\alpha(s_j^0)) \ne g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))$, $j \in \{1,2\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$;
8) $\alpha_i(s_j^0) = \beta_{ij}\left(s^0, 0, \tilde{\alpha}(s^0), \displaystyle\int_{s_1^0}^{s_2^0} \gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))\,dy\right)$, $j \in \{1,2\}$, $i \in I_j$, *де* $\tilde{\alpha}(s^0)$ *— набір* $k_1 + k_2$ *сталих вигляду* $\alpha_i(s_j^0)$, $j \in \{1,2\}$, $i \notin I_j$.

Тоді на відрізку $[0, T_0]$ *існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1)–(5), *а значення* T_0 *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Розглянемо метричний простір $(\mathcal{M}, \rho)$, де $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T_0, U_0, L_x, L_t)$ — множина наборів функцій $(u,s) \in \left[C(\overline{D_{T_0}^s})\right]^n \times \left[C[0,T_0]\right]^2$, $0 < T_0 \le T$, що задовольняють такі обмеження:

1) $s_j \in \mathrm{Lip}([0,T_0],S)$, $s_j(0) = s_j^0$, $j \in \{1,2\}$ (S — стала, що обмежує зверху сталі Ліпшиця функцій s_j);

2) $|u_i(x,t) - \overline{\alpha_i}(x)| \le U_0 \le 1$, $(x,t) \in \overline{D^s_{T_0}}$, $u_i(x,0) = \alpha_i(x)$, $x \in [s_1^0, s_2^0]$, $i \in \{1,\dots,n\}$;

3) $u_i \in \mathrm{Lip}(\overline{D^s_{T_0}}, L_x, L_t)$, $L_x \ge 1, i \in \{1,\dots,n\}$ ($L_x,\ L_t$ — сталі, що обмежують зверху сталі Ліпшиця функцій u_i за змінними x та t відповідно).

Нехай $(u^1,s^1) \in \mathcal{M}$, $(u^2,s^2) \in \mathcal{M}$. Відстань між елементами простору $\mathcal{M}$ визначимо згідно з формулою

$$\rho\big((u^1,s^1),(u^2,s^2)\big) =$$

$$= \max\left\{ \max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{D^{s^1}_{T_0}}\cup\overline{D^{s^2}_{T_0}}}} |\bar u^1_i(x,t) - \bar u^2_i(x,t)|, \quad \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}} |s^1_j(t) - s^2_j(t)| \right\},$$

де

$$\bar u(x,t) = (\bar u_1(x,t),\dots,\bar u_n(x,t)) = \begin{cases} u(x,t), & \text{якщо } (x,t)\in\overline{D^s_{T_0}},\\ u(s_1(t),t), & \text{якщо } x < s_1(t),\\ u(s_2(t),t), & \text{якщо } s_2(t) < x. \end{cases}$$

Лема 1. *Метричний простір $(\mathcal{M},\rho)$ є повним.*

Доведення. Нехай $(u^n,s^n) \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, — фундаментальна послідовність, тобто така, що для довільного $\varepsilon > 0$ при достатньо великих значеннях n та m виконуються оцінки

$$|s^n(t) - s^m(t)| \le \varepsilon, \quad t \in [0,T_0], \tag{7}$$

$$|\bar u^n(x,t) - \bar u^m(x,t)| \le \varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{D^{s^n}_{T_0}} \cup \overline{D^{s^m}_{T_0}}. \tag{8}$$

На основі оцінки (7), використовуючи повноту простору $C[0,T_0]$ з рівномірною метрикою, виводимо існування функції $s \in [C[0,T_0]]^2$, до якої рівномірно збігається на відрізку $[0,T_0]$ послідовність s^n.

Зафіксуємо точку $(x_0,t_0) \in D^s_{T_0}$. Нехай $O(x_0,t_0)$ — окіл цієї точки такий, що $\overline{O(x_0,t_0)} \subset D^s_{T_0}$. Тоді при достатньо великих значеннях n маємо $\overline{O(x_0,t_0)} \subset D^{s^n}_{T_0}$, а отже, при достатньо великих значеннях n та m виконується оцінка

$$\big|u^n(x,t) - u^m(x,t)\big| \le \varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{O(x_0,t_0)},$$

звідки виводимо існування функції $u \in [C(\overline{O(x_0,t_0)})]^n$, до якої рівномірно збігається на множині $\overline{O(x_0,t_0)}$ послідовність u^n.

Таким чином, враховуючи довільність вибору точки (x_0,t_0), переконуємося в існуванні функції $u \in [C(\overline{D^s_{T_0}})]^n$, значення якої в кожній точці $(x_0,t_0) \in D^s_{T_0}$ є границею послідовності $\bar u^n(x_0,t_0)$ і яку за неперервністю продовжили на межу області $D^s_{T_0}$.

Доведемо, що послідовність (u^n, s^n) збігається в метриці ρ до набору функцій (u, s), тобто для довільного $\varepsilon > 0$ при достатньо великих значеннях n виконуються оцінки

$$\left|s^n(t) - s(t)\right| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, T_0], \tag{9}$$

$$\left|\bar{u}^n(x,t) - \bar{u}(x,t)\right| \leq \varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{D^{s^n}_{T_0}} \cup \overline{D^{s}_{T_0}}. \tag{10}$$

Зауважимо, що оцінка (9) випливає із нерівності (7), якщо в останній перейти до границі при $m \to \infty$ при кожному фіксованому $t \in [0, T_0]$. Тому залишилося встановити оцінку (10).

Спочатку покажемо, що послідовність функцій $\bar{u}^n$ є одностайно неперервною при достатньо великих значеннях n, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ при достатньо великих значеннях n виконується оцінка

$$\left|\bar{u}^n(x_1,t) - \bar{u}^n(x_2,t)\right| \leq \varepsilon, \quad (x_k,t) \in \overline{D^{s^n}_{T_0}}, \quad k \in \{1,2\},$$

якщо значення x_k, $k \in \{1,2\}$, є достатньо близькими, тобто $|x_1 - x_2| \leq \delta$, до того ж δ не залежить від n.

Отже, зафіксуємо $\varepsilon > 0$, а також достатньо велике значення m, тоді справджуються співвідношення

$$|\bar{u}^n(x,t) - \bar{u}^m(x,t)| \leq \varepsilon/3, \quad (x,t) \in \overline{D^{s^n}_{T_0}} \cup \overline{D^{s^m}_{T_0}}, \quad n \geq N,$$

де значення N є достатньо великим,

$$\left|\bar{u}^m(x_1,t) - \bar{u}^m(x_2,t)\right| \leq \varepsilon/3, \quad (x_k,t) \in \overline{D^{s^m}_{T_0}}, \quad k \in \{1,2\}, \quad |x_1 - x_2| \leq \delta,$$

де значення δ є достатньо малим, m — фіксоване. Врахувавши отримані оцінки, запишемо

$$|\bar{u}^n(x_1,t) - \bar{u}^n(x_2,t)| \leq$$

$$\leq |\bar{u}^n(x_1,t) - \bar{u}^m(x_1,t)| + |\bar{u}^m(x_1,t) - \bar{u}^m(x_2,t)| + |\bar{u}^m(x_2,t) - \bar{u}^n(x_2,t)| \leq$$

$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \quad (x_k,t) \in \overline{D^{s^n}_{T_0}}, \quad k \in \{1,2\}, \quad n \geq N, \quad |x_1 - x_2| \leq \delta,$$

що і доводить одностайну неперервність розглядуваної послідовності.

Перейдемо до встановлення оцінки (10) для довільного $\varepsilon > 0$ при достатньо великих значеннях n. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, тоді мають місце нерівності

$$\left|\bar{u}^n(x_1,t) - \bar{u}^n(x_2,t)\right| \leq \varepsilon/3,$$

$$(x_k,t) \in \overline{D^{s^n}_{T_0}}, \quad k \in \{1,2\}, \quad n \geq N_1, \quad |x_1 - x_2| \leq \delta,$$

$$\left|\bar{u}(x_1,t) - \bar{u}(x_2,t)\right| \leq \varepsilon/3, \quad (x_k,t) \in \overline{D^{s}_{T_0}}, \quad k \in \{1,2\}, \quad |x_1 - x_2| \leq \delta,$$

де значення N_1 є достатньо великим, а δ — достатньо малим.

Нехай $D_{T_0}^{s,\delta} = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < t < T_0,\ s_1(t) + \delta/2 < x < s_2(t) - \delta/2\big\}$. Тоді, згідно з доведеним, послідовність u^n рівномірно збігається до функції u на множині $\overline{D_{T_0}^{s,\delta}}$. Тому виконується оцінка

$$\big|u^n(x,t) - u(x,t)\big| \leq \varepsilon/3, \quad (x,t) \in \overline{D_{T_0}^{s,\delta}}, \quad n \geq N_2, \tag{11}$$

де значення N_2 є достатньо великим.

