УДК 515.12

Л. І. Карчевська (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКТОРІВ ДОДАТНО ОДНОРІДНИХ ТА НАПІВАДИТИВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

We investigate the functor OH of positively homogeneous functionals and the functor OS of semiadditive functionals. We prove that $OH(X)$ is an AR if and only if X is openly generated compactum and $OS(X)$ is an AR if and only if X is openly generated compactum of weight $\le \omega_1$. For maps of the multiplication of monads generated by the considered functors, we investigate their softness.

Рассматриваются функтор OH положительно однородных функционалов и функтор OS полуаддитивных функционалов. Доказано, что $OH(X)$ является абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда X — открыто-порожденный компакт, а $OS(X)$ является абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда X — открыто-порожденный компакт веса $\le \omega_1$. Исследована мягкость отображений умножения монад, порожденных данными функторами.

0. Вступ. В. В. Федорчук у роботі [1] поставив наступне загальне питання: яким чином функтори впливають на певні геометричні властивості просторів і відображень між ними ? Під геометричними властивостями розуміємо властивість простору бути абсолютним ретрактом, властивості відображення бути м'яким, бути тихоновським розшаруванням тощо.

В цьому напрямку існує багато досліджень, зокрема, їх результати стосуються функторів гіперпростору, гіперпросторів включення, функтора ймовірнісних мір, суперрозширення та інших функторів (див., наприклад, [2]).

Розглянемо як приклад функтори ймовірнісних мір та суперрозширення. На просторі $P(X)$ для довільного компакта X існує природна структура лінійної опуклості. Щодо λ де Гроот [3] сконструював деяку абстрактну опуклість (не лінійну) на довільному просторі вигляду $\lambda(X)$, і ця опуклість є бінарною, в той час як лінійна опуклість на $P(X)$ не є бінарною. Функтори P та λ мають різні геометричні властивості. Наприклад, P, на відміну від λ, не дає абсолютних ретрактів у вагах, вищих за ω_1.

Поняття опуклостей, яке ми розглядаємо в даній статті, набагато ширше, ніж класичне поняття опуклості, оскільки воно не пов'язане з наявністю лінійної структури на просторі. Цей підхід базується на понятті топологічної опуклості роботи [4]. В роботі [5] Т. М. Радул для кожної монади $\mathbb{F}$ увів деяку абстрактну структуру опуклості на просторах вигляду FX, де F — функторіальна частина монади. Якщо монада $\mathbb{F}$ є L-монадою, що слабко зберігає прообрази, то дана опуклість породжує топологію простору FX. Також у [5] було показано, що слабко зберігаючі прообрази L-монади, для яких введена структура опуклості є бінарною, мають хороші геометричні властивості у вагах більших, ніж ω_1 (теорема 3.3).

У цій статті ми розглядаємо функтори OS та OH (введені в [6, 7]), які породжують L-монади. Монада $\mathbb{OS}$ не породжує бінарні опуклості, тоді як монада $\mathbb{OH}$ бінарна, і це є однією з причин, що обумовлює різні геометричні властивості цих монад: за цими властивостями OS ближче до P, а OH — до λ.

1. Необхідні означення і факти. У цій статті ми розглядатимемо лише об'єкти і морфізми категорії Comp, тобто компактні хаусдорфові простори (скорочено компакти) і неперервні відображення між ними.

Через $C(X)$, де $X \in \mathrm{Comp}$, позначаємо банахів простір усіх неперервних дійснозначних функцій з нормою, визначеною таким чином: $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in X\}$, через $d(\varphi, \psi)$ — відстань між функціями $\varphi, \psi \in C(X)$: $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$, через c_X, де $c \in \mathbb{R}$, — сталу функцію $c_X(x) = c$ для всіх $x \in X$.

Компакт X називають *абсолютним ретрактом* (скорочено AR-компактом), якщо при будь-якому вкладенні в інший компакт (або, що еквівалентно, тихоновський куб) його образ є ретрактом.

