УДК 519.41/47

П. П. Барышовец (Нац. авиац. ун-т, Киев),
Н. Н. Билоцкий (Нац. пед. ун-т, Киев)

О ГРУППАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ НЕДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДГРУПП

We obtain a description of finite nonprimary groups containing at most two classes of conjugated noncomplemented subgroups.

Наведено опис скінченних непримарних груп, які містять не більше двох класів спряжених недоповнюваних підгруп.

Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и $A \bigcap B = 1$. Ф. Холл [1] изучал конечные группы с дополняемыми подгруппами еще в 1937 г. Полное описание произвольных (как конечных, так и бесконечных) групп с таким свойством, получивших название вполне факторизуемых, было получено позже, в 1953 г., Н. В. Баевой [2] (см. также [3, 4]). Позже изучались группы с теми или иными системами дополняемых подгрупп (см. [5 – 7]). Естественно продолжить эти исследования в следующем направлении. Пусть K — класс сопряженных подгрупп группы G. Если подгруппа A из класса K дополняема (недополняема) в группе G, то и все подгруппы из этого класса дополняемы (недополняемы) в G. Не вполне факторизуемые группы (т. е. группы, в которых дополняемы не все подгруппы) содержат то или иное число классов сопряженных недополняемых подгрупп. Естественно было бы изучить влияние числа таких классов на строение группы, аналогично тому, как это сделано для свойства инвариантности (нормальности) в работах О. Ю. Шмидта [8, 9].

Краткое сообщение о конечных непримарных группах, содержащих не более двух классов сопряженных недополняемых подгрупп, см. в [10]. Везде ниже рассматриваются только конечные группы.

1. Предварительные результаты.

Лемма 1. *Конечные p-группы, содержащие только один класс сопряженных недополняемых подгрупп, относятся к одному из следующих типов групп*:

1) $G = \langle a \rangle$, $|a| = p^2$, *p – простое число*;

2) G — *неабелева группа порядка* p^3 *и экспоненты* p, $p > 2$;

3) G — *группа диэдра порядка* 8.

Доказательство. Если G — абелева группа, то она типа 1. Пусть G — неабелева группа. Если $|\Phi(G)| \geq p^2$, то подгруппы порядков p и p^2 из $\Phi(G)$ несопряжены и недополняемы в G. Значит, $|\Phi(G)| = p$. Поскольку подгруппа $|\Phi(G)|$ недополняема в G, подгруппы порядка $\geq p^2$, а значит, и все абелевы подгруппы непростых порядков дополняемы в G. В силу теоремы [11] G — группа типа 2 или 3 данной леммы.

Лемма доказана.

Следующая лемма вытекает из свойств группы S_4 (см. [12], а также лемму 3 [13]).

Лемма 2. *В симметрической группе* 4*-й степени* S_4 *недополняемые подгруппы образуют два класса сопряженных подгрупп.*

Действительно, если K — четверная группа Клейна в S_4, то подгруппы порядка 2 из K и элементарные абелевы подгруппы порядка 4, отличные от K, составляют два класса сопряженных недополняемых подгрупп группы S_4.

Лемма 3. *Непримарные конечные группы, содержащие не более трех классов сопряженных недополняемых подгрупп, разрешимы.*

Доказательство. Пусть G — группа, указанная в лемме. Предположим, что G — неразрешимая группа. Тогда G содержит такую подгруппу H порядка $q \cdot 2^n$, что из условия $G = HK$ следует $K = G$ [14]. Тогда подгруппы H_1 и H_2 порядков q и 2^n, а также сама подгруппа H недополняемы в G. Все эти подгруппы имеют разные порядки и, значит, несопряжены в G.

Лемма доказана.

2. Нильпотентные непримарные группы, содержащие не более двух классов сопряженных недополняемых подгрупп.

