УДК 517.987

М. Т. Таращанский (Восточноукр. нац. ун-т им. В. Даля)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ МЕРЫ

We consider the relationships between two sets of extensions of a finite finitely additive measure μ, defined on the algebra $\mathfrak{B}$ of sets, to a wider algebra $\mathfrak{A}$. These sets are the set $\mathrm{e}xS_\mu$ of all extremal extensions of the measure μ and the set H_μ of all extensions determined as $\lambda(A) = \hat{\mu}(h(A)),\ A \in \mathfrak{A}$, where $\hat{\mu}$ is a factor measure on the algebra $\mathfrak{B}/\mu$ of classes of μ-equivalency and $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$ is the homomorphism extending the canonical homomorphism $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B}/\mu$. We establish properties of extensions from H_μ. We present necessary and sufficient conditions for the existence of these extensions and also conditions under which the sets $\mathrm{e}xS_\mu$ and H_μ coincide.

Розглядається взаємозв'язок між двома множинами продовжень скінченної скінченно-адитивної міри μ, визначеної на алгебрі множин $\mathfrak{B}$, на більш велику алгебру $\mathfrak{A}$. Це множина $\mathrm{e}xS_\mu$ всіх екстремальних продовжень міри μ і множина H_μ всіх таких продовжень, які визначені як $\lambda(A) = \hat{\mu}(h(A)),\ A \in \mathfrak{A}$, де $\hat{\mu}$ — фактор-міра на алгебрі $\mathfrak{B}/\mu$ класів μ-еквівалентності і $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$ — гомоморфізм, що продовжує канонічний гомоморфізм $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}/\mu$. Досліджено властивості продовжень з H_μ. Наведено необхідні та достатні умови існування таких продовжень, а також умови, за яких множини $\mathrm{e}xS_\mu$ і H_μ збігаються.

1. Введение. Пусть Ω — непустое множество, на котором выделена некоторая алгебра подмножеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и μ — мера, т. е. конечная конечно-аддитивная неотрицательная функция множеств, определенная на алгебре $\mathfrak{B}$. Обозначим через $S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ множество всех продолжений меры μ на алгебру $\mathfrak{A}$, и пусть $\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — множество его экстремальных точек, называемых экстремальными продолжениями меры μ. Известно, что $\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$ ([1], раздел 3 и библиографические ссылки там же). Свойства таких продолжений изучались во многих работах (см., например, [1–8]).

Во множестве $\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ всех экстремальных продолжений меры μ выделяется подмножество $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ продолжений ν, называемых гомоморфными продолжениями меры μ, определяемых равенствами

$$\nu(A) = \hat{\mu}(h(A)), \quad A \in \mathfrak{A},$$

где $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$ — гомоморфизм, продолжающий канонический гомоморфизм q_μ алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}/\mu$ классов μ-эквивалентности, $\hat{\mu}$ — фактор-мера, определенная на алгебре $\mathfrak{B}/\mu$ равенствами

$$\hat{\mu}(q_\mu(B)) = \mu(B), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Если $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, то, выбирая $B \in q_\mu^{-1}(h(A))$ для любого $A \in \mathfrak{A}$, имеем $h(B) = h(A)$ и $\nu(A\Delta B) = \hat{\mu}(h(A\Delta B)) = \hat{\mu}(h(A)\Delta h(B)) = 0$. Тогда из теоремы 1 [6] следует, что $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subset \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, а в случае, когда $\mathfrak{B}$ является σ-алгеброй и мера μ счетно-аддитивна, $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ [7] (теорема 2). Однако эти множества в общем случае не совпадают.

Соответствующие примеры были построены в [8]. Более того, можно привести пример, когда $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varnothing$.

В этой работе будут установлены условия, при которых $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$, получены характеристические свойства продолжений $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ и условия, при которых $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

2. Основные определения и обозначения. Для булевой алгебры $\mathfrak{A}$ булевы операции будем обозначать теоретико-множественными символами, символом $A \Delta B$ будем обозначать симметрическую разность элементов $A, B \in \mathfrak{A}$, т. е. $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, где $\bar{A}$ — дополнение элемента A в алгебре $\mathfrak{A}$.

Пусть Ω — непустое множество, $\mathfrak{D} \subset 2^{\Omega}$ — некоторое семейство подмножеств. Идеалом в $\mathfrak{D}$ называется такое подмножество $\Im \subset \mathfrak{D}$, что $\Omega \notin \Im$, для любых $I_1, I_2 \in \Im$ их объединение принадлежит $\Im$ и из $I \in \Im$ и $J \subset I,\ J \in \mathfrak{D}$ следует, что $J \in \Im$. Идеал $\Im$ максимален в $\mathfrak{D}$, если он не является собственным подмножеством никакого другого идеала в $\mathfrak{D}$. Для максимальности идеала $\Im$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $D \in \mathfrak{D}$ нашлось такое $I \in \Im$, что $I \cup D = \Omega$.

Для алгебры, порожденной семейством подмножеств $\mathfrak{D} \subset 2^{\Omega}$, будем использовать обозначение $a(\mathfrak{D})$.

Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ — подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда алгебра $\mathfrak{B}^*$, порожденная алгеброй $\mathfrak{B}$ и элементом $A \in \mathfrak{A},\ A \notin \mathfrak{B}$, состоит из всех элементов $A^* \in \mathfrak{A}$, представимых в виде $A^* = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap \bar{A}),\ B_1,\ B_2 \in \mathfrak{B}$. Это следует из того, что объединение и дополнение элементов такого вида являются элементами того же вида.

Всюду в дальнейшем Ω — непустое множество, $\mathfrak{A}$ — алгебра подмножеств Ω, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и μ — мера, определенная на алгебре $\mathfrak{B}$, такая, что $\mu(\Omega) = 1$.