Нагадаємо, що τ-*спектром* [8], де τ — довільний кардинал, називають неперервний обернений спектр, що складається з компактів ваги $\leq \tau$ та епіморфізмів над τ-повною індексною множиною. Як завжди, ω позначає зліченний кардинал. Компакт X називають *відкрито-породженим*, якщо його можна подати у вигляді границі деякого ω-спектра з відкритими граничними відображеннями.

Відображення $f: X \to Y$ називають *м'яким* [8], якщо для довільного простору Z і його замкненої підмножини A, довільних функцій $\psi: A \to X$, $\Psi: Z \to Y$ таких, що $\Psi|A = f \circ \psi$, існує відображення $G: Z \to X$ таке, що $G|_A = \psi$ і $\Psi = f \circ G$.

Відомо, що компакт є абсолютним ретрактом, якщо його можна зобразити у вигляді граничного простору деякого ω-спектра з абсолютних ретрактів та м'яких відображень [9].

Будемо говорити, що комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ q\downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

є м'якою, якщо її *характеристичне відображення* $\chi: X \to Y \times {}_T Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\}$, що діє за правилом $\chi(x) = (p(x), q(x))$, м'яке.

Алгебраїчні аспекти теорії функторів формалізуються за допомогою поняття монади.

Трійку (F, η, μ), де F — ендофунктор в категорії Comp, $\eta: \mathrm{Id}_{\mathrm{Comp}} \to F$ та $\mu: F^2 \to F$ — природні перетворення, називають *монадою* (в сенсі Ейленберга і Мура [10]), якщо: 1) $\mu X \circ \eta F(X) = \mu X \circ F(\eta X) = \mathrm{id}_{F(X)}$; 2) $\mu X \circ \mu F(X) = \mu X \circ F(\mu X)$ [11].

Нехай трійка $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ утворює монаду. Пару (X, ξ), де $\xi: F(X) \to X$, називають $\mathbb{F}$-алгеброю, якщо $\xi \circ \eta X = \mathrm{id}_X$ і $\xi \circ \mu X = \xi \circ F(\xi)$.

Нехай (X, ξ) та (Y, ξ') — $\mathbb{F}$-алгебри. Відображення $f: X \to Y$ називають морфізмом $\mathbb{F}$-алгебр, якщо $\xi' \circ Ff = f \circ \xi$.

Кажемо, що L-монада $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ *слабко зберігає прообрази* [5], якщо для довільного відображення $f: X \to Y$ і довільної замкненої множини $A \subset Y$ має місце включення $\nu(\varphi) \in \left[\min \varphi\left(f^{-1}(A)\right), \max \varphi\left(f^{-1}(A)\right)\right]$ для всіх $\nu \in (Ff)^{-1}(F(A))$ і всіх $\varphi \in C(X)$.

Тепер нагадаємо означення опуклостей, уведених в [5]. Нехай (F, η, μ) — монада і (X, ξ) — $\mathbb{F}$-алгебра. Розглянемо довільну замкнену підмножину A у просторі X. Позначимо через f_A фактор-відображення $f_A : X \to X/A$, $a = f_A(A)$. Кажемо, що $C_{\mathbb{F}}(A) = \xi\left(Ff_A^{-1}\left(\eta(X/A)(a)\right)\right)$ є $\mathbb{F}$*-опуклою оболонкою* множини A. Також покладемо $C_{\mathbb{F}}(\varnothing) = \varnothing$. Множину A називають $\mathbb{F}$*-опуклою*, якщо $A = C_{\mathbb{F}}(A)$. Нехай $C_{\mathbb{F}}(X, \xi) = \{A \subset X \mid A$ замкнена і $A = C_{\mathbb{F}}(A)\}$. Сім'я $C_{\mathbb{F}}(X, \xi)$ утворює опуклість на просторі X. Відомо, що довільний морфізм $\mathbb{F}$-алгебр зберігає вказані опуклості.

Монаду $\mathbb{F}$ називають *бінарною*, якщо $C_{\mathbb{F}}(X, \xi)$ є бінарною, тобто перетин кожної зчепленої підсім'ї з $C_{\mathbb{F}}(X, \xi)$ є непорожнім (сім'ю підмножин деякого простору називають *зчепленою*, якщо перетин скінченної кількості довільних її елементів не є порожнім).

