УДК 517.98

А. В. Чайковський (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ФУНКЦІЇ ВІД ОПЕРАТОРА ЗСУВУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

We investigate representations of functions of a shift operator acting on bounded sequences of elements of a Banach space. We obtain an estimate for bounded solution of a linear difference equation in the Banach space. For two types of differential equations in the Banach space, we present sufficient conditions for their bounded solutions to be limits of bounded solutions of corresponding difference equations. We obtain estimates for the rate of convergence.

Исследуется изображение для функций от оператора сдвига, действующего на ограниченные последовательности элементов банахова пространства. Получена оценка для ограниченного решения линейного разностного уравнения в банаховом пространстве. Для двух типов дифференциальных уравнений в банаховом пространстве приведены достаточные условия того, что их ограниченные решения являются пределами ограниченных решений соответствующих разностных уравнений. Получены оценки для скорости сходимости.

1. Вступ. При дослідженні різницевих рівнянь, визначених на $\mathbf{Z}$, відносно елементів, що належать банаховому простору, активно вивчаються питання, присвячені існуванню та єдиності обмежених розв'язків (див., наприклад, [1 – 4]), а також наближенню розв'язками різницевих рівнянь розв'язків відповідних диференціальних рівнянь [5 – 8]. При дослідженні цих питань зручно записувати різницеве рівняння у вигляді $Lx = y$, де y — відома послідовність, x — невідома, L — оператор, що є функцією від оператора H зсуву вправо у просторі послідовностей. Наприклад, різницеве рівняння

$$x_{n+1} - x_{n-1} = 2\tau(Ax_n + y_n), \quad n \in \mathbf{Z}$$

(A — лінійний оператор, $\tau > 0$), яке є різницевим аналогом диференціального рівняння

$$x'(t) = Ax(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

можна записати у вигляді

$$(H^{-1} - H - 2\tau A)x = y.$$

Тому важливо мати зображення функцій від оператора зсуву та вміти оцінювати їх. Операторне числення Данфорда [9, с. 608] дозволяє для кожної функції, аналітичної в околі спектра (для оператора зсуву це, як правило, одиничне коло), визначити відповідну функцію від оператора, проте оцінка отриманої функції часто є складною. В цій роботі буде показано, як можна будувати функції від оператора, якщо відповідна числова функція не обов'язково аналітична і визначена лише на спектрі оператора, який збігається з одиничним колом. Як наслідок, наведемо розв'язки для двох задач рівномірного наближення обмежених розв'язків диференціальних рівнянь розв'язками відповідних різницевих рівнянь у банаховому просторі.

2. Функції від операторів зі спектром на колі. Нехай $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексний банахів простір, $L(X)$ — множина лінійних неперервних операторів в X, $S := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

Означення 1. *Нехай* $M \in L(X),\ \sigma(M) \subset S$ *і*

$$\forall n \in \mathbf{Z}\colon \|M^n\| = 1. \tag{1}$$

Покладемо

$$F(z) := \sum_{n \in \mathbf{Z}\setminus\{-2,-1\}} \frac{z^{n+2}M^{-n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad z \in S. \tag{2}$$

Для довільної функції $\varphi \in C^2(S, L(X))$ *визначимо оператор*

$$\varphi(M) := \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_S \left(z^{-1} + Mz^{-2}\right)\varphi(z)dz + \int\limits_S F(z)\varphi''(z)dz\right),$$

де рух по одиничному колу S *відбувається проти годинникової стрілки.*

***Зауваження* 1.** Підінтегральні функції є неперервними, отже, інтеграли збіжні в сенсі Рімана. Зокрема, $\varphi(M) \in L(X)$.

Приклад. Нехай X — простір неперервних та обмежених на осі функцій зі значеннями в комплексному банаховому просторі B, норма в X є рівномірною. Розглянемо в X оператор зсуву $(Mx)(t) := x(t-1)$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in X$. Тоді оператор M задовольняє умови означення 1.

Лема 1. *Якщо* $\varphi(z) = z^n, n \in \mathbf{Z}$, *то* $\varphi(M) = M^n$.

