УДК 517.5

Р. М. Тригуб (Донецк. нац. ун-т)

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ФУРЬЕ И АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ*

We obtain sufficient conditions of the representation of a function in the form of absolutely converging Fourier integral. These conditions are given in terms of joint behavior of the function and its derivatives at infinity, their efficiency and exactness are verified with the use of known example. We also consider radial functions of arbitrary number of variables.

Одержано достатні умови для зображення функції у вигляді абсолютно збіжного інтеграла Фур'є. Ці умови наведено у термінах сумісної поведінки функції та її похідних на нескінченності, їх ефективність і точність перевіряються на відомому прикладі. Розглянуто також радіальні функції довільного числа змінних.

1. Введение. Если

$$f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{i(x,y)} dx, \qquad g \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad (x,y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d,$$

то пишут $f \in A(\mathbb{R}^d)$, при этом $\|f\|_A = \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}$. Возможность представления функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье изучалась многими математиками (Титчмарш, Берлинг, Хермандер, $\ldots$) ввиду важности ее в различных вопросах анализа. Например, принадлежность функции $m(x)$ пространству $A(\mathbb{R}^d)$ делает ее $L_1 \to L_1$ мультипликатором Фурье (и $L_\infty \to L_\infty$ мультипликатором Фурье); последнее обозначается через $m \in M_1$ (соответственно, $m \in M_\infty$). Это сверточный оператор и поэтому, на самом деле, он действует ограниченно из L_∞ в C. Если функция m, вводимая множителем в преобразование Фурье $\hat{f}$, определяет оператор-мультипликатор $L_p \to L_p$, то пишут $m \in M_p$. Точные определения мультипликаторов и их свойства см., например, в [1] (гл. 4). При любом $p \in (1, +\infty] \quad M_1 \subset M_p, M_2 = L_\infty$. Из достаточного условия для M_1 и очевидного для M_2 с помощью подходящей интерполяционной теоремы получают достаточные условия для M_p при $p \in (1,2)$, а затем, применяя двойственность $\left(M_p = M_{p'}, \dfrac{1}{p} +, \dfrac{1}{p'} = 1\right)$, выводят достаточные условия для M_p при любом p.

Разные достаточные условия принадлежности алгебре $A(\mathbb{R})$ приведены в обзоре [2], некоторые дополнения см. в [3] (§ 2).

Одна из таких функций-мультипликаторов m_0 была модельным примером в применении новых общих теорем в 60-х годах для нескольких авторов (см. [4, 5] или [1], гл. 4, 7.4, а также дополнительные ссылки в этих работах):

$$m_0(x) = \theta(x) \frac{e^{i|x|^\alpha}}{|x|^\beta}, \tag{1.1}$$

где θ является C^∞-функцией на $\mathbb{R}^d$, равной 0 возле начала координат и 1 вне некоторого ограниченного множества, а α и $\beta > 0$. Оказалось, что при $d \geq 1$ и $p \geq 1$:

*Поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины (проект F25.1/055).

1) если $\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right| < \dfrac{\beta}{d\alpha}$, то $m_0 \in M_p$ (при $p=\infty$ $m_0 \in A(\mathbb{R}^d)$);

2) если $\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}\right| > \dfrac{\beta}{d\alpha}$, то $m_0 \notin M_p$ (при $p=\infty$ $m_0 \notin A(\mathbb{R}^d)$), за исключением случая $d=\alpha=1$.

Случай $\alpha = d = 1$ очевиден: $m_0 \in M_1 = M_\infty$ при $\beta \geq 0$ и $m_0 \in A(\mathbb{R})$ при любом $\beta > 0$.

В настоящей статье получены достаточные условия для представления функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье. Они даны в терминах совместного поведения функции и ее производных на ∞. Применимость и точность полученных условий можно проверить на приведенном примере. (см. теорему 1.1). Теоремы того же типа и более точные получены в препринте [3]. Кроме того, здесь рассмотрен случай радиальных функций любого числа переменных. (см. теорему 1.2 и ее применение).

Начнем с типичного примера применения таких теорем (для простоты в одномерном случае). Рассматривается следующая задача.

Даны алгебраические полиномы P_1, P_2 и $Q, D = \dfrac{d}{dx}$. Когда выполняется неравенство

$$\|Q(D)f\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq c(\, \|P_1(D)f\|_{L_{p_1}(\mathbb{R})} + \|P_2(D)f\|_{L_{p_2}(\mathbb{R})}\,) \tag{1.2}$$

с постоянной c, не зависящей от функции f?

Сначала пусть вместо двух операторов изучается один. Тогда задача в этом случае формулируется так:

Когда

$$\|Q(D)f\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq c\,\|P(D)f\|_{L_p(\mathbb{R})}? \tag{1.3}$$

Понятно, что должно выполняться условие $s = \deg Q \leq r = \deg P$. А если рассматривать все функции, для которых правая часть конечна, то все решения уравнения $P(D)f = 0$ должны быть решениями уравнения $Q(D)f = 0$, т. е., $Q = cP$, где c — некоторая постоянная. Задача становится содержательной в предположении, что $f \in W_p^r(\mathbb{R})$.