Теорема A ([5], теорема 3.3). *Нехай $\mathbb{F}$ — бінарна L-монада, що слабко зберігає прообрази, і простір X такий, що FX є відкрито-породженим (зв'язним) компактом. Тоді довільне відкрите відображення $f: FX \to Y$ з $\mathbb{F}$-опуклими шарами є 0-м'яким (м'яким).*

Визначимо тепер об'єкти вивчення — монади $\mathbb{OH}$ та $\mathbb{OS}$.

Нехай $\nu: C(X) \to \mathbb{R}$ — функціонал. Кажемо, що ν: 1) нормований, якщо $\nu(1_X) = 1$; 2) слабкоадитивний, якщо для кожної функції $\phi \in C(X)$ та кожного $c \in \mathbb{R}$ маємо $\nu(\phi + c_X) = \nu(\phi) + c$; 3) зберігає порядок, якщо для довільних $\varphi, \psi \in C(X)$ таких, що $\varphi(x) \leq \psi(x)$ для всіх $x \in X$ (тобто $\varphi \leq \psi$), має місце нерівність $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$; 4) додатно однорідний, якщо для довільної функції $\varphi \in C(X)$ і довільного числа $t \geq 0$ маємо $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$; 5) напівадитивний, якщо $\nu(\varphi + \psi) \leq \nu(\varphi) + \nu(\psi)$.

Тепер для довільного простору X позначимо $V(X) = \prod_{\varphi \in C(X)} [\min \varphi, \max \varphi]$. Для довільного відображення $f: X \to Y$ визначимо відображення $V(f)$ так: $V(f)(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f)$ для кожного $\nu \in V(X)$, $\varphi \in C(Y)$. Тоді V утворює коваріантний функтор у категорії Comp.

Для довільного простору X через $O(X)$ позначимо множину функціоналів, що задовольняють властивості 1 – 3 (зберігаючі порядок функціонали), через $OH(X)$ — множину функціоналів на $C(X)$, що мають властивості 1 – 4 (додатно однорідні функціонали), і через $OS(X)$ — функціонали, що мають властивості 1 – 5 (напівадитивні функціонали). Також нагадаємо, що $P(X)$ позначає множину функціоналів на $C(X)$, які є нормованими ($\|\mu\| = 1$), додатними ($\mu(\varphi) \geq 0$ для всіх $\varphi \geq 0$) і лінійними. Нехай тепер F належить $\{O, OH, OS, P\}$. Простір $F(X)$ розглядається як підпростір у $V(X)$. Для довільної функції $f: X \to Y$ відображення $F(f) : F(X) \to F(Y)$ є звуженням відображення $V(f)$ на відповідний підпростір $F(X)$. Тоді F утворює коваріантний функтор у категорії Comp, який є підфунктором V. Також зрозуміло, що для довільного простору X простір $F(X)$ є опуклим.

Кожен із вказаних функторів утворює монаду. Нехай F належить $\{V, O, OH, OS, P\}$. Тоді відображення одиниці і множення визначаються таким чином. Природне перетворення $\eta : \mathrm{Id}_{\mathrm{Comp}} \to F$ задається формулою $\eta X(x)(\varphi) =$

$= \varphi(x)$ для довільних точки $x \in X$ і функції $\varphi \in C(X)$, природне перетворення $\mu : F^2 \to F$ — формулою $\mu X(\nu)(\varphi) = \nu(\pi_\varphi)$, де $\pi_\varphi : F(X) \to \mathbb{R}$, $\pi_\varphi(\lambda) = \lambda(\varphi)$. Далі через $\mu_F X$ позначатимемо відображення множення для монади, утвореної відповідним функтором F.

Згідно з характеризацією, даною в [11], під L-монадою розумітимемо довільну підмонаду $\mathbb{V}$. Отже, $\mathbb{OH}$ та $\mathbb{OS}$, будучи підмонадами монади $\mathbb{V}$, є L-монадами.

Деякі категорні і топологічні властивості функторів O, OH та OS було розглянуто в [5 – 7, 12, 13].