Це твердження випливає з того, що ряд для F можна поміняти місцями з інтегралом і скористатись теорією лишків (див. [10]).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови означення* 1. *Тоді*

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_S \left(\sum_{n=-N}^{N} z^n M^{-n-1}\right)\varphi(z)dz.$$

Доведення. Використовуючи рівномірну збіжність ряду (2), інтегрування частинами, формулу суми геометричної прогресії та умову (1), маємо

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \left(z^{-1} + Mz^{-2}\right)\varphi(z)dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_S \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}\setminus\{-2,-1\},\ |n|\leqslant N} \frac{z^{n+2}M^{-n-1}}{(n+1)(n+2)}\right)\varphi''(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \left(z^{-1} + Mz^{-2}\right)\varphi(z)dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_S \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}\setminus\{-2,-1\},\ |n|\leqslant N} z^n M^{-n-1}\right)\varphi(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_S \left(\sum_{n=-N}^{N} z^n M^{-n-1}\right)\varphi(z)dz.$$

Теорема 2. *Якщо функції* φ_1, φ_2 *задовольняють умови означення* 1 *і* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$, *то в сенсі означення* 1 $(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(M) = \alpha_1\varphi_1(M) + \alpha_2\varphi_2(M)$, $(\varphi_1\varphi_2)(M) = \varphi_1(M)\varphi_2(M)$. *Якщо додатково* $\varphi_1(z) \neq 0$, $z \in S$, *то в сенсі означення* 1 $\left(\dfrac{1}{\varphi_1}\right)(M) = (\varphi_1(M))^{-1}$.

Доведення. Перша рівність перевіряється безпосередньо.

Нехай $f \in C^2(S, L(X))$. Функцію $g(t) := f(e^{it})$, $t \in \mathbf{R}$, можна розкласти в ряд Фур'є (теорію рядів Фур'є див., наприклад, у [11]). Двічі здиференціювавши цей ряд почленно, отримаємо ряд Фур'є для g''. Останній за теоремою Фейєра в середньому за Чезаро рівномірно збіжний до g''. Тому для кожного $\varepsilon > 0$ функцію f можна рівномірно наблизити з точністю ε многочленом P так, що P'' рівномірно наближає f'' з точністю ε.

Використавши таке наближення і лему 1, одержимо другу рівність у твердженні теореми. Застосувавши її до добутків $\varphi\varphi^{-1}$ і $\varphi^{-1}\varphi$, отримаємо рівності $\varphi(M)\varphi^{-1}(M) = \varphi^{-1}(M)\varphi(M) = I$.

Теорему доведено.

Наведена далі теорема показує збіг функцій від оператора, введених означенням 1, з введеними за класичним означенням Данфорда у випадку, коли φ — комплекснозначна аналітична в околі S функція, помножена на одиничний оператор.

Теорема 3. *Нехай виконано умови означення* 1 *і* $\varphi(z) = \psi(z)I$, $z \in S$, *де* ψ *— комплекснозначна функція, аналітична в околі одиничного кола* S. *Тоді оператор* $\varphi(M)$ *в сенсі означення* 1 *збігається з оператором* $\psi(M)$ *в сенсі означення Данфорда.*

Доведення. Функцію ψ можна розкласти в околі S в ряд Лорана (див. [10]), який допускає почленне диференціювання. Тому часткові суми ряду Лорана як завгодно добре рівномірно наближають ψ, до того ж їх похідні рівномірно наближають похідні ψ. Але для часткових сум ряду Лорана оператори збігаються внаслідок леми 1 та теореми 2.

Теорема 4. *Нехай виконано умови означення* 1. *Тоді оператор* $\varphi(M)$ *допускає оцінку*

$$\|\varphi(M)\| \leqslant 2\|\varphi\|_1 + 4\sqrt{\|\varphi''\|_1\|\varphi\|_1},$$

де $\|g\|_1 := (2\pi)^{-1}\|g\|_{L_1(S,L(X))}$.

Доведення. Інтегруючи частинами формулу з означення, для довільного $N \geqslant 2$ отримуємо рівність

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_S \left(\sum_{k=-N+3}^{N} z^{-k}M^{k-1}\right)\varphi(z)dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_S \left(\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{-N,\ldots,N-3\}} \frac{z^{n+2}M^{-n-1}}{(n+1)(n+2)}\right)\varphi''(z)dz\right).$$