Мера μ называется двузначной, если $\mu(\mathfrak{B}) = \{0, 1\}$. Символами μ^* и μ_* обозначаются соответственно внутренняя и внешняя меры, определенные для любого $A \subset 2^{\Omega}$ как

$$\mu^*(A) = \inf \big\{\mu(B), A \subset B, B \in \mathfrak{B}\big\}, \qquad \mu_*(A) = \sup \big\{\mu(B), A \supset B, B \in \mathfrak{B}\big\}.$$

Пусть λ и ν — две меры, определенные на алгебре $\mathfrak{A}$. Согласно [9] (раздел 6.1), мера λ называется абсолютно непрерывной относительно ν (обозначается это отношение символом $\lambda \ll \nu$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\lambda(A) < \varepsilon$ при $\nu(A) < \delta,\ A \in \mathfrak{A}$. Мера λ называется слабо абсолютно непрерывной относительно ν, если $\lambda^{-1}(0) \subset \nu^{-1}(0)$. Это отношение обозначается как $\lambda \ll_w \nu$. Из отношения $\lambda \ll \nu$ следует, что $\lambda \ll_w \nu$, но не наоборот [9] (замечание 6.1.3).

Пусть $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ — две подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{C}$ является дополнением алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \{\varnothing, \Omega\}$ и $a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$.

Если $\Im$ — некоторый идеал алгебры $\mathfrak{B}$ и алгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ такова, что $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = a(\Im)$ и $a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{C}$ называется $\Im$-дополнением алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$. Если μ — мера, определенная на алгебре $\mathfrak{B}$, то будем использовать обозначение $\Im_\mu = \mu^{-1}(0)$. В этом случае $\Im_\mu$-дополнение будем называть μ-дополнением алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$.

Для любого идеала $\Im$ алгебры $\mathfrak{B}$ символом $\Im^+$ будем обозначать идеал алгебры $\mathfrak{A}$, порожденный $\Im$. Этот идеал состоит из всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что найдется такое $B \in \mathfrak{B}$, что $A \subset B$. Если μ — некоторая мера на алгебре $\mathfrak{B}$, то, очевидно, для любого $A \in \Im_\mu^+$ справедливо соотношение $\mu^*(A) = 0$. Алгебру $a(\mathfrak{B} \cup \Im_\mu^+)$, порожденную алгеброй $\mathfrak{B}$ и идеалом $\Im_\mu^+$, будем обозначать символом $\mathfrak{B}_\mu$.

Пусть $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ — две подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ и $a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}$. Пусть, кроме того, меры μ и ν определены на алгебрах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ соответственно. Меры μ и ν называются согласованными, если сужения этих мер на алгебру $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ совпадают.

Мера λ, определенная на алгебре $\mathfrak{A}$, называется совместным продолжением мер μ и ν, если $\lambda|_{\mathfrak{B}} = \mu$ и $\lambda|_{\mathfrak{C}} = \nu$.

3. Существование гомоморфных продолжений. Приведем, прежде всего, пример, показывающий, что множество $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ может быть пустым.

***Пример* 1.** Пусть Ω — счетное множество, на котором выделена некоторая алгебра, но не σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{B}$, содержащая все одноточечные подмножества Ω, например алгебра, порожденная всеми конечными подмножествами Ω. Положим $\mu(\{\omega_n\}) = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, для $\omega_n \in \Omega$. Таким образом, определена мера на $\mathfrak{B}$. Пусть, далее, $C \subset \Omega$, $C \notin \mathfrak{B}$. Определим $\mathfrak{A}$ как алгебру, порожденную $\mathfrak{B}$ и C, и положим

$$\lambda(A) = \mu_*(A \cap C) + \mu^*(A \cap \bar{C}) \quad \text{для любого} \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда λ — строго положительная мера на $\mathfrak{A}$ и экстремальное продолжение меры μ (см. [6], пример 1). Ясно, что не существует такого гомоморфизма $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, что $\lambda(A) = \mu(h(A))$, $A \in \mathfrak{A}$. Более того, в этом примере вообще не существует ни одного гомоморфизма $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, оставляющего неподвижными элементы из алгебры $\mathfrak{B}$. Действительно, если предположить существование такого гомоморфизма $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, что $h(B) = B$ для любого $B \in \mathfrak{B}$, и положить $\nu(A) = \mu(h(A))$ для $A \in \mathfrak{A}$, то $\nu \in S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ и для $A \in h^{-1}(\varnothing)$ получим $0 = \nu(A) \geq \mu_*(A) > 0$, т. е. $h^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Однако алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не изоморфны, т. е. $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \varnothing$.

В этом пункте будут даны необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование гомоморфных продолжений.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{B}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и g — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в некоторую булеву алгебру $\mathfrak{C}$. Пусть, кроме того, $\Im \subset \mathfrak{A}$ — идеал алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что $\Im \cap \mathfrak{B} = g^{-1}(\varnothing)$ и $\mathfrak{A}_0 = a(\mathfrak{B} \cup \Im)$. Тогда отображение h, определенное на множествах вида $A = B\Delta I$, $B \in \mathfrak{B}$, $I \in \Im$, как $h(A) = g(B)$, является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{C}$ таким, что $h(B) = g(B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}$ и $h^{-1}(\varnothing) = \Im$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.5 [10] любое $A \in \mathfrak{A}$ можно представить в виде $A = B\Delta C$, $B \in \mathfrak{B}$, $I \in \Im$. Если $A = B_i\Delta I_i$, $B_i \in \mathfrak{B}$, $I_i \in \Im$, $i = 1, 2$, то $A\Delta B_i \in \Im$, $i = 1, 2$, и $(B_1\Delta B_2) = (A\Delta B_1)\Delta(A\Delta B_2) \in \Im \cap \mathfrak{B} = g^{-1}(\varnothing)$.