Далі нам знадобляться наступні факти щодо функтора OS, встановлені в [6]:

для довільної множини $A \in \exp P(X)$ функціонал ν_A, визначений за допомогою формули $\nu_A(\varphi) = \sup\{\mu(\varphi) \mid \mu \in A\}$, де φ належить $C(X)$, існує і належить $OS(X)$. Також $\nu_A = \nu_{\mathrm{conv}(A)}$ для всіх $A \in \exp P(X)$ (твердження 3.2);

довільний функціонал $\nu \in OS(X)$ збігається з деяким функціоналом вигляду ν_A, де $A = \{\mu \in P(X) \mid \mu(\varphi) \le \nu(\varphi) \ \forall \varphi \in C(X)\}$ — опуклий компакт в $P(X)$, більш того, для кожної функції $\varphi \in C(X)$ існує $\mu \in A$ такий, що $\mu(\varphi) = \nu(\varphi)$ (теорема 3.3);

відповідність між функціоналами з $OS(X)$ та замкненими опуклими множинами в $P(X)$ є бієкцією (теорема 3.4);

для довільного відображення $f\colon X \to Y$ та функціонала $\nu_A \in OS(X)$ виконується рівність $OS(f)(\nu_A) = \nu_{P(f)(A)}$.

2. Коли $OH(X)$ і $OS(X)$ є абсолютними ретрактами ? Якщо $A \subset OH(X)$ — довільна множина, то функціонали $\sup A$, $\inf A$ також належать до $OH(X)$. Отже, $OH(X)$ є компактною підґраткою в $\prod_{\varphi \in C(X)} [\min \varphi, \max \varphi]$.

Наступне твердження можна отримати, використавши ті самі міркування, що і при доведенні теореми 1 із [13].

Твердження 1. *Нехай $f\colon X \to Y$ — довільне сюр'єктивне відображення. Відображення $OH(f)$ є відкритим тоді і лише тоді, коли f відкрите.*

Із зауважень щодо функтора OS, наведених вище, зрозуміло, що функтор OS є ізоморфним композиції функторів cc та P. Деякі властивості функтора cc було досліджено в [14]. Для довільного опуклого компакта X ccX визначається як множина всіх непорожніх замкнених опуклих підмножин в X, ccX розглядається як підпростір в $\exp X$. Якщо $f\colon X \to Y$ — довільне афінне відображення, то відображення $cc(f)$ задається так: $cc(f)(A) = f(A)$, де $A \in ccX$. З твердження 3.1 роботи [14] і відкритості функтора ймовірнісних мір випливає таке твердження.

Твердження 2. *Функтор OS відкритий, тобто для довільного відкритого відображення $f\colon X \to Y$ відображення $OS(f)$ є відкритим.*

У роботі [5] показано, що монада $\mathbb{O}$, породжена функтором слабкоадитивних функціоналів, слабко зберігає прообрази (теорема 4.2). Оскільки $\mathbb{OH}$ та $\mathbb{OS}$ є підмонадами $\mathbb{O}$, вони також слабко зберігають прообрази.

Нагадаємо, що позначення $\mathbb{L}$ відповідає монаді суперрозширення, яка породжена функтором суперрозширення λ (детальніше див. [2]). Для довільного компакта X простір λX має функціональне зображення, яке можна визначити за допомогою вкладення $iX\colon \lambda X \to \prod_{\varphi\in C(X)}[\min\varphi,\ \max\varphi]$ такого, що $iX(\mathcal{A})(\varphi) = \sup\{\inf\varphi(A) \mid A\in\mathcal{A}\}$, де $\mathcal{A}$ взято з λX і $\varphi\in C(X)$. Зрозуміло, що образ $iX(\lambda X)$ лежить в $OH(X)$. Природне перетворення $i=\{iX\}$ є морфізмом монад, який здійснює вкладення монади суперрозширення в монаду $\mathbb{OH}$. Отже, згідно з теоремою 3.2 роботи [5], монада $\mathbb{OH}$ є бінарною.

Розглянемо тепер довільний відкрито-породжений компакт X. Оскільки функтор OH відкритий, а простір $OH(X)$ є опуклим, простір $OH(X)$ є відкрито-породженим континуумом. Тоді з теореми А випливає, що $OH(X)$ є абсолютним ретрактом.

