УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен (Нац. техн. ун-т України „КПУ”, Київ),
В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З НЕДОДАТНИМ РОДОМ

We investigate properties of the fundamental solution and establish the correct solvability of the Cauchy problem for a class of degenerate Kolmogorov-type equations with $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-parabolic part with respect to the main group of variables and nonpositive vector genus in the case where solutions are infinitely differentiable functions and their initial values may be generalized functions of the Gevrey ultradistributions type.

Исследованы свойства фундаментального решения и установлена корректная разрешимость задачи Коши для одного класса вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболической частью по основной группе переменных и неположительным векторным родом в случае, когда решения являются бесконечно дифференцируемыми функциями, а их начальные значения могут быть обобщенными функциями типа ультрараспределений Жевре.

Вивчаючи на початку 40-х років минулого століття броунівський рух фізичної системи, А. М. Колмогоров [1] отримав ультрапараболічне рівняння, яке задовольняє щільність ймовірності можливих значень координат системи та їх похідних за часовою змінною. Як згодом з’ясувалося, воно має важливе значення при дослідженні теплових і дифузійних процесів з інерцією в однорідних середовищах. Поява цього рівняння стала поштовхом до зародження теорії ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова і, взагалі, теорії вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова довільних порядків. Розвитком цих теорій займалося чимало як вітчизняних, так і зарубіжних математиків (див. огляд у [2]). Це відбувалося в основному шляхом розширення відомих та означення нових класів ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова (завдяки збільшенню порядку рівняння, узагальненню параболічності його невиродженої частини, послабленню умов на коефіцієнти рівняння, передбаченню наявності в його структурі різних типів вироджень за часовою змінною тощо), а також побудови й дослідження властивостей фундаментального розв’язку та його можливих застосувань.

У роботі [3] розглянуто новий клас вироджених рівнянь, які є ще одним узагальненням рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. Ці рівняння мають вигляд

$$(\partial_t + P(t, \partial_x))u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi^n_{(0,T]}, \tag{1}$$

де $P(t, \partial_x) := -\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - A(t, i\partial_{x_1})$, а $A(t, i\partial_{x_1})$ — диференціальний вираз за змінною x_1 розмірності n_1 з не залежними від просторової змінної коефіцієнтами такий, що відповідний вираз

$$\partial_t - A(t, i\partial_{x_1}) \tag{2}$$

є $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічним на множині $\Pi^{n_1}_{(0,T]}$ у сенсі [4] (зокрема, він може бути параболічним у сенсі Петровського, Ейдельмана та Шилова [5]). Тут $x_j :=$ $:= (x_{j1}; \ldots; x_{jn_j})$, $j \in \{1; 2; 3\}$, $x := (x_1; x_2; x_3)$; n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1 + n_2 + n_3$, а $\Pi^m_{(\tau,T]} := \{(t, \xi) | t \in (\tau, T], \xi \in \mathbb{R}^m\}$.

Для такого класу рівнянь у випадку додатного векторного роду виразу (2) встановлено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), які дали змогу використати простори типу S із [6], елементи яких допускають аналітичне продовження в комплексний простір до цілих функцій, як основне середовище, в якому досліджено зазначену задачу. При цьому з'ясувалося, що топологічно спряжений простір із тим простором типу S, до якого належить ФРЗК, становить множину початкових даних, з якими відповідна задача Коші коректно розв'язна, а її розв'язок є звичайною нескінченно диференційовною функцією за просторовою змінною.

У цій статті зазначені результати з [3] поширюються на випадок рівнянь (1) з недодатним векторним родом виразу (2). Слід зазначити, що недодатність роду зумовлює послаблення гладкості елементів відповідних просторів типу S, які тут є середовищем дослідження, що внеможливило використання методів дослідження властивостей ФРЗК з [3].

1. Постановка задачі. Будемо використовувати позначення із [3], а також наведені там відомості з [6] про простори типу S.

Розглянемо рівняння (1), в якому $A(t, i\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} a_{k_1}(t) i^{|k_1|_*} \partial_{x_1}^{k_1}$ — диференціальний вираз порядку $\overrightarrow{p} := (p_1; \ldots; p_{n_1}) \geq \overrightarrow{1}$. Припускатимемо, що коефіцієнти $a_{k_1}(\cdot)\colon [0;T] \to \mathbb{C}$ — неперервні функції такі, що відповідний диференціальний вираз (2) в шарі $\Pi^{n_1}_{(0,T]}$ є рівномірно параболічним у сенсі [4] (тут $\overrightarrow{h} := (h_1; \ldots; h_{n_1})$ — векторний показник параболічності, $\overrightarrow{0} < \overrightarrow{h} \leq \overrightarrow{p}$). Через $\overrightarrow{\mu}$ позначимо векторний рід виразу (2), тобто вектор з координатами $\mu_j := \sup \nu_j$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$, де вектор $\overrightarrow{\nu} := (\nu_1; \ldots; \nu_{n_1})$ такий, що в області

$$G_{\overrightarrow{\nu}} := \left\{ (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}^{n_1} \,\middle|\, |\eta_j| \leq c_j (1 + |\xi_j|)^{\nu_j},\ c_j > 0,\ j \in \mathbb{N}_{n_1} \right\}$$

виконується нерівність

$$\operatorname{Re} A(t, \xi + i\eta) \leq -\delta |\xi|_*^{\overrightarrow{h}}, \quad t \in [0;T],$$

зі сталою $\delta > 0$, яка не залежить від t. Із досліджень, проведених у [5], фактично випливає, що $\overrightarrow{\mu} \leq \overrightarrow{1}$. Далі вважатимемо, що для рівняння (1) векторний рід є недодатним, тобто $\overrightarrow{\mu} \leq \overrightarrow{0}$.

Прикладами рівнянь, для яких виконуються наведені припущення, є рівняння (1), в яких вираз (2) рівномірно параболічний за Шиловим з родом $\mu \leq 0$ (тут $\overrightarrow{\mu} = (\mu; \ldots; \mu)$).

Якщо для рівняння (1) задати початкову умову

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}})', \tag{3}$$

то розв'язком задачі Коші (1), (3) назвемо функцію u, яка диференційовна по t, нескінченно диференційовна по x, задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (3) у сенсі збіжності у просторі $(S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}})'$.

2. ФРЗК та його властивості. Припустивши регулярність початкового функціонала f та його перетворення Фур'є $F[f]$, міркуючи при цьому формально так, як на початку п. 2 з [3], одержуємо формулу

$$u_\tau(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi^n_{(\tau;T]}, \tag{4}$$

в якій

$$G(t,x;\tau,\xi) := \Big(T^{x;\xi}_{t-\tau} F^{-1}_{\eta\to x}[V(t,\tau,\eta)]\Big)(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

де

$$V(t,\tau,\eta) := \exp\Bigg\{ \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \le 1} \int\limits_\tau^t a_{k_1}(\theta)(\eta_1' + (\theta-\tau)\eta_2' + 2^{-1}(\theta-\tau)^2\eta_3)^{k_1'} \times$$

$$\times (\eta_1'' + (\theta-\tau)\eta_2'')^{k_1''}(\eta_1''')^{k_1'''}\,d\theta\Bigg\}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

а

$$(T_t^{\eta,\xi} f)(x) := f(x_1 - \xi_1, x_2 + t\hat{\eta}_1 - \xi_2, x_3 + t\eta_2' + 2^{-1}t^2\eta_1' - \xi_3).$$

Лема 1. *Існують додатні сталі* c, A *і* δ *такі, що для всіх* $q = (q_1; q_2; q_3) \in \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi = (\xi_1; \xi_2; \xi_3) \in \mathbb{R}^n$ *і* $\{t; \tau\} \subset [0; T]$, $\tau < t$, *виконується нерівність*

$$|\partial_\xi^q V(t,\tau,\xi)| \le cA^{|q|_*}(t-\tau)^{-(|\overrightarrow{\mu}q_1/\overrightarrow{h}|_* + |\widehat{\overrightarrow{\mu}}q_2/\widehat{\overrightarrow{h}}|_* + |\overrightarrow{\mu}'q_3/\overrightarrow{h}'|_*)} q_1^{q_1(\overrightarrow{1} - \overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{h})} \times$$

$$\times q_2^{q_2(\widehat{\overrightarrow{1}} - \widehat{\overrightarrow{\mu}}/\widehat{\overrightarrow{h}})} q_3^{q_3(\overrightarrow{1}' - \overrightarrow{\mu}'/\overrightarrow{h}')} e^{-\delta(t-\tau)(|\xi_1|_*^{\overrightarrow{h}} + (t-\tau)^{|\widehat{\overrightarrow{h}}|_*}|\xi_2|_*^{\widehat{\overrightarrow{h}}} + (t-\tau)^{2|\overrightarrow{h}'|_*}|\xi_3|_*^{\overrightarrow{h}'})}$$

(*тут* $\widehat{\overrightarrow{r}} := (r_1; \ldots; r_{n_2})$ *і* $\overrightarrow{r}' := (r_1; \ldots; r_{n_3})$ *для* $\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^n$).