Таким образом, для $A = B\Delta I$, $B \in \mathfrak{B}$, $I \in \Im$, равенство $h(A) = g(B)$ корректно определяет отображение алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{C}$, причем $h(B) = g(B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

Кроме того, имеем

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) =$$

$$= \big((A_1 \cup A_2) \cap (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)\big) \cup \big((B_1 \cup B_2) \cap (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)\big) \subseteq$$

$$\subseteq (A_1 \cap \bar{B}_1) \cup (A_2 \cap \bar{B}_2) \cup (B_1 \cap \bar{A}_1) \cup (B_2 \cap \bar{A}_2) =$$

$$= (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2) \in \Im.$$

Отсюда следует, что

$$h(A_1 \cup A_2) = g(B_1 \cup B_2) = g(B_1) \cup g(B_2) = h(A_1) \cup h(A_2).$$

Пусть $A \in \mathfrak{A}_0$ и $B \in \mathfrak{B}$ таковы, что $A\Delta B \in \Im$. Тогда $\bar{A}\Delta\bar{B} \in \Im$, поскольку $\bar{A}\Delta\bar{B} = A\Delta B$ и, следовательно, $h(\bar{A}) = g(\bar{B}) = \overline{g(B)} = \overline{h(A)}$.

Наконец, если $A \in \Im$, то в представлении $A = B\Delta I,\ B \in \mathfrak{B},\ I \in \Im$, можно взять $B = \varnothing$ и потому $h(A) = g(\varnothing) = \varnothing$. Если $h(A) = g(B) = \varnothing$, то $B \in \Im_0$ и, значит, $A = B\Delta I \in \Im$.

Предложение доказано.

***Следствие* 1.** *Пусть $\mathfrak{B}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, μ — мера, определенная на алгебре $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{B}_\mu = a(\mathfrak{B} \cup \Im_\mu^+)$. Тогда мера μ имеет единственное гомоморфное продолжение $\bar{\mu}$ на алгебру $\mathfrak{B}_\mu$, причем $\bar{\mu}^{-1}(0) = \Im_\mu^+$.*

Доказательство. Согласно предыдущему предложению, канонический гомоморфизм q_μ алгебры $\mathfrak{B}$ на фактор-алгебру $\mathfrak{B}/\mu$ может быть продолжен до гомоморфизма $h\colon \mathfrak{B}_\mu \to \mathfrak{B}/\mu$ такого, что $h^{-1}(\varnothing) = \Im_\mu^+$. Полагая $\bar{\mu}(A) = \hat{\mu}(h(A))$ для любого $A \in \mathfrak{B}_\mu$, получаем гомоморфное продолжение меры μ на алгебру $\mathfrak{B}_\mu$.

Предположим, что существует еще одно продолжение λ меры μ на алгебру $\mathfrak{B}_\mu$. Тогда $\lambda(I) = 0$ для любого $I \in \Im_\mu^+$. Согласно лемме 2.5 [10] для любого $A \in \mathfrak{B}_\mu$ имеет место представление $A = B\Delta I,\ B \in \mathfrak{B},\ I \in \Im_\mu^+$. Следовательно,

$$\lambda(A) = \lambda(B\Delta I) = \lambda(B) = \bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(B\Delta I) = \bar{\mu}(A),$$

что доказывает единственность продолжения.

Положим далее $\mathfrak{N} = \{A \in 2^\Omega;\ \mu_*(A) = 0\}$. Тогда $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B} = \Im_\mu$ и для любой меры $\lambda \in S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ справедливо отношение $\lambda^{-1}(0) \subset \mathfrak{N}$.

Предложение 2. *Пусть $\Im$ — некоторый идеал в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$. Тогда мера μ может быть продолжена до меры ν, определенной на алгебре $\mathfrak{A}_0 = a(\mathfrak{B} \cup \Im)$, такой, что $\nu^{-1}(0) = \Im$ и $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B})$. Если, кроме того, $\Im$ — максимальный идеал в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{A}_0 = a(\mathfrak{B} \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}))$.*

Доказательство. Поскольку $\Im \cap \mathfrak{B} = \Im_\mu$, согласно предложению 1, канонический гомоморфизм q_μ алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}/\mu$ может быть продолжен до гомоморфизма $h\colon \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}/\mu$ такого, что $h^{-1}(\varnothing) = \Im$. Тогда мера ν, определенная для любого $A \in \mathfrak{A}$ как $\nu(A) = \hat{\mu}(h(A))$, является гомоморфным продолжением меры μ.

Пусть теперь $\Im$ — максимальный идеал в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$. Допустим, что $a(\mathfrak{B} \cup \Im) \neq$ $\neq a(\mathfrak{B} \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N})$. Тогда существует такое $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$, что $A \notin a(\mathfrak{B} \cup \Im)$. В силу максимальности идеала $\Im$ найдется такое $I \in \Im$, что $A \cup I = \Omega$. Отсюда $\bar{A} \subset I$ и, значит, $\bar{A} \in \Im$ вопреки выбору $A \notin a(\mathfrak{B} \cup \Im)$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Теорема 1. *Множество $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ не пусто тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \subset a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N})$.*

Доказательство. *Достаточность.* Рассмотрим множество $\mathfrak{J}$ всех таких идеалов $\Im$ алгебры $\mathfrak{A}$, что $\Im \cap \mathfrak{B} = \Im_\mu$. Это множество не пусто, ибо содержит $\Im_\mu^+$ и в силу леммы Цорна имеет максимальные элементы. Пусть $\Im^*$ — максимальный элемент множества $\mathfrak{J}$. Поскольку $\Im^* \cap \mathfrak{B} = \Im_\mu$, то $\Im^* \subset \mathfrak{N}$ и, кроме того, идеал $\Im^*$ является максимальным идеалом в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$.

Из предыдущего предложения и условия теоремы теперь получаем $a(\mathfrak{B} \cup \Im^*) =$ $= a(\mathfrak{B} \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}) \subset \mathfrak{A} \subset a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{A}$. С другой стороны, имеем соотношение $(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}) \subset a(\mathfrak{B} \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}))$ и, значит, $a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{A} \subset a(\mathfrak{B} \cup (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}))$.

Таким образом, $a(\mathfrak{B} \cup \Im^*) = \mathfrak{A}$. В силу предложения 2 отсюда следует требуемое утверждение.