Насамкінець запишемо нерівність

$$|s^n(t) - s(t)| \leq \delta/2, \quad t \in [0, T_0], \quad n \geq N_3,$$

де значення N_3 є достатньо великим, а отже, маємо

$$\bar{u}^n(x,t) = u^n(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D_{T_0}^{s,\delta}}, \quad n \geq N_3.$$

Таким чином, отримуємо потрібну оцінку

$$|\bar{u}^n(x,t) - \bar{u}(x,t)| \leq$$

$$\leq |\bar{u}^n(x,t) - u^n(x+\delta,t)| + |u^n(x+\delta,t) -$$

$$- u(x+\delta,t)| + |u(x+\delta,t) - \bar{u}(x,t)| \leq$$

$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{D_{T_0}^{s^n}} \cup \overline{D_{T_0}^{s}},$$

$$x < s_1(t) + \delta/2, \quad n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}.$$

Припущення $x < s_1(t) + \delta/2$ є несуттєвим і ввведене лише для визначеності. У випадку $x > s_2(t) - \delta/2$ оцінка встановлюється аналогічно, а випадок $s_1(t) + \delta/2 \leq x \leq s_2(t) - \delta/2$ розглядати не потрібно (див. оцінку (11)).

Лему доведено.

Нехай $(u,s) \in \mathcal{M}$ — узагальнений розв'язок задачі (1) – (5), до того ж виконується умова

$$\left| \frac{d}{d\tau} \varphi_i[u](\tau; s_j(t), t)\Big|_{\tau=t} - s_j'(t) \right| \geq \delta > 0, \tag{12}$$

$$i \in \{1, \ldots, n\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad t \in [0, T_0].$$

Тоді пара функцій (u,s) задовольняє систему інтегро-операторних рівнянь

$$s_j(t) = s_j^0 + \int\limits_0^t g_j(s(\tau), \tau, \hat{u}(s(\tau), \tau))\, d\tau, \quad j \in \{1,2\},$$

$$u_i(x,t) = B_i[u,s](x,t) + \tag{13}$$

$$+ \int\limits_{\chi_i[u,s](x,t)}^{t} f_i(\varphi_i[u](\tau; x,t), \tau, u(\varphi_i[u](\tau; x,t), \tau))\, d\tau, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

де B_i — оператор, визначений на елементах простору $\mathcal{M}$ згідно з формулою (тут використовуємо позначення $\chi_i^{u,s} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \chi_i[u,s](x,t)$)

$$B_i[u,s](x,t) = \begin{cases} \alpha_i(\varphi_i[u](0;x,t)), \quad \text{якщо } \chi_i^{u,s} = 0, \\ \beta_{ij}\left(s(\chi_i^{u,s}), \chi_i^{u,s}, \tilde{u}(s(\chi_i^{u,s}), \chi_i^{u,s}), \displaystyle\int\limits_{s_1(\chi_i^{u,s})}^{s_2(\chi_i^{u,s})} \gamma_{ij}(y, \chi_i^{u,s}, u(y, \chi_i^{u,s}))dy\right), \\ \qquad\qquad \text{якщо } \varphi_i[u](\chi_i^{u,s}; x,t) = s_j(\chi_i^{u,s}),\ j \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Справедливим є й обернене твердження: достатньо гладкий розв'язок системи рівнянь (13), що задовольняє умову (12), є узагальненим розв'язком задачі (1) – (5).

Еквівалентність задачі (1) – (5) та системи інтегро-операторних рівнянь (13) дозволяє звести відшукання узагальненого розв'язку задачі до знаходження нерухомої точки оператора, що визначатиметься на основі правих частин рівнянь системи (13).

На елементах простору $\mathcal{M}$ визначимо оператор $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}[u,s] = (\mathcal{A}^u[u,s], \mathcal{A}^s[u,s]) = \Big(\mathcal{A}_1^u[u,s], \ldots, \mathcal{A}_n^u[u,s],\ \mathcal{A}_1^s[u,s], \mathcal{A}_2^s[u,s]\Big),$$

$$\mathcal{A}_j^s[u,s](t) = s_j^0 + \int\limits_0^t g_j(s(\tau), \tau, \hat{u}(s(\tau),\tau))\, d\tau, \quad t \in [0, T_0], \quad j \in \{1,2\},$$

$$\mathcal{A}_i^u[u,s](x,t) = \mathcal{B}_i[u,s](x,t) +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i[\mathcal{P}[u,s], \mathcal{A}^s[u,s]](x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t), \tau, \mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t),\tau)\Big)\, d\tau,$$

$$(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

де $\mathcal{B}$ — оператор, визначений на $\mathcal{M}$ згідно з формулою (тут використовуємо позначення $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \chi_i\big[\mathcal{P}[u,s], \mathcal{A}^s[u,s]\big](x,t)$)

$$\mathcal{B}_i[u,s](x,t) =$$

$$= \begin{cases} \alpha_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](0;x,t)\Big), \quad \text{якщо } \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s} = 0, \\ \beta_{ij}\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}, \widetilde{\mathcal{A}^u}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big), \mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})\Big), \\ \qquad\qquad \text{якщо } \varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}; x,t) = \mathcal{A}_j^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}),\ j \in \{1,2\}, \end{cases}$$

оператор $\mathcal{J}_{ij}[u,s]$:

$$\mathcal{J}_{ij}[u,s](t) = \int\limits_{\mathcal{A}_1^s[u,s](t)}^{s_1^0 + \max\{S,\Lambda\}t} \gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u,s](y,t))\, dy +$$

$$+\int\limits_{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t}^{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t}\gamma_{ij}(y,t,\mathcal{A}^u[u,s](y,t))\,dy+$$

$$+\int\limits_{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t}^{\mathcal{A}_2^s[u,s](t)}\gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u,s](y,t))\,dy,$$

а оператор $\mathcal{P}[u,s]=\big(\mathcal{P}_1[u,s],\ldots,\mathcal{P}_n[u,s]\big)$:

$$\mathcal{P}_i[u,s](x,t)=\begin{cases}u_i(x,t), & \text{якщо}\;\;(x,t)\in\overline{D_{T_0}^s}\cap\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}},\\ u_i(s_1(t),t), & \text{якщо}\;\;\mathcal{A}_1^s[u,s](t)\le x\le s_1(t),\\ u_i(s_2(t),t), & \text{якщо}\;\;s_2(t)\le x\le\mathcal{A}_2^s[u,s](t),\end{cases}$$

$\Big($оператор $\mathcal{P}$ переводить пару (u,s) у набір n функцій, що визначені на $\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}\Big)$.

Для коректності визначення оператора $\mathcal{A}$ припускаємо виконання умови

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t)\Big|_{\tau=t}-\mathcal{A}_j^s[u,s]'(t)\right|\ge\delta>0,$$
$$(u,s)\in\mathcal{M},\quad i\in\{1,\ldots,n\},\quad j\in\{1,2\},\quad t\in[0,T_0]. \tag{14}$$

Для спрощення міркувань встановимо обмеження на T_0:

$$T_0\le T_0^1,\quad \text{де}\quad T_0^1=\frac{s_2^0-s_1^0}{2\max\{S,\Lambda\}}. \tag{15}$$

Проаналізуємо можливі випадки.

Якщо $\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x,t)=0$, то $\mathcal{B}_i[u,s](x,t)$ визначається однозначно.

Якщо ж $\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x,t)>0$, то значення $\mathcal{B}_i[u,s](x,t)$ визначається за другою альтернативою через значення $\mathcal{A}_i^u[u,s](\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t)$, $j\in\{1,2\}$, $i\notin I_j$, які, в свою чергу, виражаються через значення $\mathcal{B}_i[u,s](\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t)$, а останні з урахуванням умови (15) та обмеження 1) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}_j^s[u,s](t)$ обчислюються згідно з першою альтернативою цілком однозначно.

Наступний етап дослідження – встановлення обмежень на параметри простору $\mathcal{M}$, при яких існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в цьому метричному просторі, яка і буде узагальненим розв'язком задачі (1)–(5). Для доведення існування та єдиності нерухомої точки оператора скористаємося теоремою Банаха про стискуючі відображення, а тому дослідимо, за яких умов оператор $\mathcal{A}$ переводить повний метричний простір $\mathcal{M}$ в себе, є стискуючим, а також виконується співвідношення (14).

Перевіримо виконання обмеження 1) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}_j^s[u,s](t)$.