Приведем необходимые условия для выполнения в этом случае неравенства (1.3). Это $q \geq p$ при $s < r$ и $q = p$ при $s = r$, а при $q \neq \infty$ или $p \neq 1$ еще и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)| < \infty, \qquad \phi(x) = \frac{Q(ix)}{P(ix)}. \tag{1.4}$$

Когда условие (1.4) выполнено, имеем при

$$\phi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \phi'(x) = -\frac{a_1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad |x| \to \infty,$$

и разные достаточные условия из [2] (например, функция локально абсолютно непрерывна и вместе с производной принадлежит $L_2(\mathbb{R})$) обеспечивают принадлежность преобразования Фурье $\widehat{\phi - a_0} \in L_1(\mathbb{R})$, или, иными словами, $\phi - a_0$ есть преобразование Фурье некоторой функции $g \in L_1(\mathbb{R})$.

А если, например, $f \in W_1^r(\mathbb{R})$, то, как известно, $\widehat{f^{(k)}}(y) = (iy)^k \widehat{f}(y)$ $(0 \le k \le r)$ и, значит,

$$\widehat{P(D)}f(y) = P(iy)\hat{f}(y), \quad \widehat{Q(D)}f(y) = Q(iy)\hat{f}(y), \quad \widehat{Q(D)}f = \phi\,\widehat{P(D)}f.$$

Следовательно, $Q(D)f$ можно представить в виде свертки g и $P(D)f$, откуда в силу неравенства Минковского непосредственно следует (1.3) при $p = q \in [1, \infty]$. Тем самым задается мультипликатор, определяемый функцией ϕ (см. [1, 6]). На самом деле функция g еще и ограничена почти всюду (п. в.). Применяя неравенство Юнга для свертки (см., например, приложение в [1]), приходим к неравенству (1.3) в общем случае (за подробностями отсылаем читателя к [7], где найдены три критерия, т. е. необходимые и достаточные условия одновременно, существования таких неравенств: на прямой, полупрямой и окружности).

Теперь рассмотрим случай двух операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$ (см. (1.2)).

Будем считать, что $r_2 = \deg P_2 \le \deg P_1 = r_1$, $P_1(x) = I(x) \cdot I_1(x) \cdot \tilde{P}_1(x)$, $P_2(x) = I(x) \cdot I_2(x) \cdot \tilde{P}_2(x)$, где полиномы $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ не обращаются в нуль на мнимой оси $i\mathbb{R}$, а нули I, I_1 и I_2, если таковые имеются, лежат на $i\mathbb{R}$; при этом полиномы I_1 и I_2 не имеют общих нулей. Тогда и полином Q должен делиться на I.

Очевидно, что все значения I_1 на $i\mathbb{R}$ лежат на одной прямой (как и I_2). Это позволяет считать, что I_1 и I_2 принимают на $i\mathbb{R}$ только вещественные значения (после умножения на постоянную).

Если $I_2(ix_1) \ne 0$ $(x_1 \in \mathbb{R})$, а $k = \deg \tilde{P}_1$, то полагаем

$$P_0(x) = iH(x)I_1(x) + I_2(x), \qquad H(x) = (ix + x_1)^k.$$

Тогда $P_0(ix) \ne 0$, $x \in \mathbb{R}$ и нужно трижды применить неравенство (1.3):

$$\|Q(D)f\| \le c_1 \|IP_0(D)f\| \le$$
$$\le c_1(\|HII_1(D)f\| + \|II_2(D)f\|) \le c_2(\|P_1(D)f\| + \|P_2(D)f\|).$$

Отметим, что подобные рассуждения давно применяют и в случае функций нескольких переменных (для эллиптических дифференциальных операторов и близких к ним); см. [1, 8, 9] и приведенную там библиографию.

Заметим, что из неравенства (1.2) при $P_1(x) = x^r$, $r \ge 2$, $P_2(x) \equiv 1$ и $Q(x) = x^k$, $1 \le k \le r - 1$, следует, что для $f \in W_\infty^r$, например,

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le c_3(k, r)\,(\|f^{(r)}\|_\infty + \|f\|_\infty).$$

После замены x на εx $(\varepsilon > 0)$, деления на ε^k и минимизации правой части по $\varepsilon \in (0, \infty)$ получаем известное мультипликативное неравенство для промежуточных производных:

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le c_4(k, r)\|f\|_\infty^{\frac{k}{r}}\,\|f^{(r)}\|_\infty^{1-\frac{k}{r}}.$$

Отсюда легко вывести такое же неравенство для функций на полуоси.

Есть и другой способ доказательства таких неравенств – специальное интегрирование по частям (см., например, [7]).

Следующий одномерный результат при $r = 1$ имеется в [3].

Теорема 1.1. *Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ имеет локально абсолютно непрерывную на $\mathbb{R}$ производную $f^{(r-1)}$ при некотором натуральном r, локально ограниченную п. в. $f^{(r)}$, а при $|x|\to\infty$ (всюду и п. в. соответственно)*

$$|f(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{\gamma_0}}\right), \quad \gamma_0 > 0, \quad |f^{(r)}(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{\gamma_r}}\right), \quad \gamma_r \in \mathbb{R}.$$

Если $(2r-1)\gamma_0+\gamma_r > r$, то f принадлежит $A(\mathbb{R})$, а при $(2r-1)\gamma_0+\gamma_r < r$ такая функция может не принадлежать $A(\mathbb{R})$.