Необходимость. Если $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, то $\nu^{-1}(0) \subset \mathfrak{N}$ и существует такой гомоморфизм $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$, что $\nu(A) = \hat{\mu}(h(A))$ для любого $A \in \mathfrak{A}$ и $h(B) = q_\mu(B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. Выбирая некоторое $B \in h^{-1}(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, получаем, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $A \Delta B \in h^{-1}(\varnothing)$. Значит, для любого $A \in \mathfrak{A}$ существуют такие $I \in h^{-1}(\varnothing)$ и $B \in \mathfrak{B}$, что $A = B \Delta I$. Отсюда следует, что $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup h^{-1}(\varnothing))$. Поскольку $h^{-1}(\varnothing) = \nu^{-1}(0)$, то $\mathfrak{A} \subset a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N})$.

Приведем некоторые примеры, когда $\mathfrak{A} \subset a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N})$.

***Пример* 2.** Если фактор-алгебра $\mathfrak{B}/\mu$ полна, то в силу теоремы Р. Сикорского о продолжении гомоморфизма [11] (теорема 33.1) существует такой гомоморфизм $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$, который продолжает канонический гомоморфизм q_μ. Тогда $h^{-1}(\varnothing) \subset \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \cup h^{-1}(\varnothing))$.

В частности, если мера μ двузначна или, более общо, принимает конечное множество значений, то алгебра $\mathfrak{B}/\mu$ конечна и потому полна. Еще один частный случай можно получить, рассмотрев счетно-аддитивную меру μ на σ-полной алгебре $\mathfrak{B}$. Тогда алгебра $\mathfrak{B}/\mu$ полна, так как является σ-полной и удовлетворяет счетному цепному условию [11] (теорема 20.5).

Напомним, что множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{A}$ называется плотным в алгебре $\mathfrak{A}$, если для любого $\varnothing \neq A \in \mathfrak{A}$ найдется такое $\varnothing \neq P \in \mathfrak{P}$, что $P \subset A$.

Для дальнейшего потребуется следующее простое утверждение.

Предложение 3. *Если подалгебра $\mathfrak{B}$ плотна в алгебре подмножеств $\mathfrak{A}$, то*:

1) *для любого $A \in \mathfrak{A}$ и точки $\omega \in \Omega$, $\omega \notin A$, найдется такое $B \in \mathfrak{B}$, что $\omega \in B$ и $B \cap A = \varnothing$;*

2) *для любого максимального идеала $\Im_\omega$ алгебры $\mathfrak{B}$, определенного точкой $\omega \in \Omega$, идеал $\Im_\omega^+$ является единственным максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$, содержащим $\Im_\omega$;*

3) *если алгебра $\mathfrak{A}$ разделяет точки на Ω, то алгебра $\mathfrak{B}$ также разделяет точки на Ω.*

Доказательство. 1. Действительно, если $\omega \in \Omega$ и $A \in \mathfrak{A}$ таковы, что $\omega \notin A$, то согласно теореме 23.1 [11], имеет место соотношение $\bar{A} = \bigcup \left\{ B \in \mathfrak{B},\ B \subset \bar{A} \right\}$. Значит, существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $\omega \in B$, $A \cap B = \varnothing$.

2. Если $A \in \mathfrak{A}$ и $\omega \notin A$, то в силу утверждения 1 предложения 3 существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $A \subset \bar{B} \in \Im_\omega$, т. е. $A \in \Im_\omega^+$. Если $A \in \mathfrak{A}$ и $\omega \in A$, то аналогично получаем, что $\bar{A} \in \Im_\omega^+$. Значит, $\Im_\omega^+$ — максимальный идеал в $\mathfrak{A}$.

Если допустить существование максимального идеала $\mathfrak{J}$ алгебры $\mathfrak{A}$, содержащего $\Im_\omega$ и отличного от $\Im_\omega^+$, то из предыдущего рассуждения следует, что этот идеал должен содержать элемент $A \in \mathfrak{A}$ такой, что $\omega \in A$. В силу утверждения 1 предложения 3 найдется такое $B \in \mathfrak{B}$, что $\omega \in B$ и $B \cap \bar{A} = \varnothing$. Тогда $B \subset A$ и, значит, $B \in \mathfrak{J}$. С другой стороны, $\omega \notin \bar{B}$ и $\bar{B} \in \Im_\omega \subset \mathfrak{J}$. Таким образом, $\Omega = B \cup \bar{B} \in \mathfrak{J}$. Полученное противоречие доказывает, что $\Im_\omega^+$ является единственным максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$, содержащим $\Im_\omega$.

3. Это утверждение следует из первого непосредственно.

Предложение доказано.

В силу теоремы Стоуна о представлении [11] (теорема 8.2) любая булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна приведенной и совершенной алгебре подмножеств некоторого множества X, т. е. такой алгебре подмножеств, которая разделяет точки на X и каждый максимальный идеал которой является главным идеалом, определенным некоторой точкой $x \in X$. Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ — образы алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно при этом изоморфизме. Для меры μ, определенной на алгебре $\mathfrak{B}$, обозначим через μ' ее изоморфный образ на $\mathfrak{B}'$. При этом алгебры $\mathfrak{B}/\mu$ и $\mathfrak{B}'/\mu'$ также изоморфны. Следовательно, если мера μ имеет гомоморфное продолжение на алгебру $\mathfrak{A}$, то мера μ' имеет гомоморфное продолжение на алгебру $\mathfrak{A}'$, и наоборот.

Теорема 2. *Если алгебра $\mathfrak{B}$ плотна в $\mathfrak{A}$ и μ — некоторая мера, определенная на $\mathfrak{B}$, то $H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_\mu = a(\mathfrak{B} \cup \Im_\mu^+)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_\mu$, то из следствия 1 вытекает, что $H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \neq \neq \varnothing$.