Тоді

$$\|\varphi(M)\| \leqslant \|\varphi\|_1\,(2N-2) + \|\varphi''\|_1\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{-N,\ldots,N-3\}} \frac{1}{|(n+1)(n+2)|}\right) =$$

$$= \|\varphi\|_1\,(2N-2) + \frac{2\|\varphi''\|_1}{N-1} = U(N).$$

Підберемо N. При $\|\varphi''\|_1 \leqslant \|\varphi\|_1$ можна покласти $N = 2$. Тоді отримаємо значення $U(1) = 2\|\varphi''\|_1 + 2\|\varphi\|_1 \leqslant 2\|\varphi\|_1 + 4\sqrt{\|\varphi''\|_1\|\varphi\|_1}$. В іншому випадку покладемо $w := \sqrt{\dfrac{\|\varphi''\|_1}{\|\varphi\|_1}}$, $N := [w]+1$. Тоді $U(N) \leqslant 2(w+1)\|\varphi\|_1 + \dfrac{2\|\varphi''\|_1}{w} = 2\|\varphi\|_1 + 4\sqrt{\|\varphi''\|_1\|\varphi\|_1}$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 2.** Норму $\|\cdot\|_1$ в оцінці можна замінити на рівномірну.

3. Застосування до різницевих рівнянь. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір,

$$l_\infty(B) := \left\{ \{y_n\colon\ n\in \mathbf{Z}\} \mid y_n \in B,\ n\in\mathbf{Z},\ \|y\|_\infty := \sup_{n\in\mathbf{Z}} \|y_n\| < +\infty \right\}$$

— банахів простір обмежених послідовностей в B з рівномірною нормою. Розглянемо рівняння

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} A_k x_{n-k} = y_n, \quad n\in\mathbf{Z}, \tag{3}$$

де $\{A_k\colon\ k\in\mathbf{Z}\} \subset L(B)$, $y \in l_\infty(B)$ — відома послідовність, $x \in l_\infty(B)$ — шукана.

Розглянемо оператор зсуву $(Hy)_n := y_{n-1}$, $n\in\mathbf{Z}$, $y \in l_\infty(B)$. Оскільки $\|H^n\| = 1$, $n\in\mathbf{Z}$, то до нього застосовна наведена вище теорія при $X = l_\infty(B)$. Припустимо, що виконується умова

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{\|A_k\|}{k^2} < +\infty. \tag{4}$$

Тоді функція $\varphi(z) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} A_k z^k$, $z \in S$, належить класу $C^2(S, L(X))$. Різницеве рівняння при цьому можна записати у вигляді

$$\varphi(H)x = y.$$

Тому розв'язність рівняння зводиться до оборотності оператора $\varphi(H)$.

Відомо, що її можна встановити за допомогою теореми Бохнера – Філліпса навіть за більш слабкої умови, ніж (4), а саме $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \|A_k\| < +\infty$ (див. [12]). Проте такий підхід не дає явного вигляду оберненого оператора і не дозволяє оцінювати його.

Відомо [4], що необхідною умовою того, що рівняння (3) має єдиний розв'язок x для кожного y у просторі $l_\infty(B)$, є умова

$$\exists(\varphi(z))^{-1}, \quad z \in S. \tag{5}$$

Якщо при цьому функція $(\varphi(z))^{-1}$, $z \in S$, обмежена, то існує оператор $(\varphi^{-1})(H)$ в сенсі означення 1. За теоремою 2 він є оберненим до оператора $\varphi(H)$. Тому маємо оцінку розв'язку

$$\|x\| = \left\|(\varphi^{-1})(H)y\right\| \leqslant C\|y\|,$$

де оцінку сталої $C := \|(\varphi^{-1})(H)\|$ можна одержати за теоремою 4.

4. Наближення розв'язку рівняння з запізненням аргументу. Розглянемо різницеве рівняння

$$\frac{N}{2}(x_{n+1} - x_{n-1}) = Tx_{n-N} + y_n, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{6}$$

де $T \in L(B)$, $N \in \mathbf{N}$, яке відповідає диференціальному рівнянню з запізненням аргументу

$$x'(t) = Tx(t-1) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Нехай справджується умова

$$\sigma(T) \cap \left\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\right\} = \varnothing. \tag{8}$$

Відомо [13], що умова (8) є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння (7) мало для довільної обмеженої функції $y \in C(\mathbf{R}, B)$ єдиний обмежений розв'язок $x = x_y \in C^1(\mathbf{R}, B)$. При цьому

$$\exists L_0 > 0 \ \forall y \in C(\mathbf{R}, B)\colon \|x_y\|_\infty \leqslant L_0 \|y\|_\infty.$$

Крім того, відомо [14], що умова (8) є достатньою для того, щоб рівняння (6) при всіх непарних N, починаючи з деякого N_0, мало для довільної обмеженої послідовності y єдиний обмежений розв'язок x. Там же показано, що для парних N це невірно.