Предполагаем далее, что функция f радиальная, т. е., $f(x) = f_0(|x|)$. Если такая функция принадлежит $A(\mathbb{R}^d)$, то, как известно, при $t\in\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$ и $\lambda = \dfrac{d}{2}-1$

$$f_0(t) = \int\limits_0^\infty g_1(u) j_\lambda(ut)\,du, \quad g_1\in L_1(\mathbb{R}_+). \tag{1.5}$$

Здесь $j_\lambda(t) = \dfrac{J_\lambda(t)}{t^\lambda}$, где J_λ — бесселева функция порядка $\lambda > -1$ (см. [6, гл. IV, §3]), j_λ — целая функция экспоненциального типа, которая ограничена на $\mathbb{R}$ вместе с любой производной, и выполняется неравенство

$$|j_\lambda(t)| \le j_\lambda(0) = \frac{1}{2^\lambda\Gamma(1+\lambda)}.$$

Далее, при $\lambda > -\dfrac{1}{2}$

$$j_\lambda(t) = \frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1/2)\Gamma(1/2)}\int\limits_{-1}^{1}(1-u^2)^{\lambda-\frac12}e^{iut}\,du, \quad j_{-\frac12}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t.$$

Если функция $f_0 : \mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ представима в виде (1.5), то будем писать $f_0 \in$ $\in A_\lambda = A_\lambda(\mathbb{R}_+)$. Так что $f_0(|x|)\in A(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда $f_0\in A_\lambda$ при $\lambda = \dfrac{d}{2}-1$.

При $\lambda > \mu$ выполнено соотношение $A_\lambda\subset A_\mu$. Например, при малых $\epsilon > 0$ $j_{\lambda+\epsilon}\in A_\lambda$, а $j_{\lambda-\epsilon}\notin A_\lambda$. Необходимые условия принадлежности A_λ см. в [10] (теорема 3) и [11].

Теорема 1.2. *Пусть $-1<\mu<\lambda$ или $\lambda = \mu+n+\delta$, где $n\ge 0$ целое, а $\delta\in(0,1]$.*

Для того чтобы F_0 принадлежало A_λ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\}_{t=0} = 0, \qquad \nu = 0,1,\ldots,n,$$

и f_0 принадлежало A_μ, где при $\delta = 1$ ($\lambda-\mu\in\mathbb{N}$)

$$f_0(t) = \frac{1}{t^{2\mu}}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\}_{t\to t^2}$$

(замена после дифференцирования t на t^2), а при $\delta\in(0,1)$ ($\lambda-\mu\notin\mathbb{N}$) f_0 задается дробной производной Римана – Лиувилля порядка δ

$$t^\mu f_0(\sqrt{t}) = D^\delta\frac{d^n}{dt^n}\{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^t\frac{1}{(t-u)^\delta}\frac{d^{n+1}}{du^{n+1}}\{u^\lambda F_0(\sqrt{u})\}\,du.$$

Эта теорема позволяет для радиальных функций легко переходить, во всяком случае, при степенном поведении функции и ее производных, от одномерного случая (теорема 1.1) к оценкам в пространствах любой размерности без потери точности (см. ниже после доказательства теоремы 1.2).

2. Доказательства. Доказательство первого утверждения теоремы 1.1, как и в [3], основано на следующем предложении (приводится одномерный вариант).

Лемма 2.1. (лемма 4 в [10]). *Пусть f принадлежит $C_0(\mathbb{R})$, т. е. функция непрерывная и* $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. *Положим при* $h > 0$

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x-h) - f(x+h), \quad \Delta_h^r f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{r-1} f(x)), \quad r \geq 2$$

(r*-я симметричная разность*). *Если при некотором* r

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_{\frac{\pi}{2^s}}^r f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то f принадлежит $A(\mathbb{R})$.

Это предложение типа теоремы Бернштейна для рядов Фурье. Здесь важно уже то, что функция может не принадлежать $L_2(\mathbb{R})$. Эта лемма при $r = 1$ доказана также в [12] (теорема 3). Отметим, что из этой леммы в [10] выведена одна теорема Берлинга [13] (при этом используются и вторая часть леммы, которая здесь не приведена). Обобщение этой леммы можно найти в [11].

***Доказательство теоремы* 1.1.** Различные положительные постоянные, не зависящие от функции f и γ, будем обозначать буквой c.

Нужно доказать сходимость двух рядов (норма в $L_2(\mathbb{R})$):

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{\frac{s}{2}} \|\Delta_{\frac{\pi}{2^s}}^r f(\cdot)\|_2, \quad \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-\frac{s}{2}} \|\Delta_{\pi 2^s}^r f(\cdot)\|_2. \tag{2.1}$$

По условию теоремы существует такое число, которое, не уменьшая общности, можно считать равным единице, что

$$\sup(1+|x|)^{\gamma_0}|f(x)| \leq 1, \quad \operatorname{ess\,sup}(1+|x|)^{\gamma_r}|f^{(r)}(x)| \leq 1.$$

Тогда

$$|\Delta_h^r f(x)| \leq 2^r \max_{0 \leq \nu \leq r} \frac{1}{(1+|x \pm \nu h|)^{\gamma_0}} \tag{2.2}$$

и

$$|\Delta_h^r f(x)| = \left| \int_{x-h}^{x+h} du_1 \cdots \int_{u_{r-1}-h}^{u_{r-1}+h} f^{(r)}(u_r) du_r \right| \leq (2h)^r \max_{x-rh \leq u \leq x+rh} \frac{1}{(1+|u|)^{\gamma_r}}. \tag{2.3}$$