Навпаки, якщо припустити, що $OH(X)$ є абсолютним ретрактом для деякого компакта X, то, міркуючи, як і при доведенні теореми 2 роботи [13], переконуємося, що X є відкрито-породженим.

Отже, ми отримали наступну теорему.

Теорема 1. *Простір $OH(X)$ є абсолютним ретрактом тоді і лише тоді, коли X — відкрито-породжений компакт.*

Отже, $OH(X)$ може бути абсолютним ретрактом і в тому випадку, коли вага X перевищує ω_1. Те ж саме можна стверджувати про деякі інші функтори, які породжують L-монади і містять $\mathbb{L}$ як підмонаду, наприклад, G, O, сам λ. Функтор OS є ближчим до P. Він не дає абсолютних ретрактів у вагах, вищих за ω_1.

Твердження 3. *$OS(X)$ є абсолютним ретрактом тоді і лише тоді, коли X — відкрито-породжений компакт і $w(X)\le\omega_1$.*

Доведення випливає з результатів роботи [14] (теорема 4.1), об'єднаних з результатами роботи [15], які забезпечують правильність аналогічного твердження для функторів cc та P.

***Наслідок* 1.** *Не існує вкладення $i\colon \mathbb{L}\hookrightarrow \mathbb{OS}$.*

Справді, припустивши протилежне, ми б отримали бінарність монади $\mathbb{OS}$. Тоді, згідно з теоремою А, простір $OS(D^{\omega_2})$, наприклад, був би абсолютним ретрактом (тут D позначає двоточковий дискретний простір). Прийшли до суперечності.

3. М'якість відображень множення для монад $\mathbb{OH}$ та $\mathbb{OS}$. Перейдемо до з'ясування умов, при яких відображення множення для монад, що ми розглядаємо, можуть бути м'якими.

Теорема 2. *Якщо відображення множення $\mu_{OS}X$ монади $\mathbb{OS}$ м'яке, то простір X є метризовним.*

Доведення. Припустимо, що простір X не є метризовним, а відображення $\mu_{OS}X$ м'яке. Тоді, згідно з теоремою 3 з роботи [16], простір X є відкрито-породженим.

Зобразимо X як границю ω-спектра $S=\{X_\alpha,\ p_\alpha^\beta,\ \mathcal{A}\}$ з відкритими граничними відображеннями. Оскільки відображення μX є м'яким, можемо припустити, що всі діаграми вигляду

$$\begin{array}{ccc} OS^2(X) & \overset{OS^2(p_\alpha)}{\rightarrow} & OS(X_\alpha) \\ \mu X\downarrow & & \downarrow\mu X_\alpha \\ OS(X) & \overset{OS(p_\alpha)}{\rightarrow} & OS(X_\alpha) \end{array}$$

є м'якими (теорема 2 [16]), а тому і відкритими.