Нехай $y \in C(\mathbf{R}, B)$ — обмежена на осі функція, $\omega(y,h) := \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} \|y(t+h) - y(t)\|$, $h > 0$ — її модуль неперервності (див. [15, с. 147]). Нехай також $N \in \mathbf{N}$, $y_n := y\left(\dfrac{n}{N}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $\{u_n\colon n \in Z\}$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (6), а $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (7). Наведена далі теорема показує, з якою точністю розв'язок різницевого рівняння наближає розв'язок диференціального в залежності від гладкості функції y.

Теорема 5. *Нехай виконано умову* (8). *Тоді*

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \left\|u_n - x\left(\frac{n}{N}\right)\right\| = O\left(\sqrt{\ln N}\,\omega\left(y, \frac{1}{N}\right)\right), \quad N \to \infty, \quad N - \textit{непарне}.$$

Доведення. Покладемо

$$w_n := u_n - x\left(\frac{n}{N}\right), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Тоді, враховуючи (6), маємо

$$\frac{N}{2}(w_{n+1} - w_{n-1}) = \frac{N}{2}\left(x\left(\frac{n-1}{N}\right) - x\left(\frac{n+1}{N}\right)\right) +$$

$$+Tw_{n-N} + Tx\left(\frac{n-N}{N}\right) + y_n = Tw_{n-N} + v_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Розглянемо це рівняння як різницеве з відомою обмеженою послідовністю

$$v_n = \frac{N}{2}\left(x\left(\frac{n-1}{N}\right) - x\left(\frac{n+1}{N}\right)\right) + Tx\left(\frac{n-N}{N}\right) + y\left(\frac{n}{N}\right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

і невідомою w_n, $n \in \mathbf{Z}$. Тоді

$$\|w\|_\infty \leqslant \|(H^{-1} - H - TH^{-N})^{-1}\| \cdot \|v\|_\infty, \tag{9}$$

де $(Hx)_n := x_{n-1}$, $n \in \mathbf{Z}$, $x \in l_\infty(B)$. Оскільки з (7) випливає, що

$$x\left(\frac{n+1}{N}\right) - x\left(\frac{n-1}{N}\right) = T\int\limits_{(n-1)/N}^{(n+1)/N} x(s-1)ds + \int\limits_{(n-1)/N}^{(n+1)/N} y(s)ds, \quad n \in \mathbf{Z},$$

то маємо

$$v_n = -\frac{N}{2}T\int\limits_{(n-1)/N}^{(n+1)/N} x(s-1)ds + Tx\left(\frac{n-N}{N}\right) + y\left(\frac{n}{N}\right) - \frac{N}{2}\int\limits_{(n-1)/N}^{(n+1)/N} y(s)ds, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Звідси

$$\|v\|_\infty \leqslant \|T\|\omega\left(x, \frac{1}{N}\right) + \omega\left(y, \frac{1}{N}\right).$$

Але для довільного $h > 0$ функція $x(t+h) - x(t)$, $t \in \mathbf{R}$, є розв'язком рівняння (7), в якому функцію $y(t)$, $t \in \mathbf{R}$, замінено на $y(t+h) - y(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Тому $\omega(x,h) \leqslant \leqslant L_0\omega(y,h)$, $h > 0$, отже,

$$\|v\|_\infty \leqslant (\|T\|L_0 + 1)\omega\left(y, \frac{1}{N}\right). \tag{10}$$

Оцінимо тепер оператор $(H^{-1} - H - TH^{-N})^{-1}$, використавши теорему 4.

Позначимо

$$\varphi_N(z) := z^{-1} - z - Tz^{-N}, \quad z \in \mathbf{C}\setminus\{0\},$$

$$d := \inf\left\{|z - w| \colon z \in \sigma(T),\ w \in \left\{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\right\}\right\},$$

$$C_0 := \sup\left\{\|(T - wI)^{-1}\|\mathrm{dist}\,(w, \sigma(T)) \mid w \in \mathbf{C},\ \mathrm{dist}\,(w, \sigma(T)) \geqslant \frac{d}{2}\right\},$$

де $\mathrm{dist}\,(w, \sigma(T)) := \inf\{|z - w| \mid z \in \sigma(T)\}$.