Нехай $(u,s)\in\mathcal{M}$, $t_k\in[0,T_0]$, $k\in\{1,2\}$. Доведемо, що

$$\mathcal{A}_j^s[u,s]\in\mathrm{Lip}([0,T_0],\,S),\quad j\in\{1,2\},$$

або

$$\left|\triangle_k \mathcal{A}_j^s[u,s](t_k)\right| \le S|\triangle_k t_k|, \quad j \in \{1,2\}. \tag{16}$$

Враховуючи оцінки

$$\begin{aligned} &\left|s_j(t) - s_j^0\right| \le ST_0, \\ &\left|u_i(s_j(t),t) - \alpha_i(s_j^0)\right| \le U_0 + \alpha_0 ST_0, \end{aligned} \qquad t \in [0,T_0], \quad i \in \{1,\dots,n\}, \quad j \in \{1,2\},$$

при достатньо малих значеннях параметрів T_0 та U_0

$$T_0 \le T_0^2, \quad U_0 \le U_0^1,$$

отримуємо правильні нерівності

$$\left|g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t)) - g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))\right| \le 1, \quad t \in [0,T_0], \quad j \in \{1,2\}.$$

Справедливість умови (16) виводимо з оцінки

$$|\triangle_k \mathcal{A}_j^s[u,s](t_k)| \le \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} |g_j(s(\tau),\tau,\hat{u}(s(\tau),\tau))|\, d\tau \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(|g_j(s(\tau),\tau,\hat{u}(s(\tau),\tau)) - g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))| + |g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))|\right) d\tau \right| \le$$

$$\le S|\triangle_k t_k|.$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося у правильності співвідношення

$$\mathcal{A}_j^s[u,s](0) = s_j^0, \quad j \in \{1,2\}.$$

Доведемо виконання умови (14), якщо $(u,s) \in \mathcal{M}$, $t \in [0,T_0]$. Враховуючи оцінки

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{A}_j^s[u,s](t) - s_j^0\right| \le ST_0, \\ &\left|\mathcal{P}_i[u,s](\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t) - \alpha_i(s_j^0)\right| \le U_0 + \alpha_0 ST_0, \end{aligned} \qquad i \in \{1,\dots,n\}, \quad j \in \{1,2\},$$

при достатньо малих значеннях параметрів T_0 та U_0

$$T_0 \le T_0^3, \quad U_0 \le U_0^2,$$

маємо нерівності

$$\left|\lambda_i(\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t,\mathcal{P}[u,s](\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t)) - \lambda_i(s_j^0,0,\alpha(s_j^0))\right| +$$

$$+ \left|g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t)) - g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))\right| \le \delta.$$

Справедливість умови (14) виводимо з оцінки

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t)\Big|_{\tau=t}-\mathcal{A}^s_j[u,s]'(t)\right|=$$

$$=\Big|\lambda_i(\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t,\mathcal{P}[u,s](\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t))-g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t))\Big|\geq$$

$$\geq\big|\lambda_i(s^0_j,0,\alpha(s^0_j))-g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))\big|-$$

$$-\Big|\lambda_i(\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t,\mathcal{P}[u,s](\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t))-\lambda_i(s^0_j,0,\alpha(s^0_j))\Big|-$$

$$-\big|g_j(s(t),t,\hat{u}(s(t),t))-g_j(s^0,0,\hat{\alpha}(s^0))\big|\geq\delta.$$

Зафіксуємо

$$U_0=U_0^*,\quad \text{де}\quad U_0^*\leq\min\left\{U_0^1,U_0^2\right\}.$$

Покажемо виконання обмеження 2) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}^u_i[u,s](x,t)$.

Нехай $(u,s)\in\mathcal{M}$, $(x,t)\in\overline{D^{\mathcal{A}^s[u,s]}_{T_0}}$. Доведемо справедливість співвідношення

$$\big|\mathcal{A}^u_i[u,s](x,t)-\overline{\alpha_i}(x)\big|\leq U_0^*,\quad i\in\{1,\ldots,n\}. \tag{17}$$

Розглянемо перший випадок. Якщо $\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x,t)=0$, то правильною є оцінка

$$\big|\mathcal{B}_i[u,s](x,t)-\overline{\alpha_i}(x)\big|=$$

$$=\Big|\alpha_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](0;x,t)\Big)-\overline{\alpha_i}(x)\Big|\leq\alpha_0\big|\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](0;x,t)-x\big|\leq\alpha_0\Lambda T_0,$$

а отже, виконується нерівність

$$\Big|\mathcal{A}^u_i[u,s](x,t)-\overline{\alpha_i}(x)\Big|\leq\big|\mathcal{B}_i[u,s](x,t)-\overline{\alpha_i}(x)\big|+$$

$$+\int\limits_0^t\Big|f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t),\tau)\Big)\Big|\,d\tau\leq$$

$$\leq\alpha_0\Lambda T_0+FT_0=C_1T_0.$$

Тепер встановимо дві допоміжні оцінки.

На основі припущення (15) маємо

$$\chi_i\big[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]\big](\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t)=0,\quad j\in\{1,2\},\quad i\notin I_j,$$

тому має місце оцінка

$$\Big|\mathcal{A}^u_i[u,s]\big(\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t\big)-\alpha_i(s^0)\Big|\leq$$

$$\leq\big|\alpha_i\big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](0;\mathcal{A}^s_j[u,s](t),t)\big)-\alpha_i(s^0)\big|+$$

$$+\int_0^t \Big| f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t),\tau,$$

$$\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;\mathcal{A}_j^s[u,s](t),t),\tau)\Big)\Big|\, d\tau \le$$

$$\le \alpha_0(S+\Lambda)T_0 + FT_0 = C_2T_0.$$

Встановимо також наступну оцінку:

$$\left|\mathcal{J}_{ij}[u,s](t) - \int_{s_1^0}^{s_2^0} \gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))\,dy\right| \le$$

$$\le \int_{\mathcal{A}_1^s[u,s](t)}^{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t} |\gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u,s](y,t))|\,dy +$$

$$+\int_{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t}^{\mathcal{A}_2^s[u,s](t)} \big|\gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u,s](y,t))\big|\,dy +$$

$$+\left|\int_{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t}^{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t} \gamma_{ij}(y,t,\mathcal{A}^u[u,s](y,t))\,dy - \int_{s_1^0}^{s_2^0} \gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))\,dy\right| \le$$

$$\le 2\Gamma\big(S+\max\{S,\Lambda\}\big)T_0 +$$

$$+\int_{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t}^{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t} \big|\gamma_{ij}(y,t,\mathcal{A}^u[u,s](y,t))\,dy - \gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))\big|\,dy +$$

$$+\int_{s_1^0}^{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t} |\gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))|\,dy + \int_{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t}^{s_2^0} |\gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))|\,dy \le$$

$$\le 2\Gamma(S+\max\{S,\Lambda\})T_0 + 2\Gamma\max\{S,\Lambda\}T_0 +$$

$$+\int_{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t}^{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t} \gamma_0 \max\Big\{t,\ |\mathcal{A}^u[u,s](y,t)-\alpha(y)|\Big\}\,dy \le$$

$$\le 2\Gamma(S+2\max\{S,\Lambda\})T_0 + (s_2^0-s_1^0)\gamma_0(1+C_1)T_0 = C_3T_0.$$

Розглянемо другий випадок. Нехай $\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s};x,t) = \mathcal{A}_j^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})$. Тоді, використовуючи наведені вище співвідношення та умови узгодження 8 теореми, встановлюємо оцінку

$$\left|\mathcal{B}_i[u,s](x,t) - \overline{\alpha_i}(x)\right| =$$

$$= \Bigg|\beta_{ij}\Bigg(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s},$$

$$\widetilde{\mathcal{A}^u}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big), \mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})\Bigg) - \overline{\alpha_i}(x)\Bigg| \le$$

$$\le \Bigg|\beta_{ij}\Bigg(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}, \widetilde{\mathcal{A}^u}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big),$$

$$\mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s})\Bigg) - \beta_{ij}\left(s^0, 0, \tilde{\alpha}(s^0), \int\limits_{s_1^0}^{s_2^0} \gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))\,dy\right)\Bigg| + \left|\overline{\alpha_i}(x) - \alpha_i(s_j^0)\right| \le$$

$$\le \beta_0 \max\Bigg\{\left|\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}) - s^0\right|,\ \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s},$$

$$\left|\widetilde{\mathcal{A}^u}[u,s]\Big(\mathcal{A}^s[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}), \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}\Big) - \tilde{\alpha}(s^0)\right|,$$

$$\left|\mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}) - \int\limits_{s_1^0}^{s_2^0} \gamma_{ij}(y,0,\alpha(y))\,dy\right|\Bigg\} + \alpha_0|x - s_j^0| \le$$

$$\le \beta_0 \max\big\{ST_0,\ T_0,\ C_2T_0,\ C_3T_0\big\} + \alpha_0 \max\{S,\Lambda\}T_0 = C_4T_0.$$

Таким чином, в цьому випадку виконується нерівність

$$\left|\mathcal{A}_i^u[u,s](x,t) - \overline{\alpha_i}(x)\right| \le |\mathcal{B}_i[u,s](x,t) - \overline{\alpha_i}(x)| +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s}}^{t} \left|f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t), \tau, \mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t),\tau)\Big)\right| d\tau \le$$

$$\le C_4T_0 + FT_0 = C_5T_0.$$

Отже, об'єднавши розглянуті випадки, запишемо загальну оцінку

$$\left|\mathcal{A}_i^u[u,s](x,t) - \overline{\alpha_i}(x)\right| \le \max\{C_1, C_5\}T_0,$$

і, як наслідок, отримаємо співвідношення (17) за умови

$$\max\{C_1, C_5\}T_0 \le U_0^*,$$

або

$$T_0 \le T_0^4, \quad \text{де} \quad T_0^4 = \frac{U_0^*}{\max\{C_1, C_5\}}.$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що виконується рівність

$$\mathcal{A}_i^u[u, s](x, 0) = \alpha_i(x), \quad x \in [s_1^0, s_2^0], \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Перевіримо виконання обмеження III) простору $\mathcal{M}$ щодо функцій $\mathcal{A}_i^u[u, s](x, t)$.