Пусть $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_\mu$. Согласно сделанному выше замечанию можно считать, что алгебра $\mathfrak{A}$ совершенна и приведена. Ясно, что тогда $\mathfrak{B}$ также является совершенной и, в силу предыдущего предложения, приведенной алгеброй. Допустим, что существует некоторая мера $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Тогда существует такое $A \in \nu^{-1}(0)$, что $A \notin \Im_\mu^+$. Обозначим через M объединение всех элементов идеала $\Im_\mu^+$. Тогда $M \neq \Omega$, так как алгебра $\mathfrak{B}_\mu$ совершенна как подалгебра совершенной алгебры $\mathfrak{A}$. Покажем, что $A \not\subset M$. Обозначая через $\Im_\omega$ максимальный идеал алгебры $\mathfrak{B}_\mu$, определенный точкой, получаем $\Im_\mu^+ \subset \Im_\omega^+$ для любого $\omega \in \overline{M}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{B}$ плотна в $\mathfrak{A}$, алгебра $\mathfrak{B}_\mu$ также плотна в $\mathfrak{A}$. Значит, в силу второго утверждения предложения 3 для любого $\omega \in \overline{M}$ идеал $\Im_\omega^+$ является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$, содержащим $\Im_\mu^+$. А так как алгебра $\mathfrak{A}$ совершенна, то никаких других максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, содержащих $\Im_\mu^+$, не существует. Следовательно, $\bigcap_{\omega\in\overline{M}} \Im_\omega^+ = \Im_\mu^+$. Если допустить, что $A \subset M$, то для любого $\omega \in \overline{M}$ будет справедливо отношение $A \in \Im_\omega^+$ вопреки тому, что $A \notin \Im_\mu^+$.

Значит, существует хотя бы одна точка $\omega \in A\backslash M$. В силу утверждения 1 предложения 3 найдется такое $B \in \mathfrak{B}_\mu$, что $\omega \in B$ и $B \cap \bar{A} = \varnothing$. Значит, $B \subset A \in \nu^{-1}(0)$, что в силу следствия 1 влечет $B \in \Im_\mu^+$ вопреки тому, что $B \not\subset M$. Полученное противоречие доказывает, что $H_\mu(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \varnothing$.

Теорема доказана.

Если подалгебра $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ не плотна в алгебре $\mathfrak{A}$, то обозначим через $\mathfrak{C}$ множество всех таких элементов $\varnothing \neq C \in \mathfrak{A}$, $C \notin \mathfrak{B}$, что из отношения $B \subset C$, $B \in \mathfrak{B}$ следует, что $B = \varnothing$. Подалгебру $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ будем называть абсолютно неплотной в алгебре $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})$.

***Пример* 3.** Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — две булевы алгебры и $\mathfrak{A}$ — булево произведение алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ [11 с. 66]. Отождествим алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ с их изоморфными образами в $\mathfrak{A}$. Тогда алгебра $\mathfrak{B}$ абсолютно не плотна в $\mathfrak{A}$, ибо для любого $C \in \mathfrak{C}$ из $B \subset C$, $B \in \mathfrak{B}$, следует $B = \varnothing$ в силу независимости алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная булева алгебра и $\mathfrak{B}$ — некоторая ее подалгебра. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *алгебра $\mathfrak{B}$ абсолютно не плотна в $\mathfrak{A}$*;

2) *любой гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в произвольную булеву алгебру $\mathfrak{D}$ может быть продолжен до гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{D}$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Согласно условию, существует такое множество $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ элементов $\varnothing \neq C \in \mathfrak{A}$, $C \notin \mathfrak{B}$, что из отношения $B \subset C$, $B \in \mathfrak{B}$, следует, что $B = \varnothing$ и $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})$. Пусть $h\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в некоторую алгебру $\mathfrak{D}$ и $\Im_0 = h^{-1}(\varnothing)$. Пусть $\Im^*$ — максимальный идеал в $\mathfrak{C}$.

Если $\mathfrak{A} \neq a(\Im^* \cup \mathfrak{B})$, то найдется такое $A \in \mathfrak{C}$, что $A \notin (\Im^* \cup \mathfrak{B})$. В силу максимальности идеала $\Im^*$ найдется такое $I \in \Im^*$, что $I \cup A$ является единицей алгебры $\mathfrak{A}$. Значит, $\bar{A} \subset I$ вопреки выбору $A \notin (\Im^* \cup \mathfrak{B})$.

Множество $\mathcal{I} = \big\{A \in \mathfrak{A};\ A \subset I \cup J,\ I \in \Im^*,\ J \in \Im_0\big\}$ является собственным идеалом в $\mathfrak{A}$, иначе найдутся такие $I \in \Im^*,\ J \in \Im_0$, что $I \cup J$ будет единицей алгебры $\mathfrak{A}$ и, значит, $\bar{J} \subset I$ вопреки тому, что $I \in \mathfrak{C}$. Кроме того, $\mathcal{I} \cap \mathfrak{B} = \Im_0$. Действительно, если для некоторого $B \in \mathfrak{B}$ выполняется соотношение $B \subset I \cup J$, $I \in \Im^*,\ J \in \Im_0$, то $B \cap \bar{J} = \varnothing$, иначе $I \supset B \cap \bar{J} \in \mathfrak{B}$, что невозможно, ибо $I \in \Im^* \subset \mathfrak{C}$. Значит, $B \subset J \in \Im_0$ и потому $B \in \Im_0$.

Поскольку $\mathfrak{A} = a(\Im^* \cup \mathfrak{B})$, то тем более и $\mathfrak{A} = a(\mathcal{I} \cup \mathfrak{B})$. Требуемое утверждение следует теперь из предложения 1.

2) $\Rightarrow$ 1). Если любой гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в произвольную булеву алгебру $\mathfrak{D}$ может быть продолжен до гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{D}$, то тождественный изоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ на себя также может быть продолжен до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{B}$. Ядро этого гомоморфизма $h^{-1}(\varnothing)$ удовлетворяет условиям $h^{-1}(\varnothing) \cap \mathfrak{B} = \{\varnothing\}$ и $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup h^{-1}(\varnothing))$.