Доведення. Виконавши в інтегралі з формули (6) заміну змінної інтегрування згідно з правилом

$$\theta - \tau = (t-\tau)\chi,$$

одержимо

$$V(t,\tau,\eta) = \exp\Bigg\{ (t-\tau)\int\limits_0^1 \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \le 1} a_{k_1}(\tau + \chi(t-\tau))(\eta_1' + \chi\eta_2' + 2^{-1}\chi^2\eta_3)^{k_1'} \times$$

$$\times (\eta_1'' + \chi\eta_2'')^{k_1''}(\eta_1''')^{k_1'''}\,d\chi\Bigg\}.$$

Для знаходження значення похідної для функції V у точці $\xi \in \mathbb{R}^n$ при фіксованих t і τ, $0 \le \tau < t \le T$, скористаємося формулою Коші

$$\partial_\xi^q V(t,\tau,\xi) = \frac{q!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{V(t,\tau,z)}{(z-\xi)^{q+\overrightarrow{1}}}\,dz, \quad q \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{7}$$

де $\Gamma_R := \{\Gamma_{R_{11}}, \ldots, \Gamma_{R_{1n_1}}; \Gamma_{R_{21}}, \ldots, \Gamma_{R_{2n_2}}; \Gamma_{R_{31}}, \ldots, \Gamma_{R_{3n_3}}\}$, а $\Gamma_{R_{lj}}$ — коло з центром у точці $\xi_{lj} + i0$ і відповідним радіусом

$$R_{1j} := \begin{cases} K_{0j}(1 + |\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|)^{\mu_j}, & j \in \mathbb{N}_{n_3}, \\ K_{0j}(1 + |\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j}|)^{\mu_j}, & j \in \{n_3+1; \ldots; n_2\}, \\ K_{0j}(1 + |\xi_{1j}|)^{\mu_j}, & j \in \{n_2+1; \ldots; n_1\}, \end{cases}$$

$$R_{2j} = R_{3j} = R_{1j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

$$R_{2j} = R_{1j}, \quad j \in \{n_3 + 1; \ldots ; n_2\}$$

(тут $\chi_j \in [0; 1]$, μ_j — координати векторного роду $\overrightarrow{\mu}$ диференціального виразу (2), а K_{0j} — досить малі додатні сталі величини, уточнення яких буде здійснено згодом).

Передусім доведемо, що при належному виборі K_{0j} для всіх точок $z = x+iy \in \in \mathbb{C}^n$ таких, що $z = (z_{1j} \in \Gamma_{R_{1j}}, j \in \mathbb{N}_{n_1}; z_{2j} \in \Gamma_{R_{2j}}, j \in \mathbb{N}_{n_2}; z_{3j} \in \Gamma_{R_{3j}}, j \in \mathbb{N}_{n_3})$ (тобто $z \in \Gamma_R$), виконуються нерівності

$$|y_{1j} + (t-\tau)\chi_j y_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2 \chi_j^2 y_{3j}| \le$$

$$\le c_j'(1 + |x_{1j} + (t-\tau)\chi_j x_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2 x_{3j}|)^{\mu_j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}, \tag{8}$$

$$|y_{1j} + (t-\tau)\chi_j y_{2j}| \le c_j''(1 + |x_{1j} + (t-\tau)\chi_j x_{2j}|)^{\mu_j}, \quad j \in \{n_3+1; \ldots ; n_2\}, \tag{9}$$

$$|y_{1j}| \le c_j'''(1+|x_{1j}|)^{\mu_j}, \quad j \in \{n_2+1; \ldots ; n_1\}, \quad \chi_j \in [0;1], \quad 0 \le \tau < t \le T, \tag{10}$$

де c_j', c_j'', c_j''' — додатні сталі з означення роду $\overrightarrow{\mu}$, які не залежать від χ_j, t і τ. Для цього скористаємося нерівностями

$$|y_{lj}| \le K_{0j}(1 + |\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|)^{\mu_j}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}, \quad l \in \mathbb{N}_3, \tag{11}$$

$$|y_{lj}| \le K_{0j}(1 + |\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j}|)^{\mu_j}, \quad j \in \{n_3+1; \ldots ; n_2\}, \quad l \in \mathbb{N}_2,$$

$$|y_{1j}| \le K_{0j}(1+|\xi_{1j}|)^{\mu_j}, \quad j \in \{n_2+1; \ldots ; n_1\}, \quad \chi_j \in [0;1],$$

$$0 \le \tau < t \le T, \; y_{lj} = \mathrm{Im} z_{lj}, \quad z_{lj} \in \Gamma_{R_{lj}},$$

які одержуються безпосередньо, виходячи з аналітичного опису $\Gamma_{R_{lj}}$.

З (11) для $z_{lj} = x_{lj} + iy_{lj} \in \Gamma_{R_{lj}}$, $j \in \mathbb{N}_{n_3}$, $l \in \mathbb{N}_3$ одержуємо

$$|y_{1j} + (t-\tau)\chi_j y_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2 y_{3j}| \le K_{0j}(1 + (t-\tau)\chi_j + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2)\times$$

$$\times(1 + |\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|)^{\mu_j}, \quad \chi_j \in [0;1], \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

Оскільки $x_{lj} = \xi_{lj} \pm \delta_{lj}R_{lj}$, $\delta_{lj} \in [0;1]$, де $x_{lj} + iy_{lj} \in \Gamma_{R_{lj}}$, то

$$(1 + |\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|)^{\mu_j} \le$$

$$(1 + |x_{1j} + (t-\tau)\chi_j x_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2 x_{3j}| - |\delta_{1j}R_{1j} + (t-\tau)\chi_j\delta_{2j}R_{2j} +$$

$$+ 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\delta_{3j}R_{3j}|)^{\mu_j} \le ((1 - K_{0j}(1 + T + 2^{-1}T^2)) +$$

$$+ |x_{1j} + (t-\tau)\chi_j x_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2 x_{3j}|)^{\mu_j}$$

(тут враховано те, що $R_{lj} \leq K_{0j}$ і $\mu_j \leq 0$).

Припустивши, що $0 < K_{0j}(1 + T + 2^{-1}T^2) \leq 1/2$, $j \in \mathbb{N}_{n_3}$, дістанемо

$$|y_{1j} + (t-\tau)\chi_j y_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2 y_{3j}| \leq \frac{K_{0j}(1+T+2^{-1}T^2)}{(1-K_{0j}(1+T+2^{-1}T^2))^{-\mu_j}}\times$$

$$\times(1 + |x_{1j} + (t-\tau)\chi_j x_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2 x_{3j}|)^{\mu_j}.$$

Звідси, поклавши $K_{0j} := 2^{\mu_j}(1 + T + 2^{-1}T^2)^{-1}\min\left\{\frac{1}{2}; c_j'\right\}$, $j \in \mathbb{N}_{n_3}$, прийдемо до нерівності (8).

Аналогічним способом при $K_{0j} := 2^{\mu_j}(1+T)^{-1}\min\left\{\frac{1}{2}; c_j''\right\}$, $j \in \{n_3 + 1; \ldots ; n_2\}$, та $K_{0j} := 2^{\mu_j}\min\left\{\frac{1}{2}; c_j'''\right\}$, $j \in \{n_2 + 1; \ldots ; n_1\}$, переконуємось у виконанні нерівностей (9), (10) для $z_{lj} \in \Gamma_{R_{lj}}$.

Зважаючи тепер на нерівності (8) – (10), а також на оцінку

$$\Bigg|\exp\{(t-\tau)\int\limits_0^1 \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} a_{k_1}(\theta(t-\tau)+\tau)(z_1' + (t-\tau)\theta z_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\theta^2 z_3)^{k_1'}\times$$

$$\times(z_1'' + (t-\tau)\theta z_2'')^{k_1''}(z_1''')^{k_1'''}d\theta\}\Bigg| \leq \exp\left\{-\delta(t-\tau)\left(\int\limits_0^1(|x_1' + (t-\tau)\theta x_2' +\right.\right.$$

$$\left.\left.+2^{-1}(t-\tau)^2\theta^2 x_3|_*^{\overrightarrow{h}'} + |x_1'' + (t-\tau)\theta x_2''|_*^{\overrightarrow{h}''})d\theta + |x_1'''|_*^{\overrightarrow{h}'''}\right)\right\},\quad x = \mathrm{Re}z,\quad z \in \Gamma_R \tag{12}$$

(яку одержуємо безпосередньо з означення векторного роду $\overrightarrow{\mu}$ виразу (2)) і враховуючи при цьому теорему про середнє значення для визначеного інтеграла, з (7) отримуємо

$$|\partial_\xi^q V(t,\tau,\xi)| \leq cq!\left(\prod_{l=1}^3\prod_{j=1}^{n_l}(R_{lj})^{-q_{lj}}\right)e^{-\delta(t-\tau)|(x_1^0)'''|_*^{\overrightarrow{h}'''}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\delta/2(t-\tau)(|(x_1^0)' + (t-\tau)\chi'(x_2^0)' + 2^{-1}(t-\tau)^2(\chi')^2 x_3^0|_*^{\overrightarrow{h}'} + |(x_1^0)''+\right.$$

$$+(t-\tau)\chi''(x_2^0)''|_*^{\overrightarrow{h}''} + \int\limits_0^1(|(x_1^0)' + (t-\tau)\theta(x_2^0)' + 2^{-1}(t-\tau)^2\theta^2 x_3^0|_*^{\overrightarrow{h}'}+$$

$$\left.+|(x_1^0)'' + (t-\tau)\theta(x_2^0)''|_*^{\overrightarrow{h}''})d\theta\right\},\quad \chi = (\chi_j \in (0;1), j \in \mathbb{N}_{n_2}),\quad c > 0, \tag{13}$$

де x^0_{lj} — точки з відрізків $[\xi_{lj} - R_{lj}; \xi_{lj} + R_{lj}]$, в яких вираз із правої частини нерівності (12) досягає найбільшого значення.