Нехай $(u, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, $(x, t_k) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, $k \in \{1, 2\}$, доведемо справедливість умови

$$\mathcal{A}_i^u[u, s] \in \mathrm{Lip}\Big(\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}},\, L_x, L_t\Big), \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

або

$$\begin{gathered} \big|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u, s](x_k, t)\big| \le L_x |\triangle_k x_k|, \\ \big|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u, s](x, t_k)\big| \le L_t |\triangle_k t_k|, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \end{gathered} \tag{18}$$

Наведемо кілька допоміжних оцінок у вигляді лем.

Лема 2. *Нехай* $(u, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^s}$, $k \in \{1, 2\}$, *тоді справджується оцінка*

$$\big|\triangle_k \varphi_i[u](\tau; x_k, t)\big| \le e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k|, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Доведення випливає з інтегрального зображення функції $\varphi_i[u](\tau; x, t)$:

$$\varphi_i[u](\tau; x, t) = x + \int\limits_t^\tau \lambda_i\Big(\varphi_i[u](\xi; x, t), \xi, u(\varphi_i[u](\xi; x, t), \xi)\Big)\, d\xi, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

і, як наслідок, оцінки

$$\big|\triangle_k \varphi_i[u](\tau; x_k, t)\big| \le |\triangle_k x_k| + \int\limits_\tau^t \lambda_0 L_x |\triangle_k \varphi_i[u](\xi; x_k, t)|\, d\xi,$$

та леми Гронуолла – Беллмана.

Із леми 2 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $(u, s) \in \mathcal{M}$, $(x_k, t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, $k \in \{1, 2\}$, *тоді справджується оцінка*

$$\big|\triangle_k \varphi_i[\mathcal{P}[u, s]](\tau; x_k, t)\big| \le e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k|, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Лема 3. *Нехай* $(u,s) \in \mathcal{M}$, $(x_k,t) \in \overline{D^s_{T_0}}$, *а також задовольняється обмеження* $\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_k,t);x_k,t) = s_j(\chi_i[u,s](x_k,t))$, $k \in \{1,2\}$, *для деякого* $j \in \in \{1,2\}$, *до того ж виконуються умови* (12) *та*

$$\lambda_0 L_x(S+\Lambda)T_0 \le \frac{\delta}{2}. \tag{19}$$

Тоді має місце оцінка

$$\left|\triangle_k \chi_i[u,s](x_k,t)\right| \le \frac{2}{\delta} e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k|, \quad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Доведення леми. Покладемо для визначеності $x_1 < x_2$, $\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_k,t); x_k,t) = s_1(\chi_i[u,s](x_k,t))$, $k \in \{1,2\}$. Тоді, як наслідок, одержимо $\chi_i[u,s](x_2,t) < < \chi_i[u,s](x_1,t)$. Нехай $t_0 \in [\chi_i[u,s](x_2,t),\, t]$, тоді справджується оцінка

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;x_2,t)\Big|_{\tau=t_0} - s_1'(t_0)\right| \ge$$

$$\ge \left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;s_1(t_0),t_0)\Big|_{\tau=t_0} - s_1'(t_0)\right| -$$

$$- \left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;x_2,t)\Big|_{\tau=t_0} - \frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;s_1(t_0),t_0)\Big|_{\tau=t_0}\right| \ge$$

$$\ge \delta - \Big|\lambda_i\Big(\varphi_i[u](t_0;x_2,t), t_0, u(\varphi_i[u](t_0;x_2,t),t_0)\Big) -$$

$$-\lambda_i\Big(s_1(t_0), t_0, u(s_1(t_0),t_0)\Big)\Big| \ge$$

$$\ge \delta - \lambda_0 L_x |\varphi_i[u](t_0;x_2,t) - s_1(t_0)| \ge \delta - \lambda_0 L_x(S+\Lambda)T_0 \ge \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Використовуючи дану оцінку та теорему Лагранжа, виводимо співвідношення

$$\left|\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_1,t);x_2,t) - s_1(\chi_i[u,s](x_1,t))\right| =$$

$$= \left|\frac{d}{d\tau}\varphi_i[u](\tau;x_2,t)\Big|_{\tau=t_0} - s_1'(t_0)\right| \left|\triangle_k \chi_i[u,s](x_k,t)\right| \ge \frac{\delta}{2}\left|\triangle_k \chi_i[u,s](x_k,t)\right|,$$

де t_0 є деяким фіксованим значенням з проміжку $(\chi_i[u,s](x_2,t),\, \chi_i[u,s](x_1,t))$ і, як наслідок, отримуємо оцінку

$$\left|\triangle_k \chi_i[u,s](x_k,t)\right| \le \frac{2}{\delta}\left|\varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_1,t);x_2,t) - s_1(\chi_i[u,s](x_1,t))\right| =$$

$$= \frac{2}{\delta}\left|\triangle_k \varphi_i[u](\chi_i[u,s](x_1,t);x_k,t)\right| \le \frac{2}{\delta} e^{\lambda_0 L_x T_0} |\triangle_k x_k|.$$

Лему доведено.

Із леми 3 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $(u,s)\in\mathcal{M}$, $(x_k,t)\in\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u,s]}}$, *а також задовольняється обмеження*

$$\varphi_i\big[\mathcal{P}[u,s]\big]\big(\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t);x_k,t\big)=$$

$$=\mathcal{A}^s_j[u,s]\big(\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t)\big),\quad k\in\{1,2\},$$

для деякого $j\in\{1,2\}$, *до того ж виконуються умови* (14) *та* (19). *Тоді справджується оцінка*

$$\Big|\triangle_k\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t)\Big|\le\frac{2}{\delta}e^{\lambda_0L_xT_0}|\triangle_kx_k|,\quad i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Використавши наслідки 1 та 2, встановимо умови, за яких виконуються співвідношення (18). Припустимо, що виконується обмеження

$$\max\{L_x,L_t\}T_0\le 1, \tag{20}$$

та позначимо

$$\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}\stackrel{\mathrm{df}}{=}\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x_k,t),\qquad \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k}\stackrel{\mathrm{df}}{=}\chi_i[\mathcal{P}[u,s],\mathcal{A}^s[u,s]](x,t_k).$$

Розглянемо перший випадок. Нехай $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}=0,\ k\in\{1,2\}$, тоді має місце оцінка

$$\big|\triangle_k\mathcal{A}^u_i[u,s](x_k,t)\big|\le\Big|\triangle_k\alpha_i\big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](0;x_k,t)\big)\Big|+$$

$$+\int\limits_0^t\Big|\triangle_kf_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x_k,t),\tau,\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x_k,t),\tau)\Big)\Big|\,d\tau\le$$

$$\le(\alpha_0+f_0L_xT_0)e^{\lambda_0L_xT_0}|\triangle_kx_k|\le(\alpha_0+f_0)e^{\lambda_0}|\triangle_kx_k|=C_6|\triangle_kx_k|,$$

а якщо $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k}=0$, $k\in\{1,2\}$, то

$$\big|\triangle_k\mathcal{A}^u_i[u,s](x,t_k)\big|\le\Big|\triangle_k\alpha_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](0;x,t_k)\Big)\Big|+$$

$$+\left|\triangle_k\int\limits_0^{t_k}f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t_k),\tau,\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t_k),\tau)\Big)\,d\tau\right|\le$$

$$\le((\alpha_0+f_0L_xT_0)\Lambda e^{\lambda_0L_xT_0}+F)|\triangle_kt_k|\le$$

$$\le((\alpha_0+f_0)\Lambda e^{\lambda_0}+F)|\triangle_kt_k|=C_7|\triangle_kt_k|.$$

Отримаємо кілька допоміжних оцінок:

$$\big|\triangle_k\mathcal{P}[u,s](x,t_k)\big|\le(L_xS+L_t)|\triangle_kt_k|,$$

а також

$$\left|\triangle_k \mathcal{J}_{ij}[u,s](t_k)\right| \leq \left|\triangle_k \int\limits_{\mathcal{A}_1^s[u,s](t_k)}^{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t_k} \gamma_{ij}(y,t_k,\mathcal{P}[u,s](y,t_k))\,dy\right| +$$

$$+\left|\triangle_k \int\limits_{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t_k}^{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t_k} \gamma_{ij}(y,t_k,\mathcal{A}^u[u,s](y,t_k))\,dy\right| +$$

$$+\left|\triangle_k \int\limits_{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t_k}^{\mathcal{A}_2^s[u,s](t_k)} \gamma_{ij}(y,t_k,\mathcal{P}[u,s](y,t_k))\,dy\right| \leq$$

$$\leq \Big(2\Gamma S + 4\Gamma\max\{S,\Lambda\} + \gamma_0(L_xS+L_t)\times$$

$$\times 4\max\{S,\Lambda\}T_0 + \gamma_0\max\{1,C_7\}(s_2^0-s_1^0)\Big)|\triangle_k t_k| \leq$$

$$\leq \Big((6\Gamma + 4\gamma_0(S+1))\max\{S,\Lambda\} + \gamma_0\max\{1,C_7\}(s_2^0-s_1^0)\Big)|\triangle_k t_k| = C_8|\triangle_k t_k|.$$

Тепер розглянемо другий випадок.