Лемма 4. *Если конечная непримарная нильпотентная группа не вполне факторизуема, то она содержит более одного класса сопряженных недополняемых подгрупп.*

Доказательство. Пусть G — конечная непримарная нильпотентная не вполне факторизуемая группа, P — ее не вполне факторизуемая силовская подгруппа (например, по числу p), а M — силовское p-дополнение G. Тогда группы $\Phi(P)$ и $\Phi(P) \cdot M$ недополняемы в G и имеют разные порядки. Значит, они не сопряжены в G.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Конечные нильпотентные непримарные группы с двумя классами сопряженных недополняемых подгрупп принадлежат одному из следующих типов групп*:

1) $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = q$, p *и* q *— различные простые числа*;

2) $G = P \times \langle b \rangle$, P *— неабелева группа порядка* p^3 *и экспоненты* p, $p > 2$, $|b| = q$, p *и* q *— различные простые числа*;

3) $G = P \times \langle b \rangle$, P *— группа диэдра порядка* 8, $|b| = q$, q *— нечетное простое число.*

Доказательство. Пусть G — абелева непримарная группа с двумя классами сопряженных недополняемых подгрупп. Поскольку G — не вполне факторизуемая группа, одна из ее силовских подгрупп, например, P — не вполне факторизуемая группа. Пусть P_1 — недополняемая подгруппа из P, а T_1 — любая подгруппа простого порядка из дополнения T подгруппы P в G. Тогда $P_1 \times T_1$ — подгруппа, недополняемая в G. Отсюда следует, что P содержит единственный класс подгрупп, недополняемых в P, а T — группа простого порядка. Применяя лемму 1, завершаем доказательство теоремы.

3. Ненильпотентные группы с одним классом сопряженных недополняемых подгрупп.

Теорема 2. *Ненильпотентная конечная группа* G *тогда и только тогда* *имеет один класс сопряженных недополняемых подгрупп, когда* G *— группа вида*

$$G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle, \quad \text{где} \quad a^2 = b^2 = c^3 = 1, \quad ac = cb, \quad bc = cab.$$

Доказательство. Пусть G — ненильпотентная группа с одним классом сопряженных недополняемых подгрупп.

Предложение 1. *В рассматриваемой группе* G *не существует двух нормальных подгрупп с тривиальным пересечением.*

Действительно, если T — произвольная подгруппа простого порядка из G, K и L — ее нормальные подгруппы с тривиальным пересечением, то T не содержится хотя бы в одной из этих подгрупп. Пусть $T \not\subset K$. Тогда подгруппа TK, а значит, и T дополняемы в G. Следовательно, группа G вполне факторизуема. Полученное противоречие доказывает предложение.

Из доказанного предложения следует, что G — прямо неразложимая группа. Вследствие полной факторизуемости конечных групп с дополняемыми подгруппами простых порядков [5] недополняемые в G подгруппы имеют простой порядок. Значит, в G дополняемы все неабелевы подгруппы (и все абелевы подгруппы непростых порядков). В силу теоремы [15] и леммы 2 настоящей работы G — дисперсивная группа. Пусть P — нормальная в G силовская подгруппа (например, по числу p), M — силовское p-дополнение в G. Если подгруппа P (подгруппа M) не вполне факторизуема, то подгруппы $\Phi(P)$ и $\Phi(P) \cdot M$ (M_1 и $P \cdot M_1$, где M — недополняемая в M подгруппа) не сопряжены и не дополняемы в G. Поскольку G — группа с одним классом сопряженных недополняемых подгрупп, силовские подгруппы группы G элементарные абелевы, а M — вполне факторизуемая группа. В силу теоремы Машке [16] и предложения 1 P — минимальный нормальный делитель группы G. Если $|P| \geq p^3$, то подгруппа порядка p^2 из P дополняема в G, например, подгруппой W. Но тогда $W \bigcap P$ — собственная подгруппа из P, нормальная в G. Если $|P| = p$, то G — вполне факторизуемая группа. Из полученного противоречия следует, что P — минимальный нормальный делитель порядка p^2 группы G.

Пусть $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G (максимальный нильпотентный нормальный делитель группы G). Централизатор подгруппы Фиттинга $F(G)$ конечной разрешимой группы G содержится в $F(G)$. В силу изложенного выше $F(G) = P$ и подгруппу M можно отождествить с некоторой подгруппой группы $GL(2, p)$ всех невырожденных линейных преобразований двумерного линейного пространства над полем порядка p. Подгруппа M при этом может оказаться либо импримитивной, либо примитивной подгруппой группы $GL(2, p)$.