Зазначимо далі, що R_{lj}, як функція аргументу $|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t - \tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|$ при $j \in \mathbb{N}_{n_3}$, $l \in \mathbb{N}_3$, та $|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j}|$ при $j \in \{n_3+1; \ldots; n_2\}$, $l \in \{1; 2\}$, і $|\xi_{lj}|$ при $j \in \{n_2+1; \ldots; n_1\}$, $l = 1$, є обмеженою для всіх $\chi_j \in [0; 1]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 \le \tau < t \le T$, тому

$$\exists\{c_0, \delta_0\} \subset (0; +\infty)\ \forall \chi = (\chi_j \in (0;1), j \in \mathbb{N}_{n_2})\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall \{t, \tau\} \subset [0; T],\ \tau < t:$$

$$\exp\{-\delta/2(t-\tau)(|(x_1^0)' + (t-\tau)\chi'(x_2^0)' + 2^{-1}(t-\tau)^2(\chi')^2 x_3^0|_*^{\overrightarrow{h}'} + |(x_1^0)''+$$

$$+(t-\tau)\chi''(x_2^0)''|_*^{\overrightarrow{h}''} + |(x_1^0)'''|_*^{\overrightarrow{h}'''})\} \le c_0 \exp\{-\delta_0(t-\tau)(|\xi_1' + (t-\tau)\chi'\xi_2'+$$

$$+2^{-1}(t-\tau)^2(\chi')^2\xi_3|_*^{\overrightarrow{h}'} + |\xi_1'' + (t-\tau)\chi''\xi_2''|_*^{\overrightarrow{h}''} + |\xi_1'''|_*^{\overrightarrow{h}'''})\}.$$

Отже, існують додатні сталі c_1 і δ_0, які не залежать від $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\{t, \tau\} \subset [0; T]$, $t > \tau$, такі, що

$$|\partial_\xi^q V(t, \tau, \xi)| \le$$

$$\le c_1 \left(\prod_{j=1}^{n_l} \left(\prod_{l=1}^{3} (q_{lj}!(R_{lj})^{-q_{lj}} e^{-\frac{\delta_0}{6}(t-\tau)|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|^{h_j}}) \right) \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=n_3+1}^{n_2} \left(\prod_{l=1}^{2} (q_{lj}!(R_{lj})^{-q_{lj}} e^{-\frac{\delta_0}{4}(t-\tau)|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j}|^{h_j}}) \right) \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=n_2+1}^{n_1} q_{1j}!(R_{1j})^{-q_{1j}} e^{-\frac{\delta_0}{2}(t-\tau)|\xi_{1j}|^{h_j}} \right) \exp\left\{ \int_0^1 (|(x_1^0)' + (t-\tau)\theta(x_2^0)'+\right.$$

$$\left. +2^{-1}(t-\tau)^2\theta^2 x_3^0|_*^{\overrightarrow{h}'} + |(x_1^0)'' + (t-\tau)\theta(x_2^0)''|_*^{\overrightarrow{h}''})d\theta + |\xi_1'''|_*^{\overrightarrow{h}'''}) \right\}, \quad \chi_j \in (0; 1).$$

Доведемо тепер, що

$$q_{lj}!(R_{lj})^{-q_{lj}} e^{-\frac{\delta_0}{6}(t-\tau)|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|^{h_j}} \le$$

$$\le c_{lj}(A_{lj}(t-\tau)^{\frac{\mu_j}{h_j}})^{q_{lj}} q_{lj}^{(1-\frac{\mu_j}{h_j})q_{lj}}, \tag{14}$$

де c_{lj}, A_{lj} — додатні сталі, які не залежать від q_{lj}, ξ_{lj}, t і τ; $l \in \mathbb{N}_3$, $j \in \mathbb{N}_{n_3}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\mu_j < 0$ і

$$|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}| > 1. \tag{15}$$

Тоді

$$R_{lj} = K_{0j}(1 + |\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|)^{\mu_j} \geq$$

$$\geq K_{0j}(2|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|)^{\mu_j}$$

і

$$(R_{lj})^{-q_{lj}} e^{-\frac{\delta_0}{6}(t-\tau)|\xi_{1j}+(t-\tau)\chi_j\xi_{2j}+2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|^{h_j}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{K_{0j}} \left(\frac{\delta_0(t-\tau)}{6 \cdot 2^{h_j}} \right)^{\frac{\mu_j}{h_j}} \right)^{q_{lj}} \sup_{\eta>0} \{ \eta^{-\frac{\mu_j q_{lj}}{h_j}} e^{-\eta} \}.$$

Засобами диференціального числення переконуємося, що

$$\sup_{\eta>0} \left\{ \eta^{-\frac{\mu_j q_{lj}}{h_j}} e^{-\eta} \right\} = \left(\frac{-\mu_j q_{lj}}{h_j e} \right)^{-\frac{\mu_j q_{lj}}{h_j}}, \quad \mu_j < 0.$$

Отже, у випадку (15) оцінка (14) справджується.

Якщо ж

$$|\xi_{1j} + (t-\tau)\chi_j\xi_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}| \leq 1,$$

то

$$R_{lj} \geq 2^{\mu_j} K_{0j} > 0.$$

Тому

$$q_{lj}!(R_{lj})^{-q_{lj}} e^{-\frac{\delta_0}{6}(t-\tau)|\xi_{1j}+(t-\tau)\chi_j\xi_{2j}+2^{-1}(t-\tau)^2\chi_j^2\xi_{3j}|^{h_j}} \leq (2^{\mu_j} K_{0j})^{-q_{lj}} q_{lj}^{q_{lj}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{(t-\tau)^{\frac{\mu_j}{h_j}}}{(T^{\frac{1}{h_j}} 2)^{\mu_j} K_{0j}} \right)^{q_{lj}} q_{lj}^{(1-\frac{\mu_j}{h_j})q_{lj}}.$$

Виконання (14) при $\mu_j = 0$ є очевидним.

Аналогічним способом переконуємось у правильності таких оцінок:

$$q_{lj}!(R_{lj})^{-q_{lj}} e^{-\frac{\delta_0}{4}(t-\tau)|\xi_{1j}+(t-\tau)\chi_j\xi_{2j}|^{h_j}} \leq$$

$$\leq c_{lj}(A_{lj}(t-\tau)^{\frac{\mu_j}{h_j}})^{q_{lj}} q_{lj}^{(1-\frac{\mu_j}{h_j})q_{lj}}, \quad l \in \mathbb{N}_2, \quad j \in \{n_3+1; \ldots; n_2\},$$

$$q_{1j}!(R_{1j})^{-q_{1j}} e^{-\frac{\delta_0}{2}(t-\tau)|\xi_{1j}|^{h_j}} \leq$$

$$\leq c_{1j}(A_{1j}(t-\tau)^{\frac{\mu_j}{h_j}})^{q_{1j}} q_{1j}^{(1-\frac{\mu_j}{h_j})q_{1j}}, \quad j \in \{n_2+1; \ldots; n_1\}, \tag{16}$$

де c_{lj}, A_{lj} — додатні сталі, які не залежать від q_{lj}, ξ_{lj}, t і τ.

На завершення доведемо існування додатних сталих c_1 і δ_1 таких, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\{t, \tau\} \subset [0; T]$, $t > \tau$, виконується нерівність

$$e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)\int\limits_0^1 (|(x_1^0)'+(t-\tau)\theta(x_2^0)'+2^{-1}(t-\tau)^2\theta^2 x_3^0|_*^{\vec{h}'}) + |(x_j^0)''+(t-\tau)\theta(x_2^0)''|_*^{\vec{h}''})d\theta} \leq$$

$$\leq c_1 e^{-\delta_1 (t-\tau)(|\xi_1|_*^{\vec{h}} + (t-\tau)^{|\widehat{\vec{h}}|_*} |\xi_2|_*^{\widehat{\vec{h}}} + (t-\tau)^{2|\vec{h}'|_*} |\xi_3|_*^{\vec{h}'})}. \tag{17}$$

Оскільки

$$\int_0^1 \left| \frac{\zeta_{1j} + (t-\tau)\theta\zeta_{2j} + 2^{-1}(t-\tau)^2\theta^2\zeta_{3j}}{|\zeta_{1j}| + (t-\tau)|\zeta_{2j}| + 2^{-1}(t-\tau)^2|\zeta_{3j}|} \right|^\gamma d\theta \geq \bar{c}_j > 0, \ \ j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

$$\int_0^1 \left| \frac{\zeta_{1j} + (t-\tau)\theta\zeta_{2j}}{|\zeta_{1j}| + (t-\tau)|\zeta_{2j}|} \right|^\gamma d\theta \geq \bar{c}_j > 0, \ \ j \in \{n_3+1; \ldots; n_2\},$$

для всіх $\zeta_{lj} \in \mathbb{R}$, $\sum_l \zeta_{lj}^2 \neq 0$, $\gamma > 0$ і $0 \leq \tau < t \leq T$, то, зважаючи на те, що

$$(a+b)^\gamma \geq \frac{1}{2}(a^\gamma + b^\gamma), \quad \{a; b\} \subset (0; +\infty), \quad \gamma > 0,$$

доведення (17) при $|\xi_{lj}| \geq 2K_{0j}$ зводимо до встановлення нерівностей

$$|x_{lj}^0|^{h_j} = |\xi_{lj} + \delta_{lj} R_{lj}|^{h_j} \geq c_{lj} |\xi_{lj}|^{h_j}, \ \delta_{lj} \in [-1; 1], \tag{18}$$

для $j \in \mathbb{N}_{n_2}$ і відповідних $l \in \mathbb{N}_3$, де c_{lj} — додатні сталі, які не залежать від ξ_{lj}, t і τ.

Нехай $|\zeta_{lj}| \geq 2K_{0j}$, тоді

$$|\xi_{lj} + \delta_{lj} R_{lj}|^{h_j} = |\xi_{lj}|^{h_j} \left| 1 + \frac{\delta_{lj} R_{lj}}{|\xi_{lj}|} \right|^{h_j} \geq$$

$$\geq |\xi_{lj}|^{h_j} \left| 1 - \frac{|\delta_{lj}| R_{lj}}{|\xi_{lj}|} \right|^{h_j} \geq 2^{-h_j} |\xi_{lj}|^{h_j}, \quad \delta_{lj} \in [-1; 1],$$

бо $R_{lj} \leq K_{0j}$ і

$$\frac{|\delta_{lj}| R_{lj}}{|\xi_{lj}|} \leq \frac{K_{0j}}{|\xi_{lj}|} \leq \frac{1}{2}.$$

Отже, нерівність (18) справджується.