Нехай $\varphi_i\big[\mathcal{P}[u,s]\big]\Big(\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k};x_k,t\Big) = \mathcal{A}_j^s[u,s]\Big(\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}\Big) := \hat{\mathcal{A}}_j^s[u,s]^{x_k},\ k \in \in \{1,2\}$, для деякого $j\in\{1,2\}$. Тоді встановлюємо оцінку

$$\left|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u,s](x_k,t)\right| \leq$$

$$\leq \Bigg|\triangle_k \beta_{ij}\Bigg(\hat{\mathcal{A}}_j^s[u,s]^{x_k},\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k},$$

$$\widetilde{\mathcal{A}^u}[u,s]\Big(\hat{\mathcal{A}}_j^s[u,s]^{x_k},\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}\Big),\mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k})\Bigg)\Bigg| +$$

$$+\left|\triangle_k \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}}^{t} f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x_k,t),\tau,\mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x_k,t),\tau)\Big)\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq (\beta_0\max\{S,\,C_6(S+\Lambda)+F,\,C_8\}+F)|\triangle_k\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}| + f_0L_xT_0e^{\lambda_0L_xT_0}|\triangle_k x_k| =$$

$$= C_9|\triangle_k\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,x_k}| + f_0L_xT_0e^{\lambda_0L_xT_0}|\triangle_k x_k| \leq$$

$$\leq (C_9\frac{2}{\delta}e^{\lambda_0} + f_0e^{\lambda_0})|\triangle_k x_k| = C_{10}|\triangle_k x_k|,$$

а якщо $\varphi_i\big[\mathcal{P}[u,s]\big]\Big(\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k};x,t_k\Big) = \mathcal{A}_j^s[u,s]\Big(\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k}\Big) := \hat{\mathcal{A}}_j^s[u,s]^{t_k},\ k\in\{1,2\}$, для деякого $j\in\{1,2\}$, то

$$\left|\triangle_k \mathcal{A}_i^u[u,s](x,t_k)\right| \leq$$

$$\leq \left| \triangle_k \beta_{ij} \Big(\hat{\mathcal{A}}_j^s[u,s]^{t_k}, \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k},\right.$$

$$\left. \widetilde{\mathcal{A}^u}[u,s]\Big(\hat{\mathcal{A}}_j^s[u,s]^{t_k}, \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k} \Big), \mathcal{J}_{ij}[u,s](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k}) \Big) \right| +$$

$$+ \left| \triangle_k \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k}}^{t_k} f_i \Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t_k), \tau, \mathcal{P}[u,s](\varphi_i[\mathcal{P}[u,s]](\tau;x,t_k),\tau) \Big)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq C_9 |\triangle_k \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,t_k}| + (f_0 L_x T_0 \Lambda e^{\lambda_0 L_x T_0} + F)|\triangle_k t_k| \leq$$

$$\leq (C_9 \frac{2}{\delta} \Lambda e^{\lambda_0} + f_0 \Lambda e^{\lambda_0} + F)|\triangle_k t_k| = C_{11} |\triangle_k t_k|.$$

Зауважимо, що решта випадків зводяться до розглянутих двох уведенням проміжної точки. Таким чином, співвідношення (18) виконується за умови

$$L_x \geq L_x^1, \qquad L_t \geq L_t^1, \quad \text{де} \quad L_x^1 = \max\{C_6, C_{10}\}, \qquad L_t^1 = \max\{C_7, C_{11}\}.$$

Зафіксуємо

$$L_x = L_x^*, \quad L_t = L_t^*, \quad \text{де} \quad L_x^* \geq L_x^1, \quad L_t^* \geq L_t^1, \tag{21}$$

після чого обмеження (19) та (20) зарепишемо у вигляді

$$T_0 \leq T_0^5, \quad \text{де} \quad T_0^5 = \frac{\delta}{2\lambda_0 L_x^* (S + \Lambda)},$$

$$T_0 \leq T_0^6, \quad \text{де} \quad T_0^6 = \frac{1}{\max\{L_x^*, L_t^*\}}.$$

Дослідимо властивість стиску оператора $\mathcal{A}$. Нехай $(u^k, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$. Дослідимо величину коефіцієнта κ, для якого виконується співвідношення

$$\rho\Big((\mathcal{A}^u[u^1,s^1], \mathcal{A}^s[u^1,s^1]),\, (\mathcal{A}^u[u^2,s^2], \mathcal{A}^s[u^2,s^2]) \Big) \leq \kappa \rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)),$$

або

$$|\triangle_k \mathcal{A}^s[u^k,s^k](t)| \leq \kappa \rho\big((u^1,s^1),(u^2,s^2)\big), \quad t \in [0,T_0], \tag{22}$$

$$|\triangle_k \bar{\mathcal{A}}^u[u^k,s^k](x,t)| \leq \kappa \rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)), \quad (x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}} \cup \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}. \tag{23}$$

Наведемо також кілька допоміжних оцінок у вигляді лем.

Лема 4. *Нехай* $(u^k, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}} \cap \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$, *тоді справджується оцінка*

$$\big|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k,s^k](x,t)\big| \leq (1 + L_x)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)), \quad i \in \{1,\dots,n\}.$$

Доведення. Покладемо для визначеності $s_1^1(t) \le s_1^2(t)$, $x \le \min\left\{s_2^1(t), s_2^2(t)\right\}$. Розглянемо можливі випадки. Якщо $s_1^2(t) \le x$, то виводимо оцінку

$$\left|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k, s^k](x,t)\right| = |\triangle_k u^k(x,t)| \le \rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)),$$

якщо ж $s_1^1(t) \le x \le s_1^2(t)$, то

$$\left|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k, s^k](x,t)\right| =$$

$$= |u_i^1(x,t) - u_i^2(s_1^2(t),t)| \le |u_i^1(x,t) - u_i^1(s_1^2(t),t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$

$$\le L_x|x - s_1^2(t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le L_x|\triangle_k s_1^k(t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$

$$\le (1 + L_x)\rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)),$$

а якщо $x \le s_1^1(t)$, то отримуємо оцінку

$$\left|\triangle_k \mathcal{P}_i[u^k, s^k](x,t)\right| = |\triangle_k u_i^k(s_1^k(t),t)| \le$$

$$\le |\triangle_k u_i^1(s_1^k(t),t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le L_x|\triangle_k s_1^k(t)| + |\triangle_k u_i^k(s_1^2(t),t)| \le$$

$$\le (1 + L_x)\rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)).$$

Лему доведено.

Лема 5. *Нехай* $(u^k, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{s^1}} \cap \overline{D_{T_0}^{s^2}}$. *Тоді справджується оцінка*

$$\left|\triangle_k \varphi_i[u^k](\tau; x,t)\right| \le \lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}\rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)), \quad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Доведення випливає з оцінки

$$\left|\triangle_k \varphi_i[u^k](\tau; x,t)\right| \le \int\limits_\tau^t \left|\triangle_k \lambda_i\Big(\varphi_i[u^k](\xi; x,t), \xi, u^k(\varphi_i[u^k](\xi; x,t), \xi)\Big)\right| d\xi \le$$

$$\le \lambda_0 T_0 \rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)) + \int\limits_\tau^t \lambda_0 L_x |\triangle_k \varphi_i[u^k](\xi; x,t)|\, d\xi,$$

та леми Гронуолла – Беллмана.

Наслідок 3. *Нехай* $(u^k, s^k) \in \mathcal{M}$, $k \in \{1,2\}$, $(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}} \cap \overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$, *тоді справджується оцінка*

$$\left|\triangle_k \varphi_i[\mathcal{P}[u^k, s^k]](\tau; x,t)\right| \le$$

$$\le \lambda_0(1 + L_x)T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}\rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)), \quad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Лема 6. *Нехай* $(u^k, s^k) \in \mathcal{M}$, $(x,t) \in \overline{D_{T_0}^{s^1}} \cap \overline{D_{T_0}^{s^2}}$, *а також мають місце обмеження* $\varphi_i[u^k](\chi_i[u^k, s^k](x,t); x,t) = s_j^k(\chi_i[u^k, s^k](x,t))$, $k \in \{1,2\}$, *для деякого* $j \in \{1,2\}$, *до того ж виконуються умови* (12) *(для кожного набору* (u^k, s^k), $k \in \{1,2\}$) *та* (19). *Тоді справджується оцінка*

$$\left|\triangle_k \chi_i[u^k, s^k](x,t)\right| \leq \frac{2}{\delta}(\lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} + 1)\rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)), \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Доведення. Покладемо $\varphi_i[u^k](\chi_i[u^k, s^k](x,t); x, t) = s_1^k(\chi_i[u^k, s^k](x,t))$, $k \in \in \{1, 2\}$, і для визначеності візьмемо $\chi_i[u^2, s^2](x,t) < \chi_i[u^1, s^1](x,t)$.