Тепер наша мета полягає в тому, щоб знайти $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ і точку скупчення $x \in X_{\alpha_0}$ таку, що прообраз $p_{\alpha_0}^{-1}(x)$ містить більше, ніж одну точку. Вага простору X є незліченною, тому його характер також незліченний, оскільки $w(X) = \chi(X)$ для довільного відкрито-породженого компакта [13]. Виберемо точку $x_0 \in X$ так, що $\chi(x_0, X) > \omega$ і деяке $\alpha \in \mathcal{A}$, покладемо $x_\alpha = p_\alpha(x_0)$. Тоді $p_{\alpha_0}^{-1}(x_\alpha)$ містить більше, ніж одну точку, інакше точка x_0 мала б зліченний характер. Якщо точка x_α не є ізольованою, то вона задовольняє наші вимоги. Припустимо, що точка x_α є ізольованою. Розглянемо точку $x_1 \in p_\alpha^{-1}(x_\alpha)$, відмінну від x_0. Можна вибрати $\alpha_1 > \alpha$ так, що $p_{\alpha_1}(x_1) \neq$ $\neq p_{\alpha_1}(x_0)$. Знов-таки, прообраз $p_{\alpha_1}^{-1}(x_0)$ не є одноточковим, і якщо $p_{\alpha_1}(x_0)$ є точкою скупчення, то процес вибору завершено. Припустимо протилежне. Візьмемо довільну точку $x_2 \in p_{\alpha_1}^{-1}\big(p_{\alpha_1}(x_0)\big)$ таку, що $x_2 \neq x_0$, і індекс $\alpha_2 > \alpha_1$ такий, що $p_{\alpha_2}(x_2) \neq p_{\alpha_2}(x_0)$, і продовжимо процес вибору так, як було описано вище. Якщо на довільному кроці i точка $p_{\alpha_i}(x_0)$ не є точкою скупчення, ми отримуємо послідовність $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ точок у X і напрямлений вгору ланцюг елементів $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ з $\mathcal{A}$, який має точну верхню грань $\alpha_0 \in \mathcal{A}$. Тоді простір X_{α_0} є границею оберненого спектра $\left\{X_{\alpha_i}, p_{\alpha_i}^{\alpha_j}, i \leq j\right\}$ і $\lim_{i\to\infty} p_{\alpha_0}(x_i) = p_{\alpha_0}(x_0)$. Справді, сім'я $\left\{\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1}\big(p_{\alpha_i}(x_0)\big)\right\}$ утворює базу околів у точці $p_\alpha(x_0)$, і для довільного такого $\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1}\big(p_{\alpha_i}(x_0)\big)$ бачимо, що $p_{\alpha_0}(x_j)$ міститься в ньому для довільних $j \geq i$. Отже, $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ і $x = p_{\alpha_0}(x_0)$ задовольняють наші вимоги.

Згідно з нашим припущенням, діаграма

$$\begin{array}{ccc} OS^2(X) & \overset{OS^2(p_{\alpha_0})}{\rightarrow} & OS(X_{\alpha_0}) \\ \mu_{os}X\downarrow & & \downarrow\mu_{os}X_{\alpha_0} \\ OS(X) & \overset{OS(p_{\alpha_0})}{\rightarrow} & OS(X_{\alpha_0}) \end{array}$$

є відкритою.

Розглянемо точку скупчення $x \in X_{\alpha_0}$, вибрану раніше, і дві різні точки y_1, $y_2 \in p_{\alpha_0}^{-1}(x)$. Нехай $\{x_i\}_{\beta\in I}$ — напрямленість, що збігається до x. Виберемо $y_i \in p_{\alpha_0}^{-1}(x_i)$ для довільного $i \in I$ таким чином, щоб напрямленість $\{y_i\}_{i\in I}$ збігалась до x_1.

Позначимо $\nu = \dfrac{\delta_{y_1} + \delta_{y_2}}{2}$ і $\mathcal{V} = \Delta_{\delta_x}$. Тоді напрямленість $(\nu_i, \mathcal{V}_i) = \left(\dfrac{\delta_{y_1} + \delta_{y_2}}{2}, \Delta_{(\delta_x + \delta_{x_i})/2}\right)$ збігається до $(\nu, \mathcal{V})$. Щоб отримати суперечність з відкритістю χ, а отже і з м'якістю $\mu_{OS}X$, покажемо, що обернене відображення (як відображення в експоненту $OS^2(X)$) до характеристичного відображення даної діаграми не є неперервним. Справді, розглянемо

$$\chi^{-1}\left(\frac{\delta_{y_1} + \delta_{y_2}}{2}, \Delta_{(\delta_x + \delta_{x_i})/2}\right) = \left(OS^2(p_{\alpha_0})\right)^{-1}(\mathcal{V}_i) \cap (\mu_{OS}X)^{-1}(\nu_i).$$