У випадку $|\xi_{lj}| < 2K_{0j}$ маємо

$$e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)^{l-1}|x_{lj}^0|^{h_j}} \leq e^{2\delta_1 T^{l-1} K_{0j}} e^{-\delta_1 (t-\tau)^{l-1} |\xi_{lj}|^{h_j}},$$

$$\delta_1 > 0, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad l \in \{2; 3\}.$$

Лему доведено.

Врахувавши рівність (3) з [3] та структуру (5) функції G, дістанемо

$$G(t, x; \tau, \xi) = (2\pi)^{-n} F_{\zeta \to \xi} [\widetilde{T}_{t-\tau}^{x,-x} V(t, \tau, \zeta)](t, x; \tau, \xi), \tag{19}$$

де

$$(\widetilde{T}_t^{x,\xi} f)(\zeta) := e^{i(\xi,\zeta)} e^{-i(t\hat{x}_1, \zeta_2)} e^{-i(tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1', \zeta_3)} f(\zeta).$$

Звідси та з леми 1, врахувавши властивості двоїстості за Фур'є просторів типу S, а також те, що [3]

$$\widetilde{T}_t^{x,-x} : S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \to S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

одержимо такий наслідок.

Наслідок. *При кожних фіксованих* $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T]$ *і* $x \in \mathbb{R}^n$ *функція* $G(t, x; \tau, \cdot)$ *належить до простору* $S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}$, $\overrightarrow{\alpha}^* := \{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{h}, \widehat{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{h}}, \overrightarrow{1}/\overrightarrow{h}'\}$, *а* $\overrightarrow{\beta}^* :=$ $:= \{\overrightarrow{1} - \overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{h}, (\widehat{\overrightarrow{1} - \overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{h}}), (\overrightarrow{1} - \overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{h})'\}$.

Лема 2. *При кожних фіксованих* $x \in \mathbb{R}^n$ *і* $\tau \in [0; T)$ *функція* $G(t, x; \tau, \cdot)$, *як абстрактна функція параметра* t, *диференційовна по* t *на* $(\tau; T]$ *у просторі* $S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}$.

Доведення. З огляду на доведення аналогічної леми 5 з [3] приходимо до висновку, що для доведення даної леми досить переконатися у правильності таких граничних співвідношень:

а) $\partial_t \mu(t + \theta\chi, x; \tau, \cdot) V(t + \chi, \tau, \cdot) \xrightarrow[\chi \to 0]{S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}} \partial_t \mu(t, x; \tau, \cdot) V(t, \tau, \cdot)$,

б) $\partial_t V(t + \theta\chi, \tau, \cdot) \xrightarrow[\chi \to 0]{S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}} \partial_t V(t, \tau, \cdot)$

для кожних фіксованих $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$, де

$$\mu(t, x; \tau, \zeta) := e^{i((\zeta_2, (t-\tau)\widehat{x}_1) + (\zeta_3, (t-\tau)x_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2 x_1'))}.$$

Згідно з критерієм збіжності у просторах типу S для випадку а) необхідно довести:

$1_a)$ $\forall q \in \mathbb{Z}^n_+$ $\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$:

$$\Delta := |\partial^q_\xi (\partial_t \mu(t + \theta\chi, x; \tau, \xi) V_t(t + \chi, \tau, \xi) - \partial_t \mu(t, x; \tau, \xi))| \underset{\chi \to 0}{\overset{\xi \in \mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0,$$

де

$$V_t(t + \chi, \tau, \zeta) := \exp\left\{ \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \le 1} \int\limits_t^{t+\chi} a_{k_1}(\theta)(\zeta_1' + (\theta - \tau)\zeta_2' + 2^{-1}(\theta - \tau)^2 \zeta_3)^{k_1'} \times \right.$$

$$\left. \times (\zeta_1'' + (\theta - \tau)\zeta_2'')^{k_1''} (\zeta_1''')^{k_1'''} d\theta \right\};$$

$2_a)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$, $\exists \delta_0 \in (0; 1)$ $\exists \{c; A; \delta\} \subset (0; +\infty)$ $\forall \chi \in (-\delta_0; \delta_0)$ $\forall q \in \mathbb{Z}^n_+$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $|\partial^q_\xi (\partial_t \mu(t + \theta\chi, x; \tau, \xi) V_t(t + \chi, \tau, \xi))| \le$ $\le c A^{|q|_*} q^{q\overrightarrow{\beta}_*} e^{-\delta |\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}_*}}$.

Оскільки

$$\partial_t \mu(t + \theta\chi, x; \tau, \xi) = e^{-i\theta\chi((\xi_2, \hat{x}_1) + (\xi_3, x_2' + (t + 2^{-1}\theta\chi - \tau)x_1'))} (\partial_t \mu(t, x; \tau, \xi) -$$

$$- i\theta\chi \mu(t, x; \tau, \xi)(\xi_3, x_1')), \tag{20}$$

то

$$\Delta \le c_q \sum_{l=0}^{q} \Big[|\partial^{q-l}_\xi \partial_t \mu(t, x; \tau, \xi)| \, |\partial^l_\xi (e^{-i\theta\chi((\xi_2, \hat{x}_1) + (\xi_3, x_2' + (t + 2^{-1}\theta\chi - \tau)x_1'))} \times$$

$$\times V_t(t + \chi, \tau, \xi) - 1)| + |\theta\chi| |\partial^{q-l}_\xi (\mu(t, x; \tau, \xi)(\xi_3, x_1'))| \times$$

$$\times|\partial_\xi^l(e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}V_t(t+\chi,\tau,\xi))|\Big]$$

$\Big($тут і далі $\sum_{l=0}^{q} C_q^l := \sum_{l_1=0}^{q_1} C_{q_1}^{l_1} \ldots \sum_{l_n=0}^{q_n} C_{q_n}^{l_n}\Big)$.

З цієї нерівності та обмеженості при кожних t, x і τ функцій

$$|\partial_\xi^l \partial_t \mu(t,x;\tau,\xi)|, \quad |\partial_\xi^l \mu(t,x;\tau,\xi)(\xi_3,x_1')|, \quad |\partial_\xi^l V_t(t+\chi,\tau,\xi)|,$$

$$|\partial_\xi^l e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}|, \quad |\chi|\le 1, \quad \xi\in\mathbb{K}, \quad l\in\mathbb{Z}_+^n,$$

випливає, що доведення твердження 1_a зводиться до встановлення граничних співвідношень

$$|\partial_\xi^l(e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}V_t(t+\chi,\tau,\xi))| \underset{\chi\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \quad |l|_*\ne 0, \tag{21}$$

$$|e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}V_t(t+\chi,\tau,\xi)-1| \underset{\chi\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0. \tag{22}$$

У свою чергу (21) виконуватиметься, якщо

$$|e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}\partial_\xi^l V_t(t+\chi,\tau,\xi)| =$$

$$= |\partial_\xi^l V_t(t+\chi,\tau,\xi)| \underset{\chi\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \quad |l|_*\ne 0,$$

і

$$|\partial_\xi^l e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}\partial_\xi^k V_t(t+\chi,\tau,\xi)| \underset{\chi\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \ \{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \ |l|_*\ne 0. \tag{23}$$

Однак для $\xi\in\mathbb{K}$ і $|l|_*\ne 0$

$$|\partial_\xi^l V_t(t+\chi,\tau,\xi)| \le \Delta_1(t,\tau)\sum_{r=1}^{|l|_*} c_r \left(\int_t^{t+\chi} \sup_{\xi\in\mathbb{K}}\{|P_r(\theta-\tau,\xi)|\}d\theta\right)^r \underset{\chi\to 0}{\to} 0 \tag{24}$$

$\Bigg($тут c_r — додатні сталі, $P_r(\theta-\tau,\xi)$ — відповідні многочлени від змінних $(\theta-\tau)$ і ξ, а

$$\Delta_1 := \sup_{\xi\in\mathbb{K}}\left\{\exp\left\{\sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_*\le 1}\int_t^T |a_{k_1}(\theta)||\xi_1'+(\theta-\tau)\xi_2'+2^{-1}(\theta-\tau)^2\xi_3|^{k_1'}|\xi_1''+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\theta-\tau)\xi_2''|^{k_1''}|\xi_1'''|^{k_1'''}d\theta\right\}\right\},$$

при цьому враховано обмеженість коефіцієнтів $a_{k_1}(t)\Bigg)$.

Звідси при $|k|^*\ne 0$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$, зважаючи на обмеженість виразу

$$|\partial_\xi^l e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}|$$

для $\xi \in \mathbb{K}$, $\theta \in (-1;1)$ і $|\chi| < 1$ та фіксованих $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$, одержуємо також виконання (23).