Каково бы ни было $A \in h^{-1}(\varnothing)$, из условий $B \in \mathfrak{B}$ и $B \subset A$ следует $B = \varnothing$, т. е. алгебра $\mathfrak{B}$ абсолютно не плотна в $\mathfrak{A}$, что завершает доказательство теоремы.

Отсюда получаем, что любая мера μ, определенная на абсолютно неплотной в $\mathfrak{A}$ подалгебре $\mathfrak{B}$, имеет гомоморфное продолжение, ибо согласно этой теореме канонический гомоморфизм q_μ алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}/\mu$ может быть продолжен до гомоморфизма всей алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}/\mu$.

***Следствие* 2.** *Для любой меры μ, определенной на абсолютно неплотной в $\mathfrak{A}$ алгебре подмножеств $\mathfrak{B}$, множество $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ не пусто.*

Теорема 4. *Если $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$, то $\mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Положим $\mathfrak{A}_0 = a(\mathfrak{B} \cup \lambda^{-1}(0))$ и покажем, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ плотна в алгебре $\mathfrak{A}$. Если это не так, то найдется хотя бы одно такое $\varnothing \neq A_0 \in \mathfrak{A}$, что из отношений $B \subset A_0,\ B \in \mathfrak{A}_0$ следует $B = \varnothing$. Пусть $\lambda' = \lambda|_{\mathfrak{A}_0}$. Тогда имеем $\lambda'_*(A_0) = 0$. Согласно теореме 3 [12] мера λ' может быть продолжена до меры ν, определенной на алгебре $a(\mathfrak{A}_0 \cup A_0)$ равенствами

$$\nu(A) = \lambda'_*(A_0 \cap B_1) + \lambda'^*(\overline{A_0} \cap B_2) = \lambda'^*(\overline{A_0} \cap B_2)$$

для любого $A \in a(\mathfrak{A}_0 \cup A_0)$, где $A = (A_0 \cap B_1) \cup (\overline{A_0} \cap B_2),\ B_1, B_2 \in \mathfrak{A}_0$. Если $A = (A_0 \cap B_1) \cup (\overline{A_0} \cap B_2)$ таково, что $\lambda(A) < \varepsilon$ для $\varepsilon > 0$, то и $\lambda(A_0 \cap B_1) < \varepsilon$. Положим $\delta = \varepsilon - \lambda(A_0 \cap B_1) > 0$. Тогда из $\nu(A) < \delta$ следует, что

$$\lambda(A) = \lambda(A_0 \cap B_1) + \lambda(\overline{A_0} \cap B_2) \leq \lambda(A_0 \cap B_1) + \lambda'^*(\overline{A_0} \cap B_2) =$$

$$= \lambda(A_0 \cap B_1) + \nu(A) < \varepsilon.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\lambda(A) < \varepsilon$ как только $\nu(A) < \delta$. В силу теоремы 2 [5] это означает, что сужение меры λ на алгебру $a(\mathfrak{A}_0 \cup A_0)$ совпадает с мерой ν вопреки тому, что $\nu(A_0) = 0$ и $A_0 \notin \lambda^{-1}(0)$. Полученное противоречие доказывает, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ плотна в алгебре $\mathfrak{A}$.

Из предложения 2 следует, что $\lambda' \in H_\mu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B})$. Поскольку $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$, то, значит, и $H_{\lambda'}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0) \neq \varnothing$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{A}_0 \cup \Im^+_{\lambda'})$. Поскольку $\Im^+_{\lambda'} \subset \mathfrak{A}_0$, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$ и потому $\lambda \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

4. Свойства гомоморфных продолжений. Отношение $\lambda_1 \ll_w \lambda_2$ определяет отношение предпорядка на множестве $S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Символом S^*_μ будем обозначать множество минимальных элементов относительно этого предпорядка.

Для счетно-аддитивной меры μ в [2] (теорема 2) было показано, что отношение $\lambda \in \mathrm{e}xS_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ эквивалентно $\lambda \in S^*_\mu$. В [5] (теорема 2) этот результат был распространен в случае конечно-аддитивной меры μ на отношение сильного доминирования. В этом пункте будет показано, что $\lambda \in S^*_\mu$ является характеристическим свойством гомоморфных продолжений конечно-аддитивной меры μ.

Объединим свойства гомоморфных продолжений в следующем предложении.

Предложение 4. *Пусть* $\lambda \in S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. *Тогда*:

1) *если* $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, *то для любого* $A \in \mathfrak{A}$ *найдется такое* $B \in \mathfrak{B}$, *что* $\nu(A \Delta B) = 0$;

2) *если* $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$, *то найдется такая мера* $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, *что* $\nu^{-1}(0) \supseteq \lambda^{-1}(0)$;

3) *если* $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *и* $\nu^{-1}(0) \subseteq \lambda^{-1}(0)$, *то* $\nu = \lambda$;

4) *если* $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, *то* $\nu^{-1}(0)$ *является максимальным идеалом в* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$;

5) *если* $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, *то* $\nu(\mathfrak{A}) = \mu(\mathfrak{B})$;

6) *если* $\nu_1, \nu_2 \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, *то существуют такие* $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, *что* $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ *и* $\nu_i(A_i) = 1,\ i = 1, 2$.

Доказательство. 1. Согласно определению множества $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ существует такой гомоморфизм $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$, продолжающий канонический гомоморфизм q_μ алгебры $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}/\mu$, что $h(B) = q_\mu(B)$ и $\nu(A) = \mu(h(A)) = \hat{\mu}(q_\mu(B))$. Тогда, выбирая любое $B \in q_\mu^{-1}(h(A))$, имеем $h(B) = h(A)$ и потому

$$\nu(A \Delta B) = \hat{\mu}(h(A \Delta B)) = \hat{\mu}(h(A) \Delta h(B)) = \hat{\mu}(h(A) \Delta h(A)) = 0.$$

2. Поскольку $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$, то в силу теоремы 1 $\mathfrak{A} \subset a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N})$. Пусть $\Im$ — максимальный в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$ идеал, содержащий $\lambda^{-1}(0)$. Тогда так же, как при доказательстве теоремы 1, получаем, что $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup \Im)$ и существует мера $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ такая, что $\nu^{-1}(0) = \Im$.