1. Пусть сначала $\gamma_r \leq \dfrac{1}{2}$. Из условия $(2r-1)\gamma_0 + \gamma_r > r$ следует, что $\gamma_0 > \dfrac{1}{2}$ и, значит, f принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Но тогда второй ряд в (2.1) сходится, так как при любом h

$$\|\Delta_h^r f(.)\|_2 \le 2^r \|f\|_2.$$

Первый ряд в (2.1) в силу (2.2) и (2.3) при любом $\delta \in [-1,1]$ не больше

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{\frac{S}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[2^r \max_{0\le\nu\le r} \frac{1}{(1+\min|x\pm\frac{\nu\pi}{2^s}|)^{\gamma_0}} \right]^{1-\delta} \times \right.$$

$$\left. \times \left[2^r \left(\frac{\pi}{2^s}\right)^r \max_{x-\frac{r\pi}{2^s}\le u\le x+\frac{r\pi}{2^s}} \frac{1}{(1+|u|)^{\gamma_r}} \right]^{1+\delta} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

или, не выписывая числовой множитель,

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{\frac{S}{2}(1-r(1+\delta))} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \max_{0\le\nu\le r} \frac{1}{(1+\min|x\pm\frac{\nu\pi}{2^s}|)^{\gamma_0(1-\delta)}} \times \right.$$

$$\left. \times \max_{x-\frac{r\pi}{2^s}\le u\le x+\frac{r\pi}{2^s}} \frac{1}{(1+|u|)^{\gamma_r(1+\delta)}} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что δ можно выбрать так, чтобы $1-r(1+\delta)<0$, а интеграл сходился и был ограничен по $s\ge 0$.

Разобьем интеграл на два: $|x|\le r\pi$ и $|x|\ge r\pi$.

На конечном интервале подынтегральная функция ограничена по x и s.

При $|x|\ge r\pi$ подынтегральная функция четная. Имеем интеграл

$$\int_{r\pi}^{\infty} \frac{1}{(1+x-r\pi)^{\gamma_0(1-\delta)}} \Big(\frac{1}{(1+x-r\pi)^{\gamma_r(1+\delta)}} + \frac{1}{(1+x+r\pi)^{\gamma_r(1+\delta)}} \Big) dx,$$

который, как легко видеть, сходится, если $\gamma_0(1-\delta)+\gamma_r(1+\delta)>1$.

Осталось выбрать $\delta > \dfrac{1}{r}-1$ и достаточно близким к $\dfrac{1}{r}-1$.

2. Пусть теперь $\gamma_r > \dfrac{1}{2}$.

Тогда $f^{(r)}$ принадлежит L_2. Но всегда $\|\Delta_h^r f(\cdot)\|_2 \le (2h)^r \|f^{(r)}\|_2$ и первый ряд в (2.1) сходится.

Аналогично предыдущему, используя (2.2) и (2.3), с учетом того, что $\gamma_r>0$, получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{-\frac{S}{2}(1-r(1+\delta))} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \max_{0\le\nu\le r} \frac{1}{(1+\min|x\pm\nu\pi 2^s|)^{\gamma_0(1-\delta)}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(1+\min|x\pm r\pi 2^s|)^{\gamma_r(1+\delta)}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-\frac{S}{2}(1-r(1+\delta))} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \max_{0\le\nu\le r} \frac{1}{(1+\min|x\pm\nu\pi 2^s|)^{\gamma_0(1-\delta)+\gamma_r(1+\delta)}} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выносим знак $\max$ за интеграл и учитываем, что при $\phi(x) \geq 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(\min|x \pm h|)dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \phi(\min|x \pm h|)dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{h} \phi(h-x)dx + 2\int\limits_{h}^{\infty} \phi(x-h)dx \leq 4\int_{0}^{\infty} \phi(x)dx.$$

Так что при $\gamma_0(1-\delta) + \gamma_r(1+\delta) > 1$ интеграл сходится и ограничен по s. Выбираем $\delta < \dfrac{1}{r} - 1$ и достаточно близким к $\dfrac{1}{r} - 1$. Доказательство первой части (позитивной) закончено.

Для доказательства второй части теоремы 1.1 можно воспользоваться примером m_0, приведенным во введении (см. случай 2 при $d = 1$ и $p = \infty$).

Очевидно, что при $|x| \to \infty$

$$m_0^{(r)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\beta + r(1-\alpha)}}\right).$$

При $(2r-1)\gamma_0 + \gamma_r < r$ полагаем в этом примере $\beta = \gamma_0$ и $\alpha = 1 - \dfrac{\gamma_r - \gamma_0}{r}$. Тогда $2\beta < \alpha$ и $m_0 \notin A(\mathbb{R})$, если еще $\alpha \neq 1$. Если же $\alpha = 1$ $(\gamma_r = \gamma_0)$, то можно считать, что, на самом деле, $\gamma_r < \gamma_0$, и применить предыдущее рассуждение.

Заметим, что из теоремы при любом r следует, что $m_0 \in A(\mathbb{R})$ (см. случай 1, $p = \infty$).

Приведем доказательство второй части теоремы 1.1 без использования примера m_0, но только при $\gamma_r \geq 0$ (производная ограничена). Кстати, в работе [4] только этот случай и рассматривается ($\alpha \in (0,1)$) в отличие от работы [5].

Предположим, что все функции, удовлетворяющие условиям теоремы при некоторых $\gamma_0 > 0$, $\gamma_r \geq 0$ и $(2r-1)\gamma_0 + \gamma_r < r$, принадлежат $A(\mathbb{R})$. Тогда в силу теоремы Банаха о замкнутом графике существует число c такое, что для всех таких функций

$$\|f\|_A \leq c(\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^{\gamma_0}|f(x)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^{\gamma_r}|f^{(r)}(x)|). \tag{2.4}$$

Покажем, что такое неравенство не может быть верным уже для семейства функций $f_\gamma(x) = e^{-\gamma x^2}$ при комплексном $\gamma \to 0$ специальным образом. Точнее, положим $\mathrm{Re}\gamma = a \in (0,1)$, а $|\gamma| = a^\epsilon$, где $\epsilon \in (0,1)$ и будет выбран в зависимости от γ_0 и γ_r. При этом a и $\dfrac{a}{\gamma} \to 0$.