Якщо $|k|_* = 0$, то, оскільки

$$|\partial_{\xi_2}^{l_2}\partial_{\xi_3}^{l_3} e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}| \le |\theta\chi|^{|l_2|_*+|l_3|_*}|\widehat{x}_1|^{l_2}|x_2'+$$

$$+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'|^{l_3}, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{\theta,\chi\} \subset \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{25}$$

для всіх $\xi \in \mathbb{K}$ і фіксованих $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$, маємо

$$|\partial_\xi^l e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}V_t(t+\chi,\tau,\xi)| \le$$

$$\le \Delta_1(t,\tau)|\widehat{x}_1|^{l_2}|x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'|^{l_3}|\chi| \underset{\chi\to 0}{\to} 0, \quad |l|_* \ne 0, \quad \theta \in (-1;1).$$

Щодо співвідношення (22), то його виконання стає очевидним, якщо врахувати рівність

$$|e^{-i\theta\chi((\xi_2,\hat{x}_1)+(\xi_3,x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'))}| = 1, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{t;\tau;\theta;\chi\} \subset \mathbb{R},$$

і те, що для всіх $\xi \in \mathbb{K}$

$$|V_t(t+\chi,\tau,\xi)| \le \sup_{\xi\in\mathbb{K}} \left\{ \exp\left\{ \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_*\le 1} \int_t^{t+\chi} |a_{k_1}(\theta)| \sup_{\xi\in\mathbb{K}} \left\{ |\xi_1'+(\theta-\tau)\xi_2'+ \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. +2^{-1}(\theta-\tau)^2\xi_3|^{k_1'}|\xi_1''+(\theta-\tau)\xi_2''|^{k_1''}|\xi_1'''|^{k_1'''} \right\} d\theta \right\} \right\} \underset{\chi\to 0}{\to} 1. \tag{26}$$

Отже, твердження 1_a доведено.

Доведемо тепер твердження 2_a. Використавши рівність (20) та нерівність (25), дістанемо

$$|\partial_\xi^q(\partial_t\mu(t+\theta\chi,x;\tau,\xi)V(t+\chi,\tau,\xi))| \le \sum_{l=0}^q C_q^l |\widehat{x}_1|^{l_2}|x_2'+(t+2^{-1}\theta\chi-\tau)x_1'|^{l_3}\times$$

$$\times\left[|\partial_\xi^{q-l}(\mu(t,x;\tau,\xi)V(t+\chi,\tau,\xi))| + |\partial_\xi^{q-l}(\partial_t\mu(t,x;\tau,\xi)(\xi_3,x_1')V(t+\chi,\tau,\xi))|\right] \tag{27}$$

для $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{x;\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\theta;\chi\} \subset (-1;1)$ і $0 \le \tau < t \le T$.

Зазначимо, що $\partial_t\mu(t,x;\delta,\cdot)$ і $\mu(t,x;\tau,\cdot)(\cdot,x_1')$ — мультиплікатори в $S_{\overrightarrow{\alpha}*}^{\overrightarrow{\beta}*}$, які не залежать від χ. Тоді згідно з критерієм мультиплікатора у цьому просторі [4]

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in (t;\tau], \quad \tau \in [0;T), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{c_0;A_0\} \subset (0;+\infty) \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+^n:$$

$$|\partial_\xi^q \eta(t,x;\tau,\xi)| \le c_0 A_0^{|q|_*} q^{q\overrightarrow{\beta}*} e^{\varepsilon|\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}*}}, \tag{28}$$

де $\eta(t,x;\tau,\xi) \in \{\partial_t \mu(t,x;\tau,\xi); \mu(t,x;\tau,\xi)(\xi_3, x_1')\}$. Врахувавши тепер оцінку для похідних від функції V з леми 1, дістанемо

$$|\partial_\xi^q(\eta(t,x;\tau,\xi)V(t+\chi,\tau,\xi))| \leq \sum_{l=0}^{q} C_q^l |\partial_\xi^{q-l}\eta(t,x;\tau,\xi)||\partial_\xi^l V(t+\chi,\tau,\xi)| \leq$$

$$\leq cc_0(\max\{A_0,A\})^{|q|_*} q^{q\overrightarrow{\beta}^*} \exp\{-\delta(t+\chi-\tau)(|\xi_1|_*^{\overrightarrow{h}} + (t+\chi-\tau)^{|\widehat{\overrightarrow{h}}|_*}|\xi_2|_*^{\widehat{\overrightarrow{h}}} +$$

$$+(t+\chi-\tau)^{2|\overrightarrow{h}'|_*}|\xi_3|_*^{\overrightarrow{h}'})\} \sum_{l=0}^{q} C_q^l (t+\chi-\tau)^{-|\overrightarrow{\mu}l_1/\overrightarrow{h}|_* - |\widehat{\overrightarrow{\mu}}l_2/\widehat{\overrightarrow{h}}|_* - |\overrightarrow{\mu}'l_3/\overrightarrow{h}'|_*},$$

$$q \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \{x;\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \varepsilon > 0. \tag{29}$$

Звідси при $|\chi| \leq \dfrac{t-\tau}{2}$ та з оцінки (27), зважаючи при цьому на довільність вибору ε, приходимо до твердження 2_a.

Таким чином, граничне співвідношення а) встановлено.

Для доведення співвідношення б) досить переконатися у правильності таких тверджень:

$1_b)$ $\forall q \in \mathbb{Z}_+^n$ $\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$:

$$|\partial_\xi^q(\rho(t+\chi,\tau,\xi)V_t(t+\chi,\tau,\xi) - \rho(t,\tau,\xi))| \underset{\chi\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0,$$

де

$$\rho(t,\tau,\xi) := \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} a_{k_1}(t)(\xi_1' + (t-\tau)\xi_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2\xi_3)^{k_1'}(\xi_1'' + (t-\tau)\xi_2'')^{k_1''}(\xi_1''')^{k_1'''};$$

$2_b)$ $\forall t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, $\exists \delta_0 \in (0;1)$ $\exists \{c;A;\delta\} \subset (0;+\infty)$ $\forall \chi \in (-\delta_0;\delta_0)$ $\forall q \in \mathbb{Z}_+^n$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $|\partial_\xi^q(\rho(t+\chi,\tau,\xi)V(t+\chi,\tau,\xi))| \leq cA^{|q|_*} q^{q\overrightarrow{\beta}^*} e^{-\delta|\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}^*}}$.

Очевидно, що доведення твердження 1_b, з огляду на обмеженість виразу $\partial_\xi^q \rho(t+ + \chi,\tau,\xi)$ як функції від $\xi \in \mathbb{K}$ і $\chi \in [-1;1]$, зводиться до доведення таких граничних співвідношень:

$$|\partial_\xi^q(V_t(t+\chi,\tau,\xi) - 1)| \underset{\chi\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \ q \in \mathbb{Z}_+^n;$$

$$|\partial_\xi^q(\rho(t+\chi,\tau,\xi) - \rho(t,\tau,\xi))| \underset{\chi\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \ q \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Зазначимо, що перше співвідношення стає очевидним, якщо зважити на граничні співвідношення (24) і (26), а друге встановлюється беспосередньо, виходячи зі структури функції $\rho(t,\tau,\xi)$ та неперервності коефіцієнтів a_k рівняння (1).

Зазначимо далі, що $\rho(t+\chi,\tau,\xi)$ — многочлен щодо змінної ξ, тому ця функція є мультиплікатором у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$. Отже, для її похідних виконуються оцінки типу (28). Оскільки коефіцієнти многочлена $\rho(t+\chi,\tau,\xi)$, як функції змінних t, τ і χ, є обмеженими при $0 \leq \tau < t \leq T$ і $\chi \in [-1;1]$, то існують оцінюючі сталі c_0 і A_0, які не залежать від $\chi \in [-1;1]$; таким чином, для $|\partial_\xi^q(\rho(t+\chi,\tau,\xi)V(t+\chi,\tau,\xi))|$

справджується оцінка типу (29), з якої при $|\chi| \le \min\left\{\frac{t-\tau}{2}, 1\right\}$ одержуємо твердження 2_b.

Лему доведено.

Досліджені властивості функції G забезпечують коректність здійснених перетворень при одержанні формули (4) для досить „хороших“ f. Крім цього, оскільки $V(t,x;\tau,\xi)$ експоненціально спадає за змінною ξ при $\|\xi\| \to \infty$, то перетворення Фур'є у формулі (5) є правомірним. Безпосередньо зі структури (5) функції $G(t,x;\tau,\xi)$ і леми 2 з [3] випливає, що ця функція щодо змінних t і x є звичайним нескінченно диференційовним по x розв'язком рівняння (1) в $\Pi^n_{(\tau;T]}$.

Для встановлення властивості δ-подібності розв'язку G нам знадобиться наступне допоміжне твердження.

Лема 3. *Для кожного додатного ε існують сталі $c_\varepsilon > 0$ і $A_\varepsilon > 0$ такі, що для всіх $q \in \mathbb{Z}^n_+,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$ виконується нерівність*

$$|\partial^q_\xi V(t,\tau,\xi)| \le c_\varepsilon A_\varepsilon^{|q|_*} q^{q\vec{\beta}^*} e^{\varepsilon|\xi|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}.$$

Доведення проводиться за схемою доведення леми 1 із відмінністю, яка полягає в заміні оцінки (13) на оцінку

$$|\partial^q_\xi V(t,\tau,\xi)| \le cq! \left(\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}(R_{lj})^{-q_{lj}}\right), \quad q \in \mathbb{Z}^n_+, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T. \tag{30}$$

Оцінку (30) одержуємо безпосередньо з (13) за рахунок обмеженості експоненти, яка знаходиться в її правій частині.

Оскільки для довільного $\varepsilon > 0$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\chi_j \in [0;1]$, $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$

$$1 = e^{\varepsilon(|\xi_1' + (t-\tau)\chi'\xi_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2(\chi')^2\xi_3|_*^{\vec{h}'} + |\xi_1'' + (t-\tau)\chi''\xi_2''|_*^{\vec{h}''} + |\xi_1'''|_*^{\vec{h}'''})} \times$$

$$\times e^{-\varepsilon(|\xi_1' + (t-\tau)\chi'\xi_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2(\chi')^2\xi_3|_*^{\vec{h}'} + |\xi_1'' + (t-\tau)\chi''\xi_2''|_*^{\vec{h}''} + |\xi_1'''|_*^{\vec{h}'''})},$$

то, врахувавши відповідні оцінки (14) і (16), з (30) дістанемо

$$|\partial^q_\xi V(t,\tau,\xi)| \le c_\varepsilon A_\varepsilon^{|q|_*} q^{q\vec{\beta}^*} \exp\{\varepsilon(|\xi_1' + (t-\tau)\chi'\xi_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2(\chi')^2\xi_3|_*^{\vec{h}'} +$$

$$+ |\xi_1'' + (t-\tau)\chi''\xi_2''|_*^{\vec{h}''} + |\xi_1'''|_*^{\vec{h}'''})\}$$

для всіх $\varepsilon > 0$, $q \in \mathbb{Z}^n_+$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\chi_j \in [0;1]$ і $0 \le \tau < t \le T$.