Отримуємо

$$\varphi_N'(z) = \frac{N}{2}(-z^{-2} - 1) - TNz^{N-1},\ \varphi_N''(z) = Nz^{-3} - TN(N-1)z^{N-2}, \quad z \in S.$$

Нехай $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Тоді:

1) при $|\sin\varphi| \geqslant \dfrac{\|T\| + d}{N}$ маємо (з урахуванням непарності N)

$$\left|\frac{N}{2}z^{-N}(z^{-1} - z)\right| = N|\sin\varphi| \geqslant \|T\| + d;$$

2) при $|\sin\varphi| < \dfrac{\|T\| + d}{N}$, $\varphi_0 := \begin{cases} \varphi, & |\varphi| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \varphi - \pi, & \varphi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right], \\ \varphi + \pi, & \varphi \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right], \end{cases}$ маємо

$$\left|\left(\frac{N}{2}z^{-N}(z^{-1}-z)\right)-(-Ni\varphi_0e^{-Ni\varphi_0})\right| =$$

$$= N\left|e^{-iN\varphi}(-i\sin\varphi)+i\varphi_0e^{-Ni\varphi}e^{i(\varphi-\varphi_0)}\right| =$$

$$= N\left|\sin\varphi - e^{i(\varphi-\varphi_0)}\varphi_0\right| \leqslant \frac{N\pi^3|\sin\varphi|^3}{48} \leqslant \frac{\pi^3(\|T\|+d)^3}{48N^2} \leqslant \frac{d}{2}$$

при всіх $N \geqslant N_0$, де $N_0 \in \mathbf{N}$ є фіксованим. Тоді

$$\|\varphi_N^{-1}\|_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi(\|T\|+d)}{N}\frac{2C_0}{d} + \int\limits_{|\varphi|\leqslant\pi,\ |\sin\varphi|\geqslant(\|T\|+d)/N} \frac{C_0}{|N\sin\varphi|-\|T\|}d\varphi =$$

$$= O\left(\frac{\ln N}{N}\right), \quad N\to\infty.$$

Аналогічно

$$\|\varphi_N^{-2}\|_1 = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N\to\infty, \quad \|\varphi_N^{-3}\|_1 = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N\to\infty,$$

$$\|\varphi_N'\|_\infty = O\left(N\right), \quad N\to\infty, \quad \|\varphi_N''\|_\infty = O\left(N^2\right), \quad N\to\infty.$$

Тоді

$$\|(\varphi_N^{-1})''\|_1 = \|2(\varphi_N')^2\varphi_N^{-3} - \varphi_N''\varphi_N^{-2}\|_1 = O\left(N\right), \quad N\to\infty.$$

Звідси за теоремою 4

$$\|(\varphi_N^{-1})(H)\| = O(\sqrt{\ln N}), \quad N\to\infty.$$

Врахувавши оцінки (9) і (10), отримаємо твердження теореми.

***Зауваження* 3.** Якщо оцінювати оператор $(\varphi_N^{-1})(H)$ за допомогою операторного числення Данфорда, то будемо мати

$$\|(\varphi_N^{-1})(H)\| = \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi_N^{-1})(z)(H-zI)^{-1}dz\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\|(\varphi_N^{-1})(z)\|\varepsilon^{-1}|dz|,\ \varepsilon\in(0,1),$$

де Γ_ε — об'єднання кіл з центром у нулі з радіусами $1-\varepsilon$, $1+\varepsilon$ і протилежними напрямками обходу, норма $\|(H-zI)^{-1}\| = |1-|z||^{-1}$, $|z|\neq 1$, підраховується за означенням. Для оцінки підінтегрального виразу можна показати, що при малих $\varepsilon>0$ частина кривої $\left\{\frac{N}{2}(z^{-1}-z)\mid z\in\Gamma_\varepsilon\right\}$ близька до спіралі $\left\{ite^{it}\mid t\in\mathbf{R}\right\}$, а інша частина лежить поза кругом з центром у нулі радіуса $\|T\|+d$.

Оцінивши $\|\varphi_N^{-1}(z)\|$, $z\in\Gamma_\varepsilon$ (що технічно складніше, ніж аналогічна оцінка в теоремі), можна отримати оцінку

$$\|(\varphi_N^{-1})(H)\| = O(\ln N), \quad N\to\infty,$$

яка є слабшою, ніж в теоремі.