Имеем

$$\|f\|_A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|dy, \quad \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx.$$

Как известно, $\hat{f}_{\frac{1}{2}} = f_{\frac{1}{2}}$. Отсюда при $\gamma > 0$ $\hat{f}_\gamma(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\gamma}} e^{-\frac{y^2}{4\gamma}}$. А поскольку f_γ и $\hat{f}_\gamma$ при фиксированном y аналитичны в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$, это равенство справедливо и при всех γ с условием $\mathrm{Re}\,\gamma = a > 0$.

Выполняя в интеграле замену $t = \dfrac{1}{|\gamma|}\sqrt{\dfrac{a}{2}}y$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_\gamma(y)|dy = \frac{1}{\sqrt{2|\gamma|}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ay^2}{4|\gamma|^2}} dy = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{|\gamma|}{a}}\hat{f}_{\frac{1}{2}}(0) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{|\gamma|}{a}}. \tag{2.5}$$

Переходим к правой части неравенства (2.4):

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^{\gamma_0}|f_\gamma(x)| \le \sup_{|x|\le 1}(1+|x|)^{\gamma_0}e^{-ax^2} + \sup_{|x|\ge 1}(1+|x|)^{\gamma_0}e^{-ax^2} \le$$

$$\le 2^{\gamma_0} + 2^{\gamma_0}\sup_{|x|\ge 1}|x|^{\gamma_0}e^{-ax^2}.$$

Учтем теперь, что при $\delta > 0$ (при $\delta \le 0$ ответ очевиден в силу монотонности произведения)

$$\max_{0<c\le u\le d\le\infty} u^{2\delta}e^{-au^2} = \frac{1}{a^\delta}\max_{ac^2\le t\le ad^2} t^\delta e^{-t},$$

$$t^\delta e^{-t} \le \delta^\delta e^{-\delta}(t\ge 0), \quad \max_{0<C\le t\le D} t^\delta e^{-t} = \max\{C^\delta e^{-C}, D^\delta e^{-D}\}, \quad \delta\notin[C,D]. \tag{2.6}$$

Таким образом, при $a\in(0,1)$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^{\gamma_0}|f_\gamma(x)| \le 2^{\gamma_0}\left(1 + a^{-\frac{\gamma_0}{2}}\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^{\frac{\gamma_0}{2}}e^{-\frac{\gamma_0}{2}}\right) \le \frac{c}{a^{\frac{\gamma_0}{2}}}. \tag{2.7}$$

Переходим к оценке $|f_\gamma^{(r)}(x)|$.

Применяем следующую формулу Schwatt – Perron: при натуральном r

$$\frac{d^r(f(g(x))}{dx^r} = \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}f^{(k)}(g(x))\sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}(-1)^{k-s}(g(x))^{k-s}\frac{d^r(g^s(x))}{dx^r}.$$

При $f(x) = e^{-\gamma x}$ и $g(x) = x^2$ имеем

$$(e^{-\gamma x^2})^{(r)} = \sum_{k=[\frac{r+1}{2}]}^{r}\frac{1}{k!}(-\gamma)^k e^{-\gamma x^2}\times$$

$$\times\sum_{\frac{r}{2}\le s\le k}\binom{k}{s}(-1)^{k-s}x^{2(k-s)}x^{2s-r}2s(2s-1)\cdots(2s-r+1),$$

откуда следует, что

$$|(e^{-\gamma x^2})^{(r)}| \le c\sum_{k=[\frac{r+1}{2}]}^{r}|\gamma|^k e^{-ax^2}|x|^{2k-r} \le$$

$$\le cre^{-ax^2}\max\{|\gamma|^{[\frac{r+1}{2}]}|x|^{2[\frac{r+1}{2}]-r}, |\gamma|^r|x|^r\}.$$

Поэтому

$$\sup(1+|x|)^{\gamma_r}|f_\gamma^{(r)}(x)| \le c \sup_{|x|\le 1} e^{-ax^2}|\gamma|^{[\frac{r+1}{2}]}|x|^{2[\frac{r+1}{2}]-r}\max\{1,|\gamma|^{[\frac{r}{2}]}|x|^{2[\frac{r}{2}]}\}+$$

$$+(2^{\gamma_r}+1)\sup_{|x|\ge 1} e^{-ax^2}|\gamma|^{[\frac{r+1}{2}]}|x|^{\gamma_r+2[\frac{r+1}{2}]-r}\max\{1,(|x|^2|\gamma|)^{[\frac{r}{2}]}\}. \qquad (2.8)$$

При $|x|\le 1$ искомый супремум не больше

$$c|\gamma|^{[\frac{r+1}{2}]}\sup_{|x|\le 1}|x|^{2[\frac{r+1}{2}]-r}e^{-ax^2}\le c|\gamma|^{[\frac{r+1}{2}]}. \qquad (2.9)$$

При $|x|\ge 1$ рассмотрим два случая: $|x|\le \dfrac{1}{\sqrt{|\gamma|}}$ и $|x|\ge \dfrac{1}{\sqrt{|\gamma|}}$.