Звідси, зважаючи на існування додатної сталої δ_T такої, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\chi_j \in [0;1]$, $t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$ виконується нерівність

$$|\xi_1' + (t-\tau)\chi'\xi_2' + 2^{-1}(t-\tau)^2(\chi')^2\xi_3|_*^{\vec{h}'} + |\xi_1'' + (t-\tau)\chi''\xi_2''|_*^{\vec{h}''} + |\xi_1'''|_*^{\vec{h}'''} \le \delta_T|\xi|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*},$$

приходимо до твердження леми 3.

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай $\psi \in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$, а $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x) := \psi(x)(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}(V(t,\tau,\eta)))$, $0 \le \tau < t \le$ $\le T$, $\{x,\eta\} \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $I^{t,\tau}_{(\cdot),\psi}(x)$, як абстрактна функція змінної x у просторі $S^{\vec{\beta}^*}_{\vec{\alpha}^*}$, є інтегровною функцією у цьому просторі при кожному фіксованому $t \in$ $\in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$.*

Доведення зводиться до встановлення послідовного виконання таких умов:

1) функція $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)$ інтегровна по x на кожній множині $K(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leq \leq r\}$, $r > 0$, у просторі $S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}$;

2) $J^{t,\tau}_{r,\psi}(\eta) := \int\limits_{K(r)} I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)dx \xrightarrow[r\to+\infty]{S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}} J^{t,\tau}_{\psi}(\eta) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)dx$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < < t \leq T$.

Згідно із загальною теорією повних досконалих зліченно-нормованих просторів (див. [6, с. 100]) для виконання умови 1 досить переконатись у неперервності в сенсі топології простору $S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}$ абстрактної функції $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)$ на множині $K(r)$ (при $\eta \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$). На підставі леми 2 та неперервності оператора Фур'є у просторах типу S функція $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)$ є неперервною на $\mathbb{R}^n$ за змінною x, як диференційовна функція в $S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}$.

Перейдемо до встановлення умови 2. Зважаючи на критерій збіжності у просторі $S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}$, необхідно переконатися у виконанні таких умов:

а) $|\partial^q_\xi(J^{t,\tau}_{r,\psi}(\xi) - J^{t,\tau}_{\psi}(\xi))| \overset{\xi\in\mathbb{K}}{\underset{r\to+\infty}{\rightrightarrows}} 0$, $0 \leq \tau < t \leq T$, для кожного компакта $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ і $q \in \mathbb{Z}^n_+$;

б) послідовність $J^{t,\tau}_{r,\psi}(\cdot)$, $r \in \mathbb{N}$, обмежена в $S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}$ при кожних фіксованих $t \in (\tau, T]$ і $\tau \in [0; T)$.

Оскільки $\psi \in S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}$, то

$$\exists\{c, \delta\} \subset \mathbb{R}_+ \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \ |\psi(x)| \leq c\exp\{-\delta|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}\}.$$

Враховуючи тепер оцінки з леми 1 для похідних від функції V, а також структуру виразу μ, для кожної множини $K(\rho)$, $\rho > 0$, маємо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^q_\xi(I^{t,\tau}_{\xi,\psi}(x))dx\Big| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|\,|\partial^q_\xi(e^{-i(x,\xi)}\mu(t,x;\tau,\xi)V(t,\tau,\xi))|dx \leq$$

$$\leq c \sup_{\xi\in K(\rho), x\in\mathbb{R}^n} \left\{ e^{-\delta/2|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}} |\partial^q_\xi(e^{-i(x,\xi)}\mu(t,x;\tau,\xi)V(t,\tau,\xi))| \right\} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta/2|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}} dx \right) = c_1(t,\tau,\rho) < +\infty,$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \rho > 0, \quad \xi \in K(\rho), \quad q \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Звідси випливає, що інтеграл $\int_{\mathbb{R}^n} \partial^q_\xi(I^{t,\tau}_{\xi,\psi}(x))dx$ збігається рівномірно щодо ξ на довільній множині $K(\rho)$ при кожному фіксованому $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$. Використовуючи це та рівність

$$|\partial^q_\xi(J^{t,\tau}_{r,\psi}(\xi) - J^{t,\tau}_{\psi}(\xi))| = \Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus K(r)} \partial^q_\xi(I^{t,\tau}_{\xi,\psi}(x))dx\Bigg|,$$

приходимо до виконання умови а).

Умова б) також виконується. Справді,

$$|\partial_\xi^q(J_{r,\psi}^{t,\tau}(\xi))| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_\xi^q(I_{\xi,\psi}^{t,\tau}(x))|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)||\partial_\xi^q(e^{-i(x,\xi)}\mu(t,x;\tau,\xi)V(t,\tau,\xi))|dx \le$$

$$\le c(A_{t,\tau})^{|q|_*}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta/2|x|_*^{\vec{1}/\vec{\beta}^*}}dx\right)e^{-\delta_{t,\tau}|\xi|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}\sum_{l=0}^{q}\left((q-l)^{(q-l)\vec{\beta}^*}\times\right.$$

$$\left.\times \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{e^{-\delta/2|x|_*^{\vec{1}/\vec{\beta}^*}}|\partial_\xi^l(e^{-i(x,\xi)}\mu(t,x;\tau,\xi))|\}\right) \le$$

$$\le c_1(A_{t,\tau})^{|q|_*}e^{-\delta_{t,\tau}|\xi|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}\sum_{l=0}^{q}\left((q-l)^{(q-l)\vec{\beta}^*}\times\right.$$

$$\left.\times \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{e^{-\delta/2|x|_*^{\vec{1}/\vec{\beta}^*}}|x_1|^{l_1}|x_2+(t-\tau)\widehat{x}_1|^{l_2}|x_3+(t-\tau)x_2'+2^{-1}(t-\tau)^2x_1'|^{l_3}\}\right) \le$$

$$\le c_{t,\tau}(A_{t,\tau})^{|q|_*}q^{q\vec{\beta}^*}e^{-\delta_{t,\tau}|\xi|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}, \quad r>0, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad q\in\mathbb{Z}_+^n, \quad 0\le\tau<t\le T,$$

де $c_{t,\tau}$ і $A_{t,\tau}$ — додатні вирази, залежні лише від t і τ.

Лему доведено.

Лема 5. *Нехай* $\psi \in S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*}$, *тоді для всіх* $\tau \in [0;T)$

$$J_\psi^{t,\tau}(\cdot) \underset{t\to\tau+0}{\overset{S_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}}{\longrightarrow}} (2\pi)^n F^{-1}[\psi](\cdot). \tag{31}$$

Доведення. Нехай $\chi := t-\tau$, тоді граничне співвідношення (31) рівносильне співвідношенню

$$J_\psi^{\chi,0}(\cdot) \underset{\chi\to 0+}{\overset{S_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}}{\longrightarrow}} (2\pi)^n\varphi(\cdot),$$

де $\varphi(\cdot) := F^{-1}[\psi](\cdot) \in S_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}$. Врахувавши критерій збіжності у просторах типу S, приходимо до висновку, що для доведення леми 5 досить встановити виконання таких умов:

1) сукупність $J_\psi^{\chi,0}(\cdot)$, $0<\chi\ll 1$, обмежена у просторі $S_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}$;

2) $\partial_\xi^q J_\psi^{\chi,0}(\xi) \underset{\chi\to 0+}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} (2\pi)^n\partial_\xi^q\varphi(\xi)$ для кожного компакта $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$ і $q\in\mathbb{Z}_+^n$.

Переконаємося спочатку у виконанні умови 1. Для цього скористаємось зображенням [3]

$$J_\psi^{\chi,0}(\cdot) = (2\pi)^n V(t,\tau,\cdot)(\check{T}_\chi^+\varphi(\cdot)), \quad \psi\in S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*}, \quad 0<\chi\le T, \tag{32}$$

де

$$\check{T}_\chi^+\varphi(\xi) := \varphi(\xi_1'+\chi\xi_2'+2^{-1}\chi^2\xi_3, \xi_1''+\chi\xi_2'', \xi_1''', \xi_2'+\chi\xi_3, \xi_2'', \xi_3), \quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

З метою спрощення викладок користуватимемося тут такими позначеннями: $z_1 := \xi_1' + \chi\xi_2' + 2^{-1}\chi^2\xi_3$, $z_1 \in \mathbb{R}^{n_3}$; $z_2 := \xi_1'' + \chi\xi_2''$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2-n_3}$; $z_3 := \xi_1'''$, $z_3 \in \mathbb{R}^{n_1-n_2}$; $z_4 := \xi_2' + \chi\xi_3$, $z_4 \in \mathbb{R}^{n_3}$; $z_5 := \xi_2''$, $z_5 \in \mathbb{R}^{n_2-n_3}$; $z_6 := \xi_3$, $z_6 \in \mathbb{R}^{n_3}$.