Если M — импримитивная подгруппа, то две подгруппы порядка p из F сопряжены в группе G, $p > 2$ и F — силовская p-подгруппа группы G [11]. Поскольку F содержит $\dfrac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1$ подгрупп порядка p, эти подгруппы образуют не менее двух классов сопряженных недополняемых подгрупп простого порядка группы G. Это противоречит тому, что рассматриваемая группа G содержит только один класс недополняемых подгрупп.

Пусть M — примитивная подгруппа группы $GL(2, p)$. В [11] показано, что M — абелева циклическая подгруппа, порядок M либо не делится на квадрат простого числа, либо равен квадрату простого числа. Так как M индуцирует на F неприводимый автоморфизм порядка $|M|$, очевидно, в первом случае $p+1=|M|$, откуда $p=2$, $|M|=3$ и получаем группу G теоремы. Второй случай, очевидно, невозможен.

Теорема доказана.

4. Ненильпотентные группы с двумя классами сопряженных недополняемых подгрупп.

Теорема 3. *Ненильпотентные группы с двумя классами сопряженных недополняемых подгрупп принадлежат одному из следующих типов групп*:

1) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, *где* $a^2 = b^2 = c^3 = d^r = 1$, $ac = cb$, $bc = cab$, r — *простое число*, $r \neq 2, r \neq 3$;

2) $G = S_4$;

3) $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \leftthreetimes \langle a_3 \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, *где* $|a_1| = |a_2| = |a_3| = p$, $|b| = q$, p *и* q — *различные простые числа*, $p > 2$, $[a_2, a_3] = a_1$, $[a_1, b] = 1$, $a_2 b = b a_2^{\alpha}$, $a_3 b = b a_3^{\beta}$, $1 < \alpha,\ \beta < p$, $\alpha\beta \equiv 1 \pmod p$;

4) $G = M \leftthreetimes Q$, $|M| = p$, *а* Q — *либо неабелева группа порядка* q^3 *и экспоненты* q, *либо группа диэдра порядка* 8, *причем* $C_Q(M) \neq Q$ *и* $(|M|, |Q|) = 1$;

5) $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, *где* $|a_1| = |a_2| = p$, $|b| = m$, $p > 2$, $(p, m) = 1$, m *не делится на квадрат простого числа, на подгруппе* $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ *группа* $\langle b \rangle$ *и ее собственные подгруппы действуют неприводимо*;

6) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, *где* $|a| = p^2$, $|b| = q$, $a^b = a^{\alpha}$, α *принадлежит показателю* q *по модулю* p, p *и* q — *различные простые числа*;

7) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, *где* $|a| = p$, $|b| = q^2$, $C_{\langle b \rangle}(\langle a \rangle) = 1$, p *и* q — *различные простые числа*.

Доказательство. Пусть G — ненильпотентная группа с двумя классами сопряженных недополняемых подгрупп. Если G — прямо разложимая группа, то, очевидно, $G = K \times \langle c \rangle$, где $c^p = 1$ и K — ненильпотентная p'-группа с одним классом сопряженных недополняемых подгрупп.

Пусть G — прямо неразложимая группа. Вследствие полной факторизуемости конечных групп с дополняемыми подгруппами простых порядков [5] группа G содержит хотя бы один класс сопряженных недополняемых в G подгрупп простых порядков.

1. В группе G второй класс сопряженных недополняемых подгрупп состоит из абелевых подгрупп. Значит, в G дополняемы все неабелевы подгруппы.

Рассмотрим сначала случай, когда группа G содержит неабелевы силовские подгруппы. Если группа G недисперсивна, то в силу теоремы [15] и леммы 2 настоящей работы G — группа S_4. Пусть G — дисперсивная группа, содержащая неабелевы силовские подгруппы. Тогда если P — неабелева силовская подгруппа (например, по числу p), то она в группе G либо нормальна, либо нормально дополняема (лемма 6 [17]).