При $|x|\ge \dfrac{1}{\sqrt{|\gamma|}}$ соответствующий супремум в силу (2.6) при достаточно малом $\dfrac{a}{|\gamma|}$ и $\gamma_r+r>0$ равен

$$\frac{|\gamma|^r}{a^{\frac{\gamma_r+r}{2}}}\sup_{t\ge\frac{a}{|\gamma|}} t^{\frac{\gamma_r+r}{2}}e^{-t}=\frac{|\gamma|^r}{a^{\frac{\gamma_r+r}{2}}}\Big(\frac{\gamma_r+r}{2}\Big)^{\frac{\gamma_r+r}{2}}e^{-\frac{\gamma_r+r}{2}}\le c\frac{|\gamma|^r}{a^{\frac{\gamma_r+r}{2}}}. \qquad (2.10)$$

При $1\le|x|\le\dfrac{1}{\sqrt{|\gamma|}}$ рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного r.

При четном r и $\gamma_r\ge 0$ (см. (2.6)

$$\sup_{1\le|x|\le\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}}|x|^{\gamma_r}|\gamma|^{\frac{r}{2}}e^{-ax^2}\le c\frac{|\gamma|^{\frac{r}{2}}}{a^{\frac{\gamma_r}{2}}}. \qquad (2.11)$$

при нечетном r (см. (2.6))

$$\sup_{1\le|x|\le\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}}|x|^{\gamma_r}|\gamma|^{\frac{r+1}{2}}e^{-ax^2}|x|\le c\frac{|\gamma|^{\frac{r+1}{2}}}{a^{\frac{\gamma_r+1}{2}}}, \quad \gamma_r+1>0. \qquad (2.12)$$

Собирая при нечетном r и $\dfrac{a}{\gamma}\to+0$ оценки (2.4), (2.5), (2.7)–(2.9), (2.10) и (2.12), получаем

$$\sqrt{\frac{|\gamma|}{a}}=O\left(\frac{1}{a^{\frac{\gamma_0}{2}}}+|\gamma|^{\frac{r+1}{2}}+\frac{|\gamma|^r}{a^{\frac{r+\gamma_r}{2}}}+\frac{|\gamma|^{\frac{r+1}{2}}}{a^{\frac{\gamma_r+1}{2}}}\right).$$

При $|\gamma|=a^\epsilon, \epsilon\in(0,1)$ и $a\to+0$ имеем

$$1=O(a^{\frac{1-\gamma_0-\epsilon}{2}}+a^{\frac12+\epsilon\frac{r}{2}}+a^{\frac{r\epsilon-\gamma_r}{2}}+a^{\epsilon(r-\frac12)-\frac{r+\gamma_r}{2}+\frac12}).$$

Но такого соотношения быть не может, если

$$1-\gamma_0-\epsilon>0, \quad r\epsilon-\gamma_r>0, \quad \epsilon(2r-1)-(r+\gamma_r)+1>0$$

или

$$\gamma_0<1-\epsilon, \quad \gamma_r<r\epsilon, \quad \gamma_r<\epsilon(2r-1)-r+1.$$

Но второе неравенство следует из третьего, так как

$$\epsilon(2r-1)-r+1\le r\epsilon \iff (r-1)\epsilon\le r-1,$$

а $(2r-1)(1-\epsilon)+\epsilon(2r-1)-r+1=r$. Так что $(2r-1)\gamma_0+\gamma_r<r$, а за счет выбора $\epsilon\in(0,1)$ можно получить любые γ_0 и γ_r, удовлетворяющие этому условию. Имеем противоречие с предположением.

При четном r, собирая оценки (2.4), (2.5), (2.7)–(2.9), (2.11) и (2.13), при $\dfrac{a}{\gamma}\to$ $\to+0$ получаем

$$\sqrt{\frac{|\gamma|}{a}}=O\left(\frac{1}{a^{\frac{\gamma_0}{2}}}+|\gamma|^{\frac{r}{2}}+\frac{|\gamma|^r}{a^{\frac{r+\gamma_r}{2}}}+\frac{|\gamma|^{\frac{r}{2}}}{a^{\frac{\gamma_r}{2}}}\right),$$

откуда

$$1=O(a^{\frac{1-\gamma_0-\epsilon}{2}}+a^{\frac{(r-1)\epsilon-\gamma_r+1}{2}}+a^{\epsilon(r-\frac{1}{2})-\frac{r+\gamma_r}{2}+\frac{1}{2}}).$$

Но такого соотношения быть не может при $a\to+0$, если

$$1-\gamma_0-\epsilon>0,\quad (r-1)\epsilon-\gamma_r+1>0,\quad \epsilon(2r-1)-(r+\gamma_r)+1>0$$

или

$$\gamma_0<1-\epsilon,\quad \gamma_r<(r-1)\epsilon+1,\quad \gamma_r<\epsilon(2r-1)-r+1.$$

Но второе неравенство следует из третьего, так как

$$\epsilon(2r-1)-r+1<(r-1)\epsilon+1 \iff r\epsilon<r.$$

Завершается доказательство, как и при нечетном r.

Теорема 1.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.2.** Через $c(..)$ с разными индексами обозначаем некоторые положительные постоянные, зависящие лишь от величин, стоящих в круглых скобках.