Нехай $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in \mathbb{R}^n$, тоді

$$\partial_\xi^q(\check{T}_\chi^+\varphi(\xi)) = \sum_{l_2'=0}^{q_2'} C_{q_2'}^{l_2'} \sum_{l_2''=0}^{q_2''} C_{q_2''}^{l_2''} \sum_{l_3=0}^{q_3} C_{q_3}^{l_3} \sum_{j=0}^{l_3} C_{l_3}^{j} 2^{-|q_3-l_3|_*} \chi^{|l_2|_*+|j|_*+2|q_3-l_3|_*} \times$$

$$\times \frac{\partial^{|q|_*}\varphi(z)}{\partial z_1^{q_1'+l_2'+q_3-l_3} \partial z_2^{q_1''+l_2''} \partial z_3^{q_1'''} \partial z_4^{q_2'-l_2'+j} \partial z_5^{q_2''-l_2''} \partial z_6^{l_3-j}},$$

$$q \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \chi \in (0;T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси, врахувавши те, що $\varphi(\cdot) \in S_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}$, одержимо

$$|\partial_\xi^q(\check{T}_\chi^+\varphi(\xi))| \le cA^{|q|_*} e^{-\delta|z|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}} \left(\sum_{l_2'=0}^{q_2'} C_{q_2'}^{l_2'} \sum_{l_2''=0}^{q_2''} C_{q_2''}^{l_2''} \sum_{l_3=0}^{q_3} C_{q_3}^{l_3} \sum_{j=0}^{l_3} C_{l_3}^{j} \times \right.$$

$$\times \left((q_1' + l_2' + q_3 - l_3)^{(q_1'+l_2'+q_3-l_3)} (q_2' - l_2' + j)^{(q_2'-l_2'+j)} (l_3 - j)^{(l_3-j)} \right)^{(\vec{1}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{h}})'} \times$$

$$\left. \times \left((q_1'' + l_2'')^{(q_1''+l_2'')} (q_2'' - l_2'')^{(q_2''-l_2'')} \right)^{(\vec{1}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{h}})''} q_1^{\prime\prime\prime q_1'''(\vec{1}-\frac{\vec{\mu}}{\vec{h}})'''} \right),$$

$$q \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 0 < \chi \ll 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{33}$$

де c, A, δ — додатні сталі, не залежні від q, ξ і χ.

Зазначимо, що

$$(q_1' + l_2' + q_3 - l_3)^{(q_1'+l_2'+q_3-l_3)} (q_2' - l_2' + j)^{(q_2'-l_2'+j)} (l_3 - j)^{(l_3-j)} =$$

$$= (q_2' - l_2' + j)^{(q_2'-l_2'+j)} (l_3 - j)^{(l_3-j)} \times$$

$$\times ((q_1' + q_2' + q_3) - (q_2' - l_2' + j) - (l_3 - j))^{((q_1'+q_2'+q_3)-(q_2'-l_2'+j)-(l_3-j))} \le$$

$$\le (q_1' + q_2' + q_3)^{(q_1'+q_2'+q_3)} \times$$

$$\times \frac{(q_2' + j)^{(q_2'-l_2'+j)} (l_3)^{(l_3-j)}}{(q_1' + q_2' + q_3)^{(q_2'-l_2'+j)+(l_3-j)}} \le (q_1' + q_2' + q_3)^{(q_1'+q_2'+q_3)}.$$

Скориставшись тепер очевидною нерівністю

$$e^l \ge \frac{l^l}{l!}, \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

дістанемо

$$(q_1' + q_2' + q_3)^{(q_1'+q_2'+q_3)} \le e^{q_1'+q_2'+q_3}\left(\frac{(q_1'+q_2'+q_3)!}{q_1'!(q_2'+q_3)!}\,\frac{(q_2'+q_3)!}{q_2'!q_3!}\right)q_1'!q_2'!q_3! \le$$

$$\le (2e)^{2(q_1'+q_2'+q_3)}q_1'!q_2'!q_3!.$$

Отже,

$$(q_1' + l_2' + q_3 - l_3)^{(q_1'+l_2'+q_3-l_3)}(q_2' - l_2' + j)^{(q_2'-l_2'+j)}(l_3 - j)^{(l_3-j)} \le$$

$$\le (2e)^{2(q_1'+q_2'+q_3)}q_1'^{q_1'}q_2'^{q_2'}q_3^{q_3}.$$

Аналогічним способом переконуємося, що

$$(q_1'' + l_2'')^{(q_1''+l_2'')}(q_2'' - l_2'')^{(q_2''-l_2'')} \le (2e)^{2(q_1''+q_2'')}q_1''^{q_1''}q_2''^{q_2''}.$$

Встановимо тепер існування додатної сталої δ_1 такої, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 < \chi \ll 1$

$$e^{-\delta|z|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}} \le e^{-\delta_1|\xi|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}.$$

Для цього запишемо ліву частину цієї нерівності у вигляді

$$e^{-\delta|z|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}} = e^{-\delta(|z_1|_*^{\vec{h}'}+\frac{1}{2}|z_4|_*^{\vec{h}'}+\frac{1}{3}|z_6|_*^{\vec{h}'})}e^{-\delta(|z_2|_*^{\vec{h}''}+\frac{1}{2}|z_5|_*^{\vec{h}''})}\times$$

$$\times e^{-\delta(|z_4|_*^{\vec{h}'}+\frac{1}{3}|z_6|_*^{\vec{h}'})}e^{-\delta(|\xi_1'''|_*^{\vec{h}'''}+\frac{1}{2}|\xi_2''|_*^{\vec{h}''}+\frac{1}{3}|\xi_3|_*^{\vec{h}'})}.$$

Оцінимо перший співмножник із цього виразу. Оскільки

$$|z_1|_*^{\vec{h}'} + \frac{1}{2}|z_4|_*^{\vec{h}'} + \frac{1}{3}|z_6|_*^{\vec{h}'} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n_3}\left(|\xi_{1j} + \chi\xi_{2j} + 2^{-1}\chi^2\xi_{3j}|^{h_j} + \frac{1}{2}|\xi_{2j} + \chi\xi_{3j}|^{h_j} + \frac{1}{3}|\xi_{3j}|^{h_j}\right),$$

то нехай спочатку

$$|\xi_{1j}| \ge |\xi_{2j} + 2^{-1}\chi\xi_{3j}|, \quad \chi \in (0; 1/2), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Тоді

$$|\xi_{1j} + \chi(\xi_{2j} + 2^{-1}\chi\xi_{3j})| \ge |\xi_{1j}|\left|1 - \frac{\chi|\xi_{2j} + 2^{-1}\chi\xi_{3j}|}{|\xi_{1j}|}\right| \ge \frac{1}{2}|\xi_{1j}|,$$

$$\chi \in (0; 1/2), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

І в цьому випадку

$$e^{-\delta(|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}+2^{-1}\chi^2\xi_{3j}|^{h_j}+\frac{1}{2}|\xi_{2j}+\chi\xi_{3j}|^{h_j}+\frac{1}{3}|\xi_{3j}|^{h_j})} \le$$

$$\le e^{-\delta|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}+2^{-1}\chi^2\xi_{3j}|^{h_j}} \le e^{-\delta(2^{-1}|\xi_{1j}|)^{h_j}}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Нехай тепер

$$|\xi_{1j}| < |\xi_{2j} + 2^{-1}\chi\xi_{3j}|, \quad \chi \in (0;1/2), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Тоді

$$e^{-\delta(|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}+2^{-1}\chi^2\xi_{3j}|^{h_j}+\frac{1}{2}|\xi_{2j}+\chi\xi_{3j}|^{h_j}+\frac{1}{3}|\xi_{3j}|^{h_j})} \leq$$

$$\leq e^{-\delta(\frac{1}{2}|\xi_{2j}+\chi\xi_{3j}|^{h_j}+\frac{1}{3}|\xi_{3j}|^{h_j})}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Припустивши, що

$$|\xi_{2j} + 2^{-1}\chi\xi_{3j}| \geq |\xi_{3j}|, \quad \chi \in (0;1/2), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

одержимо

$$e^{-\delta(\frac{1}{2}|\xi_{2j}+\chi\xi_{3j}|^{h_j}+\frac{1}{3}|\xi_{3j}|^{h_j})} \leq e^{-\frac{\delta}{2}|(\xi_{2j}+2^{-1}\chi\xi_{3j})+2^{-1}\chi\xi_{3j}|^{h_j}} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{\delta}{2}|\xi_{2j}+2^{-1}\chi\xi_{3j}|^{h_j}\left|1-\frac{\chi|\xi_{3j}|}{|\xi_{2j}+2^{-1}\chi\xi_{3j}|}\right|^{h_j}\right\} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{\delta}{2}(2^{-1}|\xi_{2j}+2^{-1}\chi\xi_{3j}|)^{h_j}} \leq e^{-\frac{\delta}{2}(2^{-1}|\xi_{1j}|)^{h_j}}, \quad \chi \in (0;1/2), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Якщо ж

$$|\xi_{2j} + 2^{-1}\chi\xi_{3j}| < |\xi_{3j}|, \quad \chi \in (0;1/2), \quad j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

то

$$|\xi_{1j}| < |\xi_{3j}|, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3},$$

і

$$e^{-\delta(\frac{1}{2}|\xi_{2j}+\chi\xi_{3j}|^{h_j}+\frac{1}{3}|\xi_{3j}|^{h_j})} \leq e^{-\frac{\delta}{3}|\xi_{3j}|^{h_j}} \leq e^{-\frac{\delta}{3}|\xi_{1j}|^{h_j}}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_3}.$$

Отже,

$$e^{-\delta(|z_1|_*^{\vec{h}'}+\frac{1}{2}|z_4|_*^{\vec{h}'}+\frac{1}{3}|z_6|_*^{\vec{h}'})} \leq e^{-\frac{\delta}{3}|2^{-1}\xi_1'|_*^{\vec{h}'}}, \quad \chi \in (0;1/2), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Оцінки

$$e^{-\delta(|z_2|_*^{\vec{h}''}+\frac{1}{2}|z_5|_*^{\vec{h}''})} \leq e^{-\frac{\delta}{2}|2^{-1}\xi_1''|_*^{\vec{h}''}}, \quad \chi \in (0;1/2), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

і

$$e^{-\delta(|z_4|_*^{\vec{h}'}+\frac{1}{3}|z_6|_*^{\vec{h}'})} \leq e^{-\frac{\delta}{3}|2^{-1}\xi_2'|_*^{\vec{h}'}}, \quad \chi \in (0;1/2), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

встановлюються аналогічним способом.