5. Наближення розв'язку рівняння з секторіальним операторним коефіцієнтом. Нехай оператор $T : D(T) \subset B \to B$ є секторіальним, тобто множина $D(T)$ скрізь щільна в B та існують такі сталі $a \in \mathbf{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, що для множини

$$S_{a,\varphi} := \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq a, \ |\arg(z - a)| < \varphi\}$$

виконуються умови:

1) $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists C > 0 \ \forall \lambda \in \mathbf{C} \backslash S_{a,\varphi}, \ \lambda \neq 0\colon \ \|(T - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \dfrac{C}{|\lambda - a|}$.

Властивості таких операторів та породжених ними напівгруп див., наприклад, у [17].

Позначимо через $\mathbf{L}_b$ клас усіх таких функцій $f\colon \mathbf{R} \to B$, для кожної з яких $\|f\|_\infty < +\infty$, а також існують залежні від f сталі $K = K_f > 0$, $\alpha = \alpha_f \in (0, 1]$, з якими

$$\forall t, s \in \mathbf{R}\colon \ \|f(t) - f(s)\| \leqslant K|t - s|^\alpha. \tag{11}$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = Tx(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

де $y \in \mathbf{L}_b$.

Розв'язком рівняння (12) вважатимемо функцію $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$ таку, що $\|x\|_\infty < < +\infty$ $\forall t \in \mathbf{R}$ $x(t) \in D(T)$ і задовольняється рівність (12).

Узагальненням теореми Крейна [16, с. 119] є така теорема.

Теорема 6. *Рівняння* (12) *має для кожної функції* $y \in \boldsymbol{L}_b$ *єдиний розв'язок тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(T) \cap \{it \mid t \in \mathbf{R}\} = \varnothing. \tag{13}$$

Відповідний розв'язок має вигляд

$$x(t) = -\int_t^{+\infty} e^{T(t-s)} y(s) ds, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми Крейна.

***Зауваження* 4.** З доведення цієї теореми випливає, що за умови (13) банахів простір B розбивається в пряму суму двох підпросторів, в кожному з яких диференціальне рівняння можна розглядати окремо. При цьому в одному з цих підпросторів оператор T є обмеженим і рівняння досліджується дуже просто, а в іншому оператор T секторіальний і його спектр лежить у півплощині $\mathrm{Re}\, z > 0$. Тому далі, не зменшуючи загальності, можна вважати, що в означенні секторіального оператора $a > 0$.

Доведемо тепер лему, що показує додаткові властивості знайденого розв'язку.

Лема 2. *Нехай виконується умова* (13), $y \in \boldsymbol{L}_b$ *і* x — *відповідний розв'язок рівняння* (12). *Тоді* $Tx \in \boldsymbol{L}_b$, *до того ж можна покласти* $\alpha_{Tx} = \alpha_y$.

Доведення. Будемо міркувати, як і при доведенні леми 1.28 [17, с. 610]. Маємо

$$Tx(t) = -\int\limits_t^{+\infty} Te^{T(t-s)}(y(s)-y(t))ds - y(t), \quad t\in \mathbf{R}.$$

Оскільки [17, с. 607] $\exists L_1>0\ \forall t>0\colon \|Te^{-Tt}\| \leqslant \dfrac{L_1}{t}e^{-at}$, то інтеграл абсолютно збіжний і

$$\|Tx(t)\| \leqslant \int\limits_t^{+\infty} K_y e^{-a(t-s)}ds + \|y\|_\infty = \frac{K_y}{a} + \|y\|_\infty, \quad t\in \mathbf{R}.$$

Отже, функція Tx є обмеженою.

Нехай $t\in\mathbf{R}$, $h>0$. Тоді

$$Tx(t)-Tx(t-h) = \big(y(t-h)-y(t)\big)+$$

$$+T\int\limits_t^{+\infty}(e^{T(t-h-s)}-e^{T(t-s)})(y(s)-y(t))ds+$$

$$+T\int\limits_t^{+\infty} e^{T(t-h-s)}(y(t)-y(t-h))ds + T\int\limits_{t-h}^{t} e^{T(t-h-s)}\big(y(s)-y(t-h)\big)ds =$$

$$= w_0+w_1+w_2+w_3.$$

Оцінимо отримані доданки, врахувавши оцінку [17, с. 607]

$$\exists L_2>0 \quad \forall t_1,\, t_2,\ t_2>t_1>0\colon\ \|Te^{-Tt_1}-Te^{-Tt_2}\| \leqslant \frac{L_2(t_2-t_1)}{t_1t_2}e^{-at_1}$$