Нехай $t_0 \in [\chi_i[u^2, s^2](x,t),\, t]$, тоді має місце оцінка

$$\left| \frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau; x, t)\Big|_{\tau=t_0} - (s_1^2)'(t_0) \right| \geq$$

$$\geq \left| \frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau; s_1^2(t_0), t_0)\Big|_{\tau=t_0} - (s_1^2)'(t_0) \right| -$$

$$- \left| \frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau; x, t)\Big|_{\tau=t_0} - \frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau; s_1^2(t_0), t_0)\Big|_{\tau=t_0} \right| \geq$$

$$\geq \delta - \Big| \lambda_i\Big(\varphi_i[u^2](t_0; x, t), t_0, u^2(\varphi_i[u^2](t_0; x, t), t_0)\Big) -$$

$$-\lambda_i\Big(s_1^2(t_0), t_0, u^2(s_1^2(t_0), t_0)\Big)\Big| \geq$$

$$\geq \delta - \lambda_0 L_x |\varphi_i[u^2](t_0; x, t) - s_1^2(t_0)| \geq \delta - \lambda_0 L_x (S + \Lambda) T_0 \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Використовуючи дану оцінку та теорему Лагранжа, виводимо співвідношення

$$\left|\varphi_i[u^2](\chi_i[u^1, s^1](x,t); x, t) - s_1^2(\chi_i[u^1, s^1](x,t))\right| =$$

$$= \left| \frac{d}{d\tau}\varphi_i[u^2](\tau; x, t)\Big|_{\tau=t_0} - (s_1^2)'(t_0) \right| |\triangle_k \chi_i[u^k, s^k](x,t)| \geq$$

$$\geq \frac{\delta}{2} |\triangle_k \chi_i[u^k, s^k](x,t)|,$$

де t_0 є деяким фіксованим значенням з проміжку $(\chi_i[u^2, s^2](x,t),\, \chi_i[u^1, s^1](x,t))$ і, як наслідок, отримуємо оцінку

$$|\triangle_k \chi_i[u^k, s^k](x,t)| \leq \frac{2}{\delta} |\varphi_i[u^2](\chi_i[u^1, s^1](x,t); x, t) - s_1^2(\chi_i[u^1, s^1](x,t))| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\delta}\Big(|\triangle_k \varphi_i[u^k](\chi_i[u^1, s^1](x,t); x, t)| + |\triangle_k s_1^k(\chi_i[u^1, s^1](x,t))| \Big) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\delta}(\lambda_0 T_0 e^{\lambda_0 L_x T_0} + 1)\rho((u^1, s^1), (u^2, s^2)).$$

Лему доведено.

Визначимо коефіцієнт κ, для якого виконується співвідношення (22)

$$\left|\triangle_k \mathcal{A}_j^s[u^k,s^k](t)\right| \le \int\limits_0^t |\triangle_k g_j(s^k(\tau),\tau,\hat{u}^k(s^k(\tau),\tau))|\,d\tau \le$$

$$\le g_0(1+L_x^*)T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Використавши отриману вище оцінку, запишемо наслідок із леми 6.

***Наслідок* 4.** *Нехай* $(u^k,s^k)\in\mathcal{M}$, $(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}}\cap\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$, *виконується умова* $\varphi_i\big[\mathcal{P}[u^k,s^k]\big]\Big(\chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t);x,t\Big) = \mathcal{A}_j^s[u^k,s^k]\Big(\chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],$ $\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t)\Big)$, $k\in\{1,2\}$, *для деякого* $j\in\{1,2\}$, *до того ж задовольняються обмеження* (14) (*для кожного набору* (u^k,s^k), $k\in\{1,2\}$) *та* (19). *Тоді справджується оцінка*

$$\Big|\triangle_k\chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t)\Big| \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}(\lambda_0 e^{\lambda_0 L_x T_0}+g_0)(1+L_x)T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)),\quad i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Використавши наслідки 3 та 4, визначимо коефіцієнт κ, для якого виконується співвідношення (23). Позначимо $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k} \overset{\text{df}}{=} \chi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k],\mathcal{A}^s[u^k,s^k]](x,t)$ та зафіксуємо $(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}}\cap\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$.

Розглянемо перший випадок. Нехай $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}=0,\ k\in\{1,2\}$, тоді має місце оцінка

$$\left|\triangle_k\mathcal{A}_i^u[u^k,s^k](x,t)\right| \le \Big|\triangle_k\alpha_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](0;x,t)\Big)\Big| +$$

$$+\int\limits_0^t \Big|\triangle_k f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}[u^k,s^k](\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\tau;x,t),\tau)\Big)\Big|\,d\tau \le$$

$$\le \Big((\alpha_0+f_0L_x^*T_0)\lambda_0(1+L_x^*)T_0e^{\lambda_0L_x^*T_0}+f_0(1+L_x^*)T_0\Big)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) \le$$

$$\le \Big((\alpha_0+f_0)\lambda_0(1+L_x^*)T_0e^{\lambda_0}+f_0(1+L_x^*)T_0\Big)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) =$$

$$= C_{12}T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Отримаємо допоміжну оцінку

$$\left|\triangle_k\mathcal{J}_{ij}[u^k,s^k](t)\right| \le \left|\triangle_k \int\limits_{\mathcal{A}_1^s[u^k,s^k](t)}^{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t} \gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u^k,s^k](y,t))\,dy\right| +$$

$$+\left|\triangle_k \int\limits_{s_1^0+\max\{S,\Lambda\}t}^{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t} \gamma_{ij}(y,t,\mathcal{A}^u[u^k,s^k](y,t))\,dy\right| +$$

$$+\left|\triangle_k \int\limits_{s_2^0-\max\{S,\Lambda\}t}^{\mathcal{A}_2^s[u^k,s^k](t)} \gamma_{ij}(y,t,\mathcal{P}[u^k,s^k](y,t))\,dy\right| \leq$$

$$\leq \Big(2\Gamma g_0(1+L_x^*)T_0 + \gamma_0(1+L_x^*)\times$$

$$\times 4\max\{S,\Lambda\}T_0 + (s_2^0 - s_1^0)\gamma_0 C_{12}T_0\Big)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) =$$

$$= C_{13}T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Розглянемо другий випадок. Нехай виконується умова $\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}; x,t) = \mathcal{A}_j^s[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k})$, $k\in\{1,2\}$, для деякого $j\in\{1,2\}$. Тоді встановлюємо оцінку

$$\left|\triangle_k\mathcal{A}_i^u[u^k,s^k](x,t)\right| \leq \left|\triangle_k\beta_{ij}\bigg(\mathcal{A}^s[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}),\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k},\right.$$

$$\left.\widetilde{\mathcal{A}^u}[u^k,s^k]\Big(\mathcal{A}^s[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}),\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\Big),\mathcal{J}_{ij}[u^k,s^k](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k})\bigg)\right|+$$

$$+\left|\triangle_k \int\limits_{\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}}^{t} f_i\Big(\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\tau;x,t),\tau,\mathcal{P}[u^k,s^k](\varphi_i[\mathcal{P}[u^k,s^k]](\tau;x,t),\tau)\Big)\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq C_9\left|\triangle_k\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^k,s^k}\right| + \Big(\beta_0 L_x^* g_0(1+L_x^*)T_0 + \beta_0\max\{C_{12},C_{13}\}T_0+$$

$$+f_0L_x^*T_0\lambda_0(1+L_x^*)T_0e^{\lambda_0L_x^*T_0} + f_0(1+L_x^*)T_0\Big)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) \leq$$

$$\leq \bigg(C_9\frac{2}{\delta}(\lambda_0e^{\lambda_0L_x^*T_0}+g_0)(1+L_x^*)T_0+$$

$$+\beta_0L_x^*g_0(1+L_x^*)T_0 + \beta_0\max\{C_{12},C_{13}\}T_0+$$

$$+f_0L_x^*T_0\lambda_0(1+L_x^*)T_0e^{\lambda_0L_x^*T_0} + f_0(1+L_x^*)T_0\bigg)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) \leq$$

$$\leq \Big(C_9\frac{2}{\delta}(\lambda_0e^{\lambda_0}+g_0)(1+L_x^*)T_0 + \beta_0L_x^*g_0(1+L_x^*)T_0 + \beta_0\max\{C_{12},C_{13}\}T_0+$$

$$+f_0\lambda_0(1+L_x^*)T_0e^{\lambda_0} + f_0(1+L_x^*)T_0\Big)\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)) =$$

$$= C_{14}T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Розглянемо третій можливий випадок.