3. Пусть теперь $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Из утверждения 1 этого предложения следует, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ найдется такое $B \in \mathfrak{B}$, что $\nu(A \Delta B) = 0$. Отсюда $\nu(A) = \nu(B)$. В силу предположения имеем $\lambda(A \Delta B) = 0$ и потому $\lambda(A) = \lambda(B)$. Поскольку $\nu(B) = \lambda(B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}$, то $\nu(A) = \lambda(A)$ для любого $A \in \mathfrak{A}$.

4. Действительно, предположим противное, т. е. пусть $\Im$ — максимальный в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$ идеал, содержащий $\nu^{-1}(0)$, $\nu^{-1}(0) \neq \Im$, и $\mathfrak{A}_0 = a(\mathfrak{B} \cup \Im)$. Согласно предложению 2, существует мера $\lambda \in S_\mu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B})$ такая, что $\lambda^{-1}(0) = \Im$. Для сужения ν_0 меры ν на алгебру $\mathfrak{A}_0$ имеем $\nu_0 \in H_\mu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B})$ и $\nu^{-1}(0) = \nu_0^{-1}(0) \subset \lambda^{-1}(0)$, $\nu_0^{-1}(0) \neq \lambda^{-1}(0)$, что противоречит утверждению 2 этого предложения.

5. Это утверждение является прямым следствием утверждения 1 этого предложения.

6. Согласно утверждению 2 этого предложения, существует такое $A' \in \mathfrak{A}$, что $A' \in \nu_1^{-1}(0)$ и $A' \notin \nu_2^{-1}(0)$. Поскольку $\nu_2^{-1}(0)$ является максимальным идеалом в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$, в силу утверждения 3 этого предложения найдется такое $A \in \nu_2^{-1}(0)$,

что $A' \cup A = \Omega$. Положим $A_2 = \bar{A}$. Тогда $\nu_2(A_2) = 1$, и так как $\bar{A} \subset A'$, то $\nu_1(A_2) = 0$. Пусть, далее, $A_1 = \overline{A'}$. Тогда $\nu_1(A_1) = 1$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Теорема 5. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$;

2) *существует μ-дополнение $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ и такая двузначная мера λ_0, определенная на алгебре $\mathfrak{C}$, что меры μ и λ_0 согласованы, а мера ν является совместным продолжением мер μ и λ_0*;

3) *существуют μ-дополнение $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ и такая двузначная мера λ_0, определенная на алгебре $\mathfrak{C}$, что для любых $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$ справедливо соотношение $\nu(B \cap C) = \mu(B)\lambda_0(C)$, а ν является единственным совместным продолжением мер μ и λ_0*;

4) $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$ *и* $\nu \in S^*_\mu$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Действительно, согласно утверждению 1 предложения 4 для любого $A \in \mathfrak{A}$ существует такое $B \in \mathfrak{B}$, что $\nu(A \Delta B) = 0$. Пусть, далее, $\mathfrak{C}$ — алгебра, порожденная идеалом $\nu^{-1}(0)$. Тогда мера $\lambda_0 = \nu|_{\mathfrak{C}}$, представляющая собой сужение меры ν на алгебру $\mathfrak{C}$, является двузначной мерой. Кроме того, любое $A \in \mathfrak{A}$ можно представить в виде $A = B\Delta(A\Delta B)$, $B \in \mathfrak{B}$, $A\Delta B \in \mathfrak{C}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})$. Меры μ и λ_0 согласованы, поскольку $\lambda_0|_{\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}} = \mu|_{\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}}$, а мера ν является совместным продолжением мер μ и λ_0.

2) $\Rightarrow$ 3). Поскольку мера λ_0 двузначна, возможны два случая.

Если $\lambda_0(C) = 0$, то $\nu(B \cap C) \leq \nu(C) = \lambda_0(C) = 0$, и потому $\nu(B \cap C) = \mu(B)\lambda_0(C)$. Если $\lambda_0(\bar{C}) = 0$, то $\nu(B \cap \bar{C}) = 0$ и снова

$$\nu(B \cap C) = \nu(B \cap C) + \nu(B \cap \bar{C}) = \nu(B) = \mu(B) = \mu(B)\lambda_0(C).$$

Допустим, что существует еще одно совместное продолжение λ мер μ и λ_0. Тогда меры λ и ν совпадают на множествах вида $B \cap C$, $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$, а значит, и на множествах вида $A = B\Delta C$, $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{C}$ является μ-дополнением алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$, отсюда следует требуемый результат.

3) $\Rightarrow$ 4). Поскольку мера λ_0 двузначна и, значит, идеал $\lambda_0^{-1}(0)$ максимален в $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}) = a(\mathfrak{B} \cup \lambda_0^{-1}(0))$. Кроме того, $\lambda_0^{-1}(0) \cap \mathfrak{B} = \mu^{-1}(0)$. Согласно предложению 1, отображение h, определенное равенствами $h(A) = q_\mu(B)$, $A = B\Delta I$, $B \in \mathfrak{B}$, $I \in \lambda_0^{-1}(0)$, является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{B}/\mu$. Тогда имеем

$$\nu(A) = \nu(B\Delta I) = \nu(B \cap \bar{I}) + \nu(\bar{B} \cap I) = \nu(B)\lambda_0(\bar{I}) =$$

$$= \nu(B) = \mu(B) = \hat{\mu}(h(A))).$$

Отсюда $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Если $\lambda \in S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ и $\lambda^{-1}(0) \supseteq \nu^{-1}(0)$, то из утверждения 2 предыдущего предложения следует, что $\lambda = \nu$.