і обмеженість операторної експоненти деякою сталою $L_0>0$. Маємо (далі в доведенні $\alpha := \alpha_y$)

$$\|w_0\| \leqslant K_y h^\alpha,$$

$$\|w_1\| \leqslant L_2K_y\int\limits_t^{+\infty}\frac{h}{(s-t+h)(s-t)}(s-t)^\alpha ds =$$

$$= L_2K_y\int\limits_0^{+\infty}\frac{h}{(s+h)}s^{\alpha-1}ds = L_2K_y s^\alpha\int\limits_0^{+\infty}\frac{s^{\alpha-1}}{(s+1)}ds,$$

$$\|w_2\| \leqslant \|e^{-Th}\|K_yh^\alpha \leqslant K_yL_0h^\alpha,$$

$$\|w_3\| \leqslant L_1\int\limits_{t-h}^{t}\frac{(t-s-h)^\alpha}{t-s-h}ds = L_1\int\limits_0^h(s+h)^{\alpha-1}ds = L_1h^\alpha\int\limits_0^1(s+1)^{\alpha-1}ds.$$

Отже, функція Tx гельдерова з показником степеня $\alpha=\alpha_y$.

Лему доведено.

Рівнянню (12) відповідає набір залежних від параметра $\tau > 0$ різницевих рівнянь

$$(u_{n+1} - u_{n-1}) = 2\tau(Tu_n + y(n\tau)), \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{14}$$

У роботі [8] показано, що за умови (13) рівняння (14) має для довільного $\tau > 0$ та довільної обмеженої послідовності $\{y(n\tau)\colon n \in \mathbf{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок u. Крім того, там доведено теорему, що дозволяє наблизити обмежені розв'язки диференціального рівняння (12) обмеженими розв'язками різницевих рівнянь (14) при малих $\tau > 0$.

Теорема. *Нехай* $f \in \boldsymbol{L}_b$ *і умова* (11) *виконується зі сталими* K, α. *Припустимо, що виконується умова* (13). *Якщо* x *і при кожному* $\tau > 0$ $u(\tau)$ *— єдині обмежені розв'язки відповідно диференціального рівняння* (12) *та різницевого рівняння* (14), *то для кожного* $\gamma \in (0, \alpha)$ *справджується оцінка*

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \|x(n\tau) - u_n(\tau)\| = o(\tau^\gamma), \quad \tau \to 0. \tag{15}$$

Посиленням цього результату є така теорема.

Теорема 7. *Нехай* $f \in \boldsymbol{L}_b$ *і умова* (11) *виконується зі сталими* K, α. *Припустимо, що виконується умова* (13). *Якщо* x *і при кожному* $\tau > 0$ $u(\tau)$ *— єдині обмежені розв'язки відповідно диференціального рівняння* (12) *та різницевого рівняння* (14), *то*

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \|x(n\tau) - u_n(\tau)\| = O\big(\tau^\alpha \sqrt{|\ln \tau|}\big), \quad \tau \to 0. \tag{16}$$

Доведення. Покладемо

$$w_n = w_n(\tau) := u_n(\tau) - x(n\tau), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Тоді, враховуючи (14), маємо

$$w_{n+1} - w_{n-1} = (x((n-1)\tau) - x((n+1)\tau)) +$$
$$+ 2\tau(Tw_n + Tx(n\tau) + y(n\tau)) = 2\tau Tw_n + v_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Розглянемо це рівняння як різницеве з відомою обмеженою послідовністю

$$v_n = v_n(\tau) = \big(x((n-1)\tau) - x((n+1)\tau)\big) + 2\tau(Tx(n\tau) + y(n\tau)), \quad n \in \mathbf{Z},$$

і невідомою обмеженою послідовністю $\{w_n, n \in \mathbf{Z}\}$. Тоді

$$\|w\|_\infty \leqslant \|(H^{-1} - H - 2\tau T)^{-1}\| \|v\|_\infty, \tag{17}$$

де $(Hx)_n := x_{n-1}$, $n \in \mathbf{Z}$, $x \in l_\infty(B)$. Оскільки з (12) випливає, що

$$x((n+1)\tau) - x((n-1)\tau) = 2\tau T \int\limits_{(n-1)\tau}^{(n+1)\tau} x(s)ds + 2\tau \int\limits_{(n-1)\tau}^{(n+1)\tau} y(s)ds, \quad n \in \mathbf{Z},$$

маємо

$$v_n = 2\tau Tx(n\tau) - 2\tau T \int\limits_{(n-1)\tau}^{(n+1)\tau} x(s)ds + 2\tau y(n\tau) - 2\tau \int\limits_{(n-1)\tau}^{(n+1)\tau} y(s)ds, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Звідси

$$\|v\|_\infty \leqslant 2\tau\omega(Tx,\tau) + 2\tau\omega(y,\tau) = O(\tau^{1+\alpha}), \quad \tau \to 0, \tag{18}$$

де враховано гельдеровість функції y та лему 2.