Припустимо, що виконується $\Theta \in \left(OS^2(p_{\alpha_0})\right)^{-1}(\mathcal{V}_i)$. Тоді $\operatorname{supp}\Theta$ є в $OS\left((p_{\alpha_0})^{-1}(x) \cup (p_{\alpha_0})^{-1}(x_i)\right)$. Тепер візьмемо довільний функціонал $\Theta = \Theta_A \in \in (\mu_{OS}X)^{-1}(\nu_i)$ (нагадаємо, що довільний функціонал $\eta \in OS(Y)$ має вигляд $\eta = \eta_B$, де $B \in ccP(Y)$). Ми хочемо показати, що $\operatorname{supp}\Theta_A$ є в $OS(\{y_i, y_2\})$. Справді, припускаючи протилежне, переконуємося, що існує міра $M \in A$, носій якої не міститься в $OS(\{y_i, y_2\})$. Тому існує $\theta \notin OS(\{y_i, y_2\})$ з носія M і можна вибрати функцію $\varphi \in C(X)$, яка набуває значення 0 на множині $\{y_2, y_i\}$, $\theta(\varphi) > 0$ і $0_X \le \varphi$. Оскільки функція π_φ є неперервною, існує замкнений окіл V функціонала θ, на якому π_φ строго більше за нуль. Також $\operatorname{supp} M \cap V \neq \varnothing$, тому $M(V) > 0$. Звідси випливає, що $M(\pi_\varphi) > 0$, і тому $\mu_{OS}X(\Theta_A)(\varphi) = (\Theta_A)(\pi_\varphi) = \sup\left\{M(\pi_\varphi) \mid M \in A\right\} > 0$, в той час як $\nu_i(\varphi) = 0$, звідки $\mu_{OS}X(\Theta_A) \neq \nu_i$. Тому носій довільного функціонала $\Theta \in \in \left(OS^2(p_{\alpha_0})\right)^{-1}(\mathcal{V}_i) \cap (\mu_{OS}X)^{-1}(\nu_i)$ має міститись в $OS(\{y_i, y_2\})$. Єдиним таким функціоналом Θ, який також задовольняв би умову $\chi(\Theta) = \left(\dfrac{\delta_{y_1} + \delta_{y_2}}{2}, \Delta_{(\delta_x + \delta_{x_i})/2}\right)$, є міра $\Delta_{\frac{\delta_{y_i} + \delta_{y_2}}{2}}$. Отже, існує деякий окіл V_1 функціонала $\Delta_{\frac{\delta_{y_1} + \delta_{y_2}}{2}} \in \chi^{-1}(\nu, \mathcal{V})$, який не містить елементів вигляду $\Delta_{(\delta_{y_i} + \delta_{y_2})/2}$ починаючи з деякого $i_0 \in I$, тому χ^{-1} не є неперервним і діаграма не є відкритою. Суперечність.

Теорему доведено.

Далі розглянемо результати щодо монади $\mathbb{OH}$, які показують, що вона поводиться так само, як і монада $\mathbb{O}$.

Теорема 3. *Відображення* $\mu_{OH}X$ *є відкритим для довільного простору* X.

Доведення теореми 3 повторює доведення аналогічного твердження для монади $\mathbb{O}$ [5].

Теорема 4. *Відображення* $\mu_{OH}X$ *є м'яким тоді і лише тоді, коли* X *— відкрито-породжений компакт.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $X = \lim \mathcal{S}$, де $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_\alpha, \mathcal{A}\}$ є ω-спектром, що складається з метризовних компактів та епіморфізмів. Відображення $\mu_{OH}X$ є м'яким, тому можна припустити, що всі граничні діаграми вигляду

$$\begin{array}{ccc} OH^2(X) & \xrightarrow{OH^2(p_\alpha)} & OH(X_\alpha) \\ \mu_{OH}X\downarrow & & \downarrow\mu_{OH}X_\alpha \\ OH(X) & \xrightarrow{OH(p_\alpha)} & OH(X_\alpha) \end{array}$$