Оскільки має місце очевидна рівність

$$\sum_{l_2'=0}^{q_2'} C_{q_2'}^{l_2'}\left(\sum_{l_2''=0}^{q_2''} C_{q_2''}^{l_2''}\left(\sum_{l_3=0}^{q_3} C_{q_3}^{l_3}\sum_{j=0}^{l_3} C_{l_3}^{j}\right)\right) = 2^{|q_2|_*}3^{|q_3|_*},$$

із (33) випливає існування додатних сталих c, A і δ, які не залежать від $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\chi \in (0;1/2)$ і такі, що для кожного елемента $\psi \in S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*}$

$$|\partial_\xi^q(\check{T}_\chi^+\varphi(\xi))| \le cA^{|q|_*}q^{q\overrightarrow{\beta}^*}e^{-\delta|\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}^*}}, \quad \varphi(\cdot) := F^{-1}[\psi](\cdot). \tag{34}$$

Звідси та з рівності (32), враховуючи при цьому лему 3, одержуємо обмеженість сукупності $J_\psi^{\chi,0}(\cdot)$, $0 < \chi \ll 1$, у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$, тобто виконання умови 1.

Перейдемо до встановлення умови 2. З рівності (32) для $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\chi \in (0;1/2)$ дістанемо

$$|\partial_\xi^q((2\pi)^{-n}J_\psi^{\chi,0}(\xi) - \varphi(\xi))| \le |V(t,\tau,\xi) - 1| \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left\{|\partial_\xi^q(\check{T}_\chi^+\varphi(\xi))|\right\} +$$

$$+\left(2^{|q|_*}\sum_{|l|_*=1}^{|q|_*}|\partial_\xi^l V(t,\tau,\xi)| \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left\{|\partial_\xi^{q-l}(\check{T}_\chi^+\varphi(\xi))|\right\}\right) +$$

$$+4^{|q_2|_*+|q_3|_*}\left(\sum_{l_2'=0}^{q_2'}{}'\sum_{l_2''=0}^{q_2''}\sum_{l_3=0}^{q_3}\sum_{j=0}^{l_3}\chi^{|l_2|_*+|j|_*+2|q_3-l_3|_*} \times\right.$$

$$\left.\times \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|\frac{\partial^{|q|_*}\varphi(z)}{\partial z_1^{q_1'+l_2'+q_3-l_3}\partial z_2^{q_1''+l_2''}\partial z_3^{q_1'''}\partial z_4^{q_2'-l_2'+j}\partial z_5^{q_2''-l_2''}\partial z_6^{l_3-j}}\right|\right\}\right) +$$

$$+\left|\frac{\partial^{|q|_*}\varphi(z)}{\partial z_1^{q_1'}\partial z_2^{q_1''}\partial z_3^{q_1'''}\partial z_4^{q_2'}\partial z_5^{q_2''}\partial z_6^{q_3}} - \partial_\xi^q\varphi(\xi)\right|,$$

де $\sum_{l_2'=0}^{q_2'}{}'$ означає, що розглядається сума з рівності (33) без доданка

$$\frac{\partial^{|q|_*}\varphi(z)}{\partial z_1^{q_1'}\partial z_2^{q_1''}\partial z_3^{q_1'''}\partial z_4^{q_2'}\partial z_5^{q_2''}\partial z_6^{q_3}}.$$

Звідси, враховуючи оцінки (34) та

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{\left|\frac{\partial^{|q|_*}\varphi(z)}{\partial z_1^{q_1'+l_2'+q_3-l_3}\partial z_2^{q_1''+l_2''}\partial z_3^{q_1'''}\partial z_4^{q_2'-l_2'+j}\partial z_5^{q_2''-l_2''}\partial z_6^{l_3-j}}\right|\right\} < +\infty \quad \forall\varphi \in S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*},$$

приходимо до висновку, що перевірка виконання умови 2 зводиться до встановлення граничних співвідношень

$$|V(t,\tau,\xi) - 1| \underset{t\to\tau+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0,$$

$$|\partial_\xi^q V(t,\tau,\xi)| \underset{t\to\tau+0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \quad l \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |l|_* \ne 0, \tag{35}$$

$$\left|\frac{\partial^{|q|_*}\varphi(z)}{\partial z_1^{q_1'}\partial z_2^{q_1''}\partial z_3^{q_1'''}\partial z_4^{q_2'}\partial z_5^{q_2''}\partial z_6^{q_3}} - \partial_\xi^q\varphi(\xi)\right| \underset{\chi\to 0+}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \quad q \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Однак для довільного компакта $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$

$$|V(t,\tau,\xi)| \leq \exp\{(t-\tau)\Delta_{\mathbb{K}}\} \underset{t\to\tau+0}{\to} 1,$$

$$|\partial_\xi^q V(t,\tau,\xi)| \leq \Delta_{\mathbb{K}} \sum_{r=1}^{|l|_*} c_r \left(\int_\tau^t \sup_{\xi\in\mathbb{K}} \{|P_r(\theta-\tau,\xi)|\} d\theta \right)^r \underset{t\to\tau+0}{\to} 0, \quad l \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |l|_* \neq 0,$$

де c_r — додатні сталі, $P_r(\theta-\tau,\xi)$ — відповідні многочлени від змінних $(\theta-\tau)$ і ξ, а

$$\Delta_{\mathbb{K}} := \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} \left(\sup_{t\in[0;T]} \{|a_{k_1}(t)\} \right) \times$$

$$\times \left(\sup_{\xi\in\mathbb{K}} \{||\xi_1'| + T|\xi_2'| + T^2|\xi_3||^{k_1'} ||\xi_1''| + T|\xi_2''||^{k_1''} |\xi_1'''|^{k_1'''}\} \right).$$

Щодо співвідношення (35), то воно також виконується. У цьому неважко переконатися, якщо скористатися теоремою про скінченні прирости та врахувати те, що функція $\varphi(\cdot)$ є елементом відповідного простору типу S.

Лему доведено.

3. Коректна розв'язність задачі Коші. Наступне твердження характеризує коректну розв'язність задачі Коші (1), (3) для початкових даних із досить широкого класу функцій.

Теорема. *Нехай початкова функція f є елементом простору $(S_{\overrightarrow{\beta}^*}^{\overrightarrow{\alpha}^*})'$. Тоді для задачі Коші* (1), (3) *існує єдиний, неперервно залежний від початкових даних розв'язок, який диференційовний по t, нескінченно диференційовний по x і зображується формулою*

$$u(t,x) = \langle f_\eta, G(t,x;0,\eta)\rangle, \quad t \in \Pi_{(0;T]}^n \tag{36}$$

(*тут індекс η вказує на змінну, за якою відбувається дія функціонала f*).

Доведення. Досліджені у попередньому пункті властивості ФРЗК G дозволяють скористатися тут схемою доведення аналогічного твердження з [3]. У зазначений спосіб легко переконуємося, що функція $u(t,x)$, яка визначається рівністю (36) у шарі $\Pi_{(0;T]}^n$, є диференційовною по t, нескінченно диференційовною по x і задовольняє у звичайному розумінні рівняння (1) у цьому шарі.

Ця функція також задовольняє і початкову умову (3). Справді, зафіксувавши довільно ψ з $S_{\overrightarrow{\beta}^*}^{\overrightarrow{\alpha}^*}$ та врахувавши означення оберненого перетворення Фур'є узагальненої функції, а також регулярність функціонала $u_\tau(t,\cdot)$, одержимо

$$\langle u_\tau(t,x),\psi(x)\rangle = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\langle F_{\xi\to\eta}^{-1}[f], F_{\xi\to\eta}^{-1}[G(t,x;\tau,\xi)]\rangle)\psi(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\langle F_{\xi\to\eta}^{-1}[f], I_{\eta,\psi}^{t,\tau}(x)\rangle)dx, \quad 0 \leq \tau < t \leq T.$$

Звідси, врахувавши лему 4, дістанемо рівність

$$\langle u_\tau(t,x),\psi(x)\rangle = \langle F_{\xi\to\eta}^{-1}[f], J_\psi^{t,\tau}(\eta)\rangle, \quad \psi \in S_{\overrightarrow{\beta}^*}^{\overrightarrow{\alpha}^*}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

з якої за допомогою леми 5 одержимо

$$\langle u_\tau(t,x),\psi(x)\rangle \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} (2\pi)^n \langle F^{-1}[f](\eta), F^{-1}[\psi](\eta)\rangle = \langle f,\psi\rangle$$

для будь-яких $\psi \in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$ і $\tau \in [0;T)$, тобто виконання початкової умови (3) для функції $u(t,\cdot) = u_0(t,\cdot)$.

Щодо єдиності розв'язку задачі Коші (1), (3), то доведення цього факту ґрунтується на відомому способі Хольмгрена і зводиться до повторення відповідних міркувань з [3].

Теорему доведено.

1. *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – S. 116 – 117.
2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
3. *Івасишен С. Д., Літовченко В. А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 8. – С. 1066 – 1087.
4. *Литовченко В. А.* Задача Коши для $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 3-4. – С. 364 – 379.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

Одержано 15.02.10