Проверим сначала, что для того чтобы F_0 принадлежало A_λ необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $f_0\in A_\mu$ при $-1<\mu<\lambda)$ такая, что

$$F_0(t)=\int\limits_0^1 u^{2\mu+1}(1-u^2)^{\lambda-\mu-1}f_0(ut)du.$$

Доказательство основано на следующем интеграле Сонина (см. формулу (5) в [14], § 7.7):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} j_\mu(t\sin\theta)(\sin\theta)^{2\mu+1}(\cos\theta)^{2\lambda-2\mu-1}d\theta=2^{\lambda-\mu-1}\Gamma(\lambda-\mu)j_\lambda(t)$$

или после замены в интеграле $\sin\theta=u$

$$j_\lambda(t)=c_1(\lambda,\mu)\int\limits_0^1 u^{2\mu+1}(1-u^2)^{\lambda-\mu-1}j_\mu(ut)du,\qquad -1<\mu<\lambda.$$

Если теперь $f_0\in A_\mu$, то при $g\in L_1(\mathbb{R}_+)$

$$\int\limits_0^1 u^{2\mu+1}(1-u^2)^{\lambda-\mu-1}f_0(ut)du=\int\limits_0^1 u^{2\mu+1}(1-u^2)^{\lambda-\mu-1}du\int\limits_0^\infty g(y)j_\mu(yut)dy=$$

$$= \int\limits_0^\infty g(y)dy \int_0^1 u^{2\mu+1}(1-u^2)^{\lambda-\mu-1} j_\mu(yut)du = \frac{1}{c_1(\lambda,\mu)} \int_0^\infty g(y) j_\lambda(ty)dy \in A_\lambda.$$

Если

$$F_0(t) = \int_0^1 G(u) j_\lambda(ut)du, \quad G \in L_1(\mathbb{R}_+),$$

то при

$$f_0(t) = c_1(\lambda,\mu) \int\limits_0^1 G(u) j_\mu(ut)du$$

в силу того же интеграла Сонина

$$F_0(t) = \int\limits_0^1 u^{2\mu+1}(1-u^2)^{\lambda-\mu-1} f_0(ut)\, du.$$

Соответствие между f_0 и F_0 взаимно однозначное, что следует, например, из теоремы Титчмарша о свертке (см. также ниже формулу).

Если теперь в предыдущем соотношении между F_0 и f_0 выполнить замену $ut \to u$, то получим

$$F_0(t) = \frac{1}{t^{2\lambda}} \int\limits_0^t (t^2-u^2)^{\lambda-\mu-1} u^{2\mu+1} f_0(u)\, du,$$

а после замен $t \to \sqrt{t}$ и $u \to \sqrt{u}$

$$t^\lambda F_0(\sqrt{t}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t (t-u)^{\lambda-\mu-1} u^\mu f_0(\sqrt{u})du.$$

Если $\lambda - \mu = n + \delta$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\delta \in (0,1]$, то

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}\{t^\lambda\, F_0(\sqrt{t})\}_{t=0} = 0, \qquad 0 \le \nu \le n,$$

и

$$\frac{d^n}{dt^n}\{t^\lambda\, F_0(\sqrt{t})\} = c_2(\lambda,\mu) \int\limits_0^t (t-u)^{\delta-1} u^\mu f_0(\sqrt{u})du.$$

При $\delta = 1$ ($\lambda - \mu = n+1 \in \mathbb{N}$)

$$f_0(t) = \frac{1}{c_2(\lambda,\mu)} t^{-2\mu} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\{t^\lambda\, F_0(\sqrt{t})\}_{t \to t^2}.$$

Если же $\delta \in (0,1)$, то решаем интегральное уравнение Абеля с помощью дробной производной (см., например, [15], $\S 2, 1^0$)

$$t^\mu\, f_0(\sqrt{t}) = \frac{1}{c_2(\lambda,\mu)\Gamma(1-\delta)} D^\delta \frac{d^n}{dt^n} t^\lambda\, F_0(\sqrt{t}) =$$

$$= c_3(\lambda, \mu,) \int\limits_0^t \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} u^\lambda F_0(\sqrt{u}) \frac{du}{(t-u)^\delta}.$$

Теорема 1.2 доказана.

Применим эту теорему к выводу достаточных условий принадлежности функции F_0 пространству A_λ, основываясь на теореме 1.1 при $r = 1$ $\left(\mu = -\dfrac{1}{2}\right)$.

Пусть $\lambda = n + \dfrac{1}{2}$ $\quad (\delta = 1)$ и при $t \to \infty$

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{1+\gamma_0}{2}}}\right), \quad \gamma_0 > 0, \quad \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} \{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\} = O\left(\frac{1}{t^{1+\frac{\gamma_1}{2}}}\right). \tag{2.13}$$

Тогда

$$f_0(\sqrt{t}) = \sqrt{t} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{\gamma_0}{2}}}\right) \tag{2.14}$$

и

$$f_0'(\sqrt{t}) = 2t \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} \{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\} + \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{t^\lambda F_0(\sqrt{t})\}, \quad f_0'(t) = O\left(\frac{1}{t^{\gamma_1}} + \frac{1}{t^{1+\gamma_0}}\right). \tag{2.15}$$

Выясним, при каких условиях на F_0 выполняются неравенства (2.13).