відкриті. Припустимо, що X не є відкрито-породженим, отже, існує $\alpha \in \mathcal{A}$ такий, що відображення p_α не відкрите. Тоді, згідно з твердженням 1, відображення $OH(p_\alpha)$ не є відкритим. Тому існують функціонал $\nu \in OH(X_\alpha)$ і напрямленість $\{\nu_i\}_{i\in I}$, яка збігається до η, такі, що $OH(p_\alpha)^{-1}(\nu_i)$ збігається до деякої множини $A \neq OH(p_\alpha)^{-1}(\nu)$. Отже, $A \subset OH(p_\alpha)^{-1}(\nu)$. Виберемо два порівнянних елементи $\theta_1 \in A$, $\theta_2 \in OH(p_\alpha)^{-1}(\nu)\setminus A$. Нехай, наприклад, $\theta_1 \leq \theta_2$. Нехай $\{\theta_i\}$ — напрямленість, що збігається до θ_2, така, що $\theta_i \in OH(p_\alpha)^{-1}(\nu_i)$ для всіх $i \in I$. Тоді напрямленість $\{(\theta_i,\ \eta OH(X_\alpha)(\nu_i))\}$ збігається до $(\theta_2, \eta OH(X_\alpha)(\nu))$. Тепер нехай $\mathcal{V} \in OH^2(X)$ — функціонал такий, що $\mathcal{V}(\Phi) = \max\{\Phi(\theta_1), \Phi(\theta_2)\}$. Тоді $\chi(\mathcal{V}) = (\theta_2, \eta OH(X_\alpha)(\nu))$, де χ — характеристичне відображення діаграми. Виберемо $\Phi = C(OH(X))$ так, що $\Phi(\theta_2) = 1$ і $\Phi(\theta) = 0$ для всіх $\theta \in A$. Тоді можна припустити, що $\Phi(\theta) \leq \dfrac{1}{2}$ для всіх $\theta \in OH(p_\alpha)^{-1}(\nu_i)$, тому, згідно з лемою 2 з [12], отримуємо $\Theta(\Phi) \leq$ $\leq \dfrac{1}{2}$ для всіх $\Theta \in (OH^2(p_\alpha))^{-1}(\eta OH(X_\alpha)(\nu_i))$. Отже, ми отримали відкритий окіл функціонала $\mathcal{V}$ вигляду $V = \left\{\Theta \in OH^2(X) \,\middle|\, \Theta(\Phi) > \dfrac{1}{2}\right\}$ такий, що $V \cap$ $\cap\, \chi^{-1}(\theta_i, \eta OH(X_\alpha)(\nu_i)) = \varnothing$. Суперечність.

Достатність. Монада $\mathbb{OH}$ є бінарною і слабко зберігає прообрази. Оскільки відображення $\mu_{OH}X : OH^2(X) \to OH(X)$ — відкритий морфізм $\mathbb{OH}$-алгебр і $OH^2(X)$ є відкрито-породженим континуумом (згідно з теоремою 3), м'якість $\mu_{OH}X$ випливає з теореми А.

Теорему доведено.

1. *Федорчук В. В.* О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**. – С. 159 – 206.
2. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces. – Lviv: VNTL Publ., 1999.
3. *de Groot J.* Supercompactness and superextension. Contributions to extension theory of topological structures. – Berlin: Deuche Verlag Wissenschaften, 1967.
4. *van de Vel M.* Theory of convex structures. – North-Holland, 1993.
5. *Radul T.* Convexities generated by monads // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 27 – 30.
6. *Davletov D., Djabbarov G.* Functor of semiadditive functionals // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**. – P. 314 – 322.
7. *Djabbarov G.* Categorical properties of the functor of weakly additive positively-homogeneous functionals // Uzb. Math. J. – 2006. – **2**. – P. 20 – 28.
8. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**. – С. 3 – 62.

9. *Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч.* Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия, – М.: Наука, 1992. – 231 с.
10. *Eilenberg S., Moore J.* Adjoint functors and triples // J. Math. – 1965. – **9**. – P. 381 – 389.
11. *Radul T.* On strongly Lawson and I-Lawson monads // Bol. math. – 1999. – **6**. – P. 69 – 76.
12. *Radul T.* On the functor of order-preserving functionals // Comment. math. Univ. carol. – 1998. – **39**. – P. 609 – 615.
13. *Radul T.* Topology of the space of order-preserving functionals // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 1999. – **47**. – P. 53 – 60.
14. *Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M.* Hyperspace of convex compacta of nonmetrizable compact convex subspaces of locally convex space // Top. and Appl. – 2008. – **115**. – P. 764 – 772.
15. *Ditor S., Haydon R.* On absolute retracts, $P(S)$ and complemented subspaces of $C(D^{\omega})$ // Stud. Math. – 1976. – **56**. – P. 243 – 251.
16. *Заричный М. М.* Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов // Мат. сб. – 1991. – **9**. – С. 1261 – 1280.

Одержано 23.04.10