Нехай $\varphi_i[\mathcal{P}[u^1,s^1]](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^1,s^1};x,t)=\mathcal{A}_j^s[u^1,s^1](\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^1,s^1})$, для деякого $j\in\in\{1,2\}$ (для визначеності покладемо $j=1$), до того ж $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^2,s^2}=0$. Цей випадок можна звести до двох попередніх, визначивши належним чином проміжний елемент $(u^3,s^3)\in\mathcal{M}$.

Визначимо пару вектор-функцій $(u^\eta,s^3),\ \eta\in[0,1]$:

$$s^3=(s_1^3,s_2^3),\quad \text{де}\quad s_1^3(t)=\min\left\{s_1^1(t),s_1^2(t)\right\},$$

$$s_2^3(t)=\max\left\{s_2^1(t),s_2^2(t)\right\},\quad t\in[0,T_0],$$

$$u^\eta=(u_1^\eta,\ldots,u_n^\eta),\quad \text{де}\quad u_i^\eta(x,t)=\eta\bar u_i^1(x,t)+(1-\eta)\bar u_i^2(x,t),\quad (x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^3}}.$$

Легко бачити, що $(u^\eta,s^3)\in\mathcal{M}$. Зауважимо, що $(u^0,s^3)\overset{\text{df}}{=}(\bar u^2,s^3)$, а $(u^1,s^3)\overset{\text{df}}{=}\overset{\text{df}}{=}(\bar u^1,s^3)$.

Лема 7. *Нехай* $(u^k,s^k)\in\mathcal{M}$, $k\in\{1,2\}$, *тоді справджується оцінка*

$$\max\Big\{\rho((u^1,s^1),(u^\eta,s^3)),\ \rho((u^2,s^2),(u^\eta,s^3))\Big\}\le\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Доведення. Дане співвідношення випливає з наступної послідовності оцінок:

$$\max\Big\{\rho\big((u^1,s^1),(u^\eta,s^3)\big),\ \rho\big((u^2,s^2),(u^\eta,s^3)\big)\Big\}=$$

$$=\max\left\{\max\left\{\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^1}\cup D_{T_0}^{s^3}}}}|\bar u_i^1(x,t)-u_i^\eta(x,t)|,\ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\t\in[0,T_0]}}|s_j^1(t)-s_j^3(t)|\right\},\right.$$

$$\left.\max\left\{\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^2}\cup D_{T_0}^{s^3}}}}|\bar u_i^2(x,t)-u_i^\eta(x,t)|,\ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\t\in[0,T_0]}}|s_j^2(t)-s_j^3(t)|\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\max\left\{\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^1}\cup D_{T_0}^{s^3}}}}|\bar u_i^1(x,t)-u_i^\eta(x,t)|,\quad \max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^2}\cup D_{T_0}^{s^3}}}}|\bar u_i^2(x,t)-u_i^\eta(x,t)|\right\},\right.$$

$$\left.\max\left\{\max_{\substack{j\in\{1,2\}\\t\in[0,T_0]}}|s_j^1(t)-s_j^3(t)|,\ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\t\in[0,T_0]}}|s_j^2(t)-s_j^3(t)|\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\max\left\{(1-\eta)\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^3}}}}|\bar u_i^1(x,t)-\bar u_i^2(x,t)|,\ \eta\max_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^3}}}}|\bar u_i^1(x,t)-\bar u_i^2(x,t)|\right\},\right.$$

$$\max\left\{\max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}}|s_j^1(t)-s_j^3(t)|,\ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}}|s_j^2(t)-s_j^3(t)|\right\}\Bigg\}\le$$

$$\le\max\left\{\max_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ (x,t)\in\overline{D_{T_0}^{s^1}\cup D_{T_0}^{s^2}}}}|\bar u_i^1(x,t)-\bar u_i^2(x,t)|,\ \max_{\substack{j\in\{1,2\}\\ t\in[0,T_0]}}|s_j^1(t)-s_j^2(t)|\right\}=$$

$$=\rho\big((u^1,s^1),(u^2,s^2)\big).$$

Лему доведено.

Якщо при деякому $\eta_0\in\{0,1\}$ правильними є рівності

$$\varphi_i\big[\mathcal{P}[u^{\eta_0},s^3]\big]\Big(\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^{\eta_0},s^3};x,t\Big)=s_1^0,\quad \chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^{\eta_0},s^3}=0, \tag{24}$$

то позначимо $u^3\overset{\text{df}}{=}u^{\eta_0}$.

Якщо ж $\varphi_i\big[\mathcal{P}[u^0,s^3]\big]\Big(\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^0,s^3};x,t\Big)>s_1^0$, до того ж $\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^1,s^3}>0$, то визначимо функцію

$$\phi(\eta)\overset{\text{def}}{=}\varphi_i\big[\mathcal{P}[u^{\eta},s^3]\big]\Big(\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^{\eta},s^3};x,t\Big)-(S+1)\chi_i^{\mathcal{P},\mathcal{A}^s,u^{\eta},s^3}.$$

Зауважимо, що $\phi(\eta)\in C[0,1]$. Правильними є співвідношення $\phi(0)>s_1^0$, $\phi(1)<$ $<s_1^0$, звідки виводимо існування значення $\eta_0\in(0,1)$, для якого має місце рівність $\phi(\eta_0)=s_1^0$, і, як наслідок, отримуємо співвідношення (24). В цьому випадку позначимо $u^3\overset{\text{df}}{=}u^{\eta_0}$.

Легко бачити, що елементи (u^1,s^1), (u^3,s^3) відповідають умовам другого випадку, тоді як елементи (u^2,s^2), (u^3,s^3) задовольняють умови першого випадку. Таким чином, справедливою є оцінка

$$\big|\triangle_k\mathcal{A}_i^u[u^k,s^k](x,t)\big|\le$$

$$\le\Big|\mathcal{A}_i^u[u^1,s^1](x,t)-\mathcal{A}_i^u[u^3,s^3](x,t)\Big|+\Big|\mathcal{A}_i^u[u^2,s^2](x,t)-\mathcal{A}_i^u[u^3,s^3](x,t)\Big|\le$$

$$\le C_{14}T_0\rho((u^1,s^1),(u^3,s^3))+C_{12}T_0\rho((u^2,s^2),(u^3,s^3))\le$$

$$\le(C_{12}+C_{14})T_0\max\Big\{\rho((u^1,s^1),(u^3,s^3)),\ \rho((u^2,s^2),(u^3,s^3))\Big\}\le$$

$$\le(C_{12}+C_{14})T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2)).$$

Зафіксуємо $(x,t)\in\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^1,s^1]}}\setminus\overline{D_{T_0}^{\mathcal{A}^s[u^2,s^2]}}$ (для визначеності $x<\mathcal{A}_1^s[u^2,s^2]$), тоді

$$\big|\triangle_k\bar{\mathcal{A}}_i^u[u^k,s^k](x,t)\big|=\Big|\mathcal{A}_i^u[u^2,s^2](\mathcal{A}_1^s[u^2,s^2](t),t)-\mathcal{A}_i^u[u^1,s^1](x,t)\Big|\le$$

$$\le\Big|\triangle_k\mathcal{A}_i^u[u^k,s^k](\mathcal{A}_1^s[u^2,s^2](t),t)\Big|+$$

$$+\Big|\mathcal{A}_i^u[u^1,s^1](x,t)-\mathcal{A}_i^u[u^1,s^1](\mathcal{A}_1^s[u^2,s^2](t),t)\Big|\le$$

$$\le\Big|\triangle_k\mathcal{A}_i^u[u^k,s^k](\mathcal{A}_1^s[u^2,s^2](t),t)\Big|+L_x^*\Big|\triangle_k\mathcal{A}_1^s[u^k,s^k](t)\Big|\le$$

$$\le(C_{12}+C_{14}+L_x^*g_0(1+L_x^*))T_0\rho((u^1,s^1),(u^2,s^2))=$$

$$=C_{15}T_0\rho\big((u^1,s^1),(u^2,s^2)\big).$$

Використавши отримані оцінки, запишемо співвідношення

$$\rho\Big(\big(\mathcal{A}^u[u_1,s_1],\mathcal{A}^s[u_1,s_1]\big),\,\big(\mathcal{A}^u[u_2,s_2],\mathcal{A}^s[u_2,s_2]\big)\Big)\le$$

$$\le\max\big\{C_{15},\;g_0(1+L_x^*)\big\}T_0\rho((u_1,s_1),(u_2,s_2)),$$

а тому оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим, якщо

$$\max\big\{C_{15},\;g_0(1+L_x^*)\big\}T_0<1,$$

або

$$T_0<T_0^7,\quad \text{де}\quad T_0^7=\frac{1}{\max\{C_{15},\;g_0(1+L_x^*)\}}.$$

Зафіксуємо

$$T_0=T_0^*,\quad \text{де}\quad T_0^*\le\min\big\{T_0^1,T_0^2,T_0^3,T_0^4,T_0^5,T_0^6\big\},\quad T_0^*<T_0^7, \tag{25}$$

та позначимо $\mathcal{M}^*\overset{\text{df}}{=}\mathcal{M}(T_0^*,U_0^*,L_x^*,L_t^*)$.