Очевидно, что

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{t^{n+\frac{1}{2}} F_0(\sqrt{t})\right\} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \{F_0(\sqrt{t})\} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \ldots$$

$$\ldots (n + \frac{1}{2} - (n + 2 - \nu)) t^{n+\frac{1}{2}-(n+1-\nu)} = O\left(\sum_{\nu=0}^{n+1} \left|\frac{d^\nu}{dt^\nu} \{F_0(\sqrt{t})\}\right| t^{\nu-\frac{1}{2}}\right).$$

Аналогично получаем

$$\frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} \left\{t^{n+\frac{1}{2}} F_0(\sqrt{t})\right\} = O\left(\sum_{\nu=0}^{n+2} \left|\frac{d^\nu}{dt^\nu} \{F_0(\sqrt{t})\}\right| t^{\nu-\frac{3}{2}}\right).$$

Далее применяем формулу Schwatt – Perron $(\nu \geq 1)$

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} F_0(\sqrt{t}) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k!} F_0^{(k)}(\sqrt{t}) \sum_{s=1}^{\nu} \binom{k}{s} (-1)^{k-s} t^{\frac{k-s}{2}} \frac{d^\nu}{dt^\nu} t^{\frac{s}{2}} =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{\nu} |F_0^{(k)}(\sqrt{t})| t^{\frac{k}{2}-\nu}\right).$$

Поэтому

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{t^{n+\frac{1}{2}} F_0(\sqrt{t})\right\} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}} |F_0(\sqrt{t})| + \sum_{\nu=1}^{n+1} \left|\frac{d^\nu}{dt^\nu} \{F_0(\sqrt{t})\}\right| t^{\nu-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}|F_0(\sqrt{t})| + \sum_{\nu=1}^{n+1} t^{\nu-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\nu} |F_0^{(k)}(\sqrt{t})| t^{\frac{k}{2}-\nu}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{n+1} |F_0^{(k)}(\sqrt{t})| t^{\frac{k}{2}}\right).$$

Считаем далее, что при $k \in [0, n+1]$ и $t \to \infty$

$$F_0^{(k)}(t) = O\left(\frac{1}{t^{k+\gamma_0}}\right). \tag{2.16}$$

Тогда выполняется первое неравенство (2.13).

Заметим, что здесь уместно применить неравенство для промежуточных производных (см. введение) на полуоси $[t, \infty)$, чтобы оставить ограничение только на крайние производные ($k = 0$ и $k = n+1$).

Аналогично получаем

$$\frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}}\left\{t^{n+\frac{1}{2}} F_0(\sqrt{t})\right\} = O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{n+2} |F_0^{(k)}(\sqrt{t})| t^{\frac{k}{2}}\right).$$

Для выполнения второго из неравенств (2.13) теперь достаточно предположить, что при $k \in [0, n+2]$ и $t \to \infty$

$$F_0^{(k)}(t) = O\left(\frac{1}{t^{k+\gamma_1-1}}\right). \tag{2.17}$$

Итак, достаточные условия для принадлежности F_0 к A_λ в рассматриваемом случае (см. еще (2.14) и (2.15)) — это (2.16) и (2.17) при $\gamma_0 > 0$ и $\gamma_0 + \gamma_1 > 1$.

Проверим эти условия на известном примере $F_0 = m_0$ (см. введение): при $t \to \infty$

$$F_0^{(k)}(t) = O\left(\frac{1}{t^{\beta+k(1-\alpha)}}\right).$$

Указанные условия выполняются при $\gamma_0 = \beta - (n+1)\alpha$ и $\gamma_1 = \beta + 1 - (n+2)\alpha$. Получаем, что при $d = 2n+3$ и $2\beta > d\alpha > 0 \quad m_0(|x|) \in A(\mathbb{R}^d)$.

В заключение — несколько слов о Викторе Николаевиче Коновалове, памяти которого посвящена эта статья. Он является пионером в открытии новых тем в теории приближений функций. Назовем две из них. Ему принадлежит первое точное неравенство для промежуточных производных в случае функций нескольких переменных [16] и первый результат об условных поперечниках и само понятие условного поперечника [17].

1. *Stein E. M.* Singular integrals and differentiability properties of functions. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1970.
2. *Samko S. G., Kostetskaya G. S.* Absolute integrability of Fourier integrals // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Математика. – 1994. – **1**. – С. 138 – 168.
3. *Liflyand E., Trigub R.* Known and new results on absolute integrability of Fourier integrals. – 2009. – 29 p. – Preprint CRM 859.
4. *Fefferman Ch.* Inequalities for strongly singular convolution operators // Acta Math. – 1970. – **124**. – P. 9 – 36.
5. *Stein E. M.* Singular integrals, harmonic functions, and differentiability properties of functions of several variables // Proc. Symp. Pure Math. – 1967. – **10**. – P. 316 – 335.
6. *Stein E. M., Weiss G.* Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1971.
7. *Тригуб Р. М.* О сравнении линейных дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 2007. – **82**, С. 426 – 440.

8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975.
9. *Belinsky E. S., Dvejrin M. Z., Malamud M. M.* Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators // Russ. J. Math. Phys. – 2005. – **12**. – P. 6 – 16.
10. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – 1378 – 1408.
11. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and appoximation of functions. – Kluwer-Springer, 2004.
12. *Бесов О. В.* К теореме Хермандера о мультипликаторах Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 164 – 180.
13. *Beurling A.* On the spectral synthesis of bounded functions // Acta Math. – 1949. – **81**. – P. 225 – 238.
14. *Bateman H., Erdélyi A.* Higher transcendental functions. New York: McGraw Hill Book Comp., 1954. – Vol. 2.
15. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
16. *Коновалов В. Н.* Точные неравенства для норм функции,третьих частных ,вторых смешанных или косых производных // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 67 – 78.
17. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Там же. – 1984. – **35**, № 3. – С. 369 – 380.

Получено 25.01.10