4) $\Rightarrow$ 5). В силу утверждения 2 предложения 4 существует мера $\lambda \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ такая, что $\lambda^{-1}(0) \supseteq \nu^{-1}(0)$. Тогда из $\nu \in S^*_\mu$ следует, что $\nu^{-1}(0) = \lambda^{-1}(0)$. Согласно утверждению 3 предложению 4 это означает, что $\nu = \lambda$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда существует такая подалгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A} = a(\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C})$ и $B \cap C \neq \varnothing$ для любых $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$. Ясно, что тогда $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \{\varnothing, \Omega\}$. Будем говорить в этом случае, что $\mathfrak{C}$ является независимым дополнением алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебре $\mathfrak{A}$. Пусть, далее, μ — некоторая мера на алгебре $\mathfrak{B}$. Известно [13] (теорема 2), что какова бы ни была мера ν, определенная на алгебре $\mathfrak{C}$, существует и притом единственная мера $\mu\otimes\nu$, определенная на алгебре $\mathfrak{A}$ и удовлетворяющая для всех $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$ соотношению

$$(\mu \otimes \nu)(B \cap C) = \mu(B)\nu(C),$$

из которого следует, что $\mu \otimes \nu \in S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

В рассматриваемом случае $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$. Значит, из теоремы 1 следует, что $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \varnothing$ и согласно теореме 4 $H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = exS_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ — независимое дополнение алгебры $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ и μ — мера на алгебре $\mathfrak{B}$. Тогда $\nu \in \mathrm{ex}S_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ в том и только в том случае, когда существует такая двузначная мера λ на алгебре $\mathfrak{C}$, что $\nu = \mu \otimes \lambda$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если $\nu \in exS_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, то существует такой гомоморфизм $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}/\mu$, что $\nu(A) = \hat{\mu}(h(A))$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$. Значит $\nu^{-1}(0) = h^{-1}(\varnothing)$ и $h^{-1}(\varnothing) \cap \mathfrak{B} = \mu^{-1}(0)$. Положим $\Im_0 = \nu^{-1}(0) \cap \mathfrak{C}$. Поскольку $\nu^{-1}(0)$ является максимальным идеалом в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$ в силу утверждения 4 предложения 4, то идеал $\Im_0$ максимален в алгебре $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$. Определим двузначную меру λ на алгебре $\mathfrak{C}$, соответствующую этому идеалу, и положим $\nu^* = \mu \otimes \lambda$.

Покажем, что при таком определении меры ν^* справедливо отношение $\nu^{-1}(0) \subset \subset {\nu^*}^{-1}(0)$. Действительно, поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из конечных объединений непересекающихся множеств вида $B \cap C$ для $B \in \mathfrak{B}$ и $C \in \mathfrak{C}$, то достаточно доказать это утверждение для множеств вида $B \cap C$, $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$. Поскольку $B \cap C \neq \varnothing$ для произвольных $B \in \mathfrak{B}$ и $C \in \mathfrak{C}$, то $0 = \nu(B \cap C) = \hat{\mu}(h(B \cap C)) = = \hat{\mu}(h(B) \cap h(C))$, если $\nu(B \cap C) = 0$, т. е. либо $h(B) = \varnothing$, либо $h(C) = \varnothing$. Поэтому $\nu(B \cap C) = 0$ для некоторых $B \in \mathfrak{B}$ и $C \in \mathfrak{C}$ только тогда, когда либо $\nu(B) = 0$, либо $\nu(C) = 0$. Пусть $A = B \cap C$, $B \in \mathfrak{C}$, $C \in \mathfrak{C}$ и $\nu(A) = 0$. Если $\nu(B) = 0$, то и $\mu(B) = 0$. Поэтому $\nu^*(B \cap C) = \mu(B)\lambda(C) = 0$. Если $\nu(C) = 0$, то в силу определения меры λ имеем $\lambda(C) = 0$. Поэтому и в этом случае получаем $\nu^*(B \cap C) = \mu(B)\lambda(C) = 0$. Согласно утверждению 3 предложения 4 отсюда следует, что $\nu = \nu^*$ и, значит, $\nu = \mu \otimes \lambda$ для некоторой двузначной меры λ на алгебре $\mathfrak{C}$.

Достаточность. Если $\nu = \mu \otimes \lambda$ для некоторой двузначной меры λ, то ν является совместным продолжением мер μ, λ и единственной мерой на $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей условию $\nu(B \cap C) = \mu(B)\lambda(C)$ для всех $B \in \mathfrak{B}$ и $C \in \mathfrak{C}$. Из предыдущей теоремы следует, что $\nu \in H_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = exS_\mu(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Теорема доказана.

1. *Lipecki Z.* On compactness and extreme points of some sets of quasi-measures and measures // Manuscr. Math. – 1995. – **86**. – S. 349 – 365.
2. *Bierlein D., Stich W. J. A.* On the extremality of measure extensions // Ibid. – 1989. – **63**. – S. 89 – 97.
3. *Hackenbroch W.* Measure extensions by conditional atoms // Math. Z. – 1989. – **200**. – S. 347 – 352.
4. *Lipecki Z.* Cardinality of the set of extreme extensions of quasi measures // Manuscr. Math. – 2001. – **104**. – P. 333 – 341.
5. *Lipecki Z.* On extreme extensions of quasi-measures // Arch. Math. – 1992. – **58**. – P. 288 – 293.
6. *Plachky D.* Extremal and monogenic additive set functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **54**. – P. 193 – 196.

7. *Graf S.* Induced σ-homomorphisms and a parametrisation of measurable sections via extremal preimage measures // Math. Ann. – 1980. – **247**. – P. 67 – 80.
8. *Малюгин С. А.* Об экстремальном продолжении конечно аддитивной меры // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 1. – С. 25 – 30.
9. *Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M.* Theory of charges. A study of finitely additive measures. – New York: Acad. Press, 1983. – 253 p.
10. *Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M.* On the lattice of subalgebras of a Boolean algebra // Czech. Math. J. – 1979. – **29**. – P. 530 – 545.
11. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969. – 376 с.
12. *Los J., Marczewski E.* Extensions of measures // Fund. Math. – 1949. – **36**. – P. 267 – 276.
13. *Marczewski E.* Measures in almost independent fields // Fund. Math. – 1951. – **38**. – P. 217 – 229.

Получено 15.02.10