Оцінимо тепер оператор $(H^{-1} - H - 2\tau T)^{-1}$, використавши теорему 4.

Позначимо

$$\varphi_\tau(z) := z^{-1} - z - 2\tau T, \quad z \in \mathbf{C}\backslash\{0\}.$$

Маємо

$$\varphi_\tau'(z) = -z^{-2} - 1, \quad \varphi_\tau''(z) = 2z^{-3}, \quad z \in S.$$

Нехай $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Тоді

$$\|(\varphi_\tau(z))^{-1}\| \leqslant (2\tau)^{-1}\|((2\tau)^{-1}(-2i\sin\varphi) - T)^{-1}\| \leqslant (2\tau)^{-1}\frac{C}{1 + |(\tau)^{-1}\sin\varphi|}.$$

Звідси випливає, що

$$\|\varphi_\tau^{-1}\|_1 = O(\sqrt{|\ln\tau|}), \quad \tau \to 0, \quad \|\varphi_\tau^{-2}\|_1 = O(\tau^{-1}), \quad \tau \to 0,$$
$$\|\varphi_\tau^{-3}\|_1 = O(\tau^{-2}), \quad \tau \to 0,$$

крім того, функції $\varphi_\tau'(z)$, $\varphi_\tau''(z)$ обмежені на S. Тоді

$$\|(\varphi_\tau^{-1})''\|_1 = \|2(\varphi_\tau')^2\varphi_\tau^{-3} - \varphi_\tau''\varphi_\tau^{-2}\|_1 = O(\tau^{-2}), \quad \tau \to 0,$$

звідки за теоремою 4

$$\|(\varphi_\tau^{-1})(H)\| = O(\tau^{-1}\sqrt{|\ln\tau|}), \quad \tau \to 0.$$

Враховуючи оцінки (17) і (18), отримуємо твердження теореми.

Теорему доведено.

6. Висновки. В роботі запропоновано зображення для функцій від оператора зсуву у просторі абстрактних послідовностей та досліджено його властивості. За допомогою цього зображення отримано оцінку для обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння у банаховому просторі. Наведено застосування цієї оцінки до дослідження наближення обмежених розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі обмеженими розв'язками відповідних різницевих рівнянь; отримано оцінки для швидкості збіжності.

1. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и почти периодические решения разностных уравнений в банаховом пространстве // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 147 – 156.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Вища шк., 1992. – 319 с.
3. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 6. – С. 1231 – 1243.

4. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 41 – 46.
5. *Смагин В. В.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения // Мат. заметки. – 1997. – **62**, вып. 6. – С. 898 – 909.
6. *Пискарев С. И.* Аппроксимация позитивных C_0-полугрупп операторов // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 7. – С. 1245 – 1250.
7. *Макаров В. Л., Гаврилюк І. П.* Експоненціально збіжні методи паралельної дискретизації для еволюційних рівнянь першого порядку // Доп. НАН України. – 2002. – № 3. – С. 24 – 28.
8. *Городній М. Ф., Чайковський А. В.* Про наближення обмеженого розв'язку диференціального рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом // Там же. – 2002. – № 6. – С. 10 – 14.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М., 1969. – 576 с.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М., 1965. – Т. 1. – 616 с.
12. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. – 1992. – **52**, вып. 2. – С. 17 – 26.
13. *Чайковський А. В.* Про існування та єдиність обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Доп. НАН України. – 2000. – № 8. – С. 33 – 37.
14. *Чайковський А. В.* Про наближення обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувом аргументу в банаховому просторі розв'язками різницевих рівнянь // Вісн. Київ. уні-ту. Математика і механіка. – 2002. – Вип. 8. – С. 125 – 129.
15. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М., 1977. – 512 с.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М., 1970. – 536 с.
17. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

Одержано 16.12.09