Таким чином, оператор $\mathcal{A}$ переводить метричний простір $\mathcal{M}^*$ в себе і є стискуючим на елементах цього простору. Отже, за теоремою Банаха про стискуючі відображення існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$, тобто набір функцій $(u^*,s^*)\in\mathcal{M}^*$, що задовольняє операторну рівність

$$\mathcal{A}[u^*,s^*]=(u^*,s^*),$$

або систему рівностей

$$\mathcal{A}_j^s[u^*,s^*](t)=s_j^*(t),\quad t\in[0,T_0^*],\quad j\in\{1,2\},$$

$$\mathcal{A}_i^u[u^*,s^*](x,t)=u_i^*(x,t),\quad (x,t)\in\overline{D_{T_0^*}^{s^*}},\quad i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Отриманий набір функцій є узагальненим розв'язком задачі (1) – (5), до того ж він єдиний у метричному просторі $\mathcal{M}^*$.

Доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1) – (5) (без додаткової вимоги належності простору $\mathcal{M}^*$). Нехай $(u^{\circledast},s^{\circledast})$ — інший узагальнений розв'язок задачі, визначений на відрізку $[0,T_0^*]$, до того ж $(u^*,s^*)\ne(u^{\circledast},s^{\circledast})$.

Якщо $s_j^*(t)=s_j^{\circledast}(t)$, $t\in[0,T_0^*]$, $j\in\{1,2\}$, то покладемо $t_1\overset{\text{df}}{=}T_0^*$, в іншому випадку визначимо

$$t_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf \Big\{ t \in [0, T_0^*] \colon \exists j \in \{1, 2\},\ s_j^*(t) \neq s_j^{\circledast}(t) \Big\}.$$

Тоді $s_j^*(t) = s_j^{\circledast}(t)$, $t \in [0, t_1]$, $j \in \{1, 2\}$.

Якщо $u_i^*(x,t) = u_i^{\circledast}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D_{t_1}^{s^*}}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то покладемо $t_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} t_1$, в іншому випадку визначимо

$$t_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \inf \Big\{ t \in [0, t_1] \colon \exists x \in [s_1^*(t), s_2^*(t)],\ \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ u_i^*(x,t) \neq u_i^{\circledast}(x,t) \Big\}.$$

Тоді $u_i^*(x,t) = u_i^{\circledast}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D_{t_2}^{s^*}}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Очевидно, що $t_2 < T_0^*$.

Таким чином, на відрізку $[0, t_2]$ маємо рівність $(u^*, s^*) = (u^{\circledast}, s^{\circledast})$, до того ж для довільного $t_3 \in (t_2, T_0^*]$ на відрізку $[0, t_3]$ отримаємо нерівність $(u^*, s^*) \neq (u^{\circledast}, s^{\circledast})$.

Перенесемо початок координат у точку $(0, t_2)$ та приймемо значення розв'язку (u^*, s^*) при $t = t_2$ за нові початкові функції. В результаті отримаємо задачу вигляду (1) – (5) з вихідними даними, що задовольняють умови теореми. Згідно з доведеним вище існує єдиний узагальнений розв'язок цієї задачі у просторі $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}(T_0^{**}, U_0^{**}, L_x^{**}, L_t^{**})$, де T_0^{**}, U_0^{**}, L_x^{**}, L_t^{**} — деякі фіксовані значення параметрів. Зауважимо, що відповідно до формули (21) значення L_x^{**}, L_t^{**} можна вибрати достатньо великими, щоб для функцій u_i^*, $u_i^{\circledast}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, виконувалось обмеження 3) простору $\mathcal{M}^{**}$, а відповідно до формули (25) значення T_0^{**} можна вибрати достатньо малим, щоб для функцій s_j^*, $s_j^{\circledast}$, $j \in \{1, 2\}$, виконувалось обмеження 1) простору $\mathcal{M}^{**}$ і функції u_i^*, $u_i^{\circledast}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, задовольняли обмеження 2) цього простору. Отже, обидва узагальнені розв'язки розглядуваної задачі будуть належати простору $\mathcal{M}^{**}$. Отримали суперечність, а тому $(u^*, s^*) = (u^{\circledast}, s^{\circledast})$ на відрізку $[0, T_0^*]$.

Теорему доведено.

Зауваження. Аналогічна теорема має місце і для випадку, коли систему рівнянь (1) замінено системою, записаною в другій канонічній формі (форма Шаудера)

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(x,t,u) \Big\{ \frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u) \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big\} = f_i(x,t,u), \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

1. *Gupta S. C.* The classical Stefan problem: basic concepts, modeling and analysis. – Amsterdam: Elsevier, 2003. – 385 p.
2. *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии нелинейного закона последействия и релаксации // Прикл. математика и механика. – 1940. – **4**, вып. 1. – С. 79 – 92.
3. *Рейнер М.* Реология. – М.: Наука, 1965. – 224 с.
4. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн. – М.: Наука, 1998. – 448 с.
5. *Cattaneo C.* Sulla conduzione del calore // Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena. – 1948/49. – **3**. – P. 3 – 21.
6. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
7. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. – М.: Наука, 2007. – 167 с.
8. *Friedman A.* The Stefan problem for a hyperbolic heat equation // Math. Anal. and Appl. – 1989. – **138**, № 1. – P. 249 – 279.
9. *Mitropolsky Yu. A.* Free and non-local boundary problems in metallurgy, medicine, ecology and materials scince. Mathematical models and constructive methods solution. Gycle of paper / Yu. A. Mitropolsky, A. A. Berezovsky. – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2000. – 265 p.
10. *Sinha D. R.* A note on mechanical response in a piesoelectric transducer to an impulsive voltage input // Proc. Nat. Inst. Sci., India A. – 1966. – **A 31**, № 4. – P. 395 – 402.

11. *Song I.* Some developments in mathematical demography and their application to the Peoples Republic of China // Theor. Pop. Biol. – 1982. – **22**. – P. 276 – 299.
12. *Гинзбург Л. Р.* О динамике и управлении возрастной структурой популяции // Проблемы кибернетики. – 1970. – Вып. 23. – С. 261 – 274.
13. *Крутиков В. С.* Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами // Прикл. механика и математика. – 1991. – **55**. – С. 1058 – 1062.
14. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 415 с.
15. *Кирилич В. М.* Нелокальна задача типу Стефана для гіперболічної системи першого порядку // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 121 – 124.
16. *Lee Da-tsin, Wen-tsu Y.* Some existence theorems for quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables. II. Typical boundary value problems of functional form and typical free boundary problems // Sci. Sinica. – 1964. – **13**, № 5. – P. 551 – 562.
17. *Самарин Ю. П.* Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в однородном пространстве // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 3. – С. 542 – 543.
18. *Hill C. D.* A hyperbolic free boundary problem // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – **31**, № 1. – P. 117 – 129.
19. *Шеметов Н. В.* Гиперболическая задача Стефана // Некоторые прил. функцион. анализа к задачам мат. физики. – Новосибирск: Ин математики АН СССР. – 1990. – С. 127 – 144.
20. *De Socio L, Gualtieri G.* A hyperbolic Stefan problem // Quart. Appl. Math. – 1983. – **41**, № 2. – P. 253 – 259.
21. *Solomon A. D., Alexiades V., Wilson D. G., Drake Y.* On the formulation of hyperbolic Stefan problems // Ibid. – 1985. – **43**, № 3. – P. 295 – 304.
22. *Джураєв Т. Д., Тахиров Ж. О.* Гиперболическая задача Стефана // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 5. – С. 821 – 831.
23. *Хубиев Р. Н.* Краевая задача со свободной границей для одномерного волнового уравнения // Там же. – 1988. – **24**, № 10. – С. 1801 – 1804.
24. *Beregowa G., Kyrylycz W., Flud W.* Hiperboliczne zagadnienie Stefana o nielokalnych warunkach na prostej // Zesz. nauk. POpol. Opolskiej. Mat. – 1997. – № 230, z. 14. – C. 31 – 42.
25. *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 4. – С. 489 – 503.
26. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Там же. – 2008. – **44**, № 3.– С. 1 – 15.
27. *Кирилич В. М., Филимонов А. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Мат. студ. – 2008. – **30**, № 1. – С. 42 – 60.
28. *Turo J.* Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems // Nonlinear Anal., Theory, Meth., Appl. – 1997. – **30**, № 4. – P. 2329 – 2340.
29. *Li Ta-tsien.* Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. – New York: Masson, 1994. – 315 p.
30. *Кирилич В. М.* Багатоточкова задача для гіперболічної сингулярної квазілінійної системи рівнянь в області з невідомими межами // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 11 – 16.

Одержано 17.12.09,
після доопрацювання — 11.06.10