Нетрудно убедиться, что в первом случае дополнение M к P в G является циклической группой простого порядка $q \neq p$. Действительно, $M \simeq G/P$ — вполне факторизуемая группа. Если M_1 и M_2 — подгруппы простого и непростого порядков из M, то подгруппы $\Phi(P)$ и $\Phi(P)\cdot M_1$ и $\Phi(P)\cdot M_2$ несопряжены и недополняемы в G. Поскольку группа G содержит только два класса сопряженных недополняемых подгрупп, отсюда следует, что M — группа простого порядка $q \neq p$. С другой стороны, если $|\Phi(P)| > p$, то подгруппы X, $\Phi(P)$, $\Phi(P)\cdot M$, где X — подгруппа порядка p из $\Phi(P)$, тоже несопряжены и недополняемы в G. Значит, $|\Phi(P)| = p$. Тогда подгруппы $\Phi(P)$ и $\Phi(P)\cdot M$ несопряжены и недополняемы в G, а в P дополняемы абелевы подгруппы непростых порядков. В силу результатов работы [11] P — неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p, $p > 2$, или группа диэдра порядка 8. Так как группа диэдра порядка 8 изоморфна своей группе автоморфизмов [12, с. 106], второй случай невозможен. Если G — группа Шмидта, $G = P \leftthreetimes \langle b \rangle$, где P — неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p, $p > 2$, $|b| = q$, p и q — различные простые числа, $p > 2$, то подгруппы $\Phi(P)$, $\Phi(P)\langle b \rangle$ и $\Phi(P)\langle x \rangle$, где $x \notin \Phi(P)$, $|x| = p$, несопряжены и недополняемы в G. Тогда G — группа типа 3 доказываемой теоремы.

Пусть теперь $G = M \leftthreetimes P$, где P — неабелева силовская подгруппа по числу p. Поскольку подгруппы $L \subseteq \Phi(P)$ и $K \leftthreetimes L$, где $K \subseteq M$, $K \lhd G$ несопряжены и недополняемы в G, а группа G содержит только два класса сопряженных недополняемых подгрупп, отсюда следует, что $|\Phi(P)| = p$, а M — минимальный нормальный делитель группы G, причем $|M| = q$. Более того, в P дополняемы абелевы подгруппы непростых порядков. В силу результатов работы [11] P — неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p, $p > 2$, или группа диэдра порядка 8. Следовательно, согласно [17] G — группа типа 4 доказываемой теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда все силовские подгруппы группы G абелевы. В силу теоремы [15] и неабелевости силовских 2-подгрупп группы S_4 группа G дисперсивна. Если P — нормальная силовская подгруппа (например, по числу p) группы G, M — ее дополнение в G, то при абелевой группе M, повторяя рассуждения из доказательства леммы 10 работы [18], получаем, что P — минимальный нормальный делитель порядка p^2 группы G и группа $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $|a_1| = |a_2| = p$, $|b| = m$, $p > 2$, $(p, m) = 1$, на подгруппе $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ группа $\langle b \rangle$ и ее собственные подгруппы действуют неприводимо. Число m не делится на квадрат простого числа, иначе группа G содержит более двух классов сопряженных недополняемых подгрупп. Следовательно, группа G относится к типу 5 доказываемой теоремы. Предполагая, что M — неабелева группа, с помощью рассуждений из доказательства леммы 11 той же работы [18] приходим к противоречию с числом классов сопряженных недополняемых подгрупп.

2. Второй класс сопряженных недополняемых подгрупп группы G состоит из неабелевых подгрупп. Тогда в G дополняемы все абелевы подгруппы непростых порядков и, значит, порядок неабелевых силовских подгрупп равен кубу простого числа [11].

Предложение 2. *В рассматриваемой группе G не существует двух нормальных подгрупп с тривиальным пересечением.*

Доказательство. Пусть G — прямо неразложимая группа, содержащая только два класса сопряженных недополняемых подгрупп, состоящих соответственно из подгрупп простого порядка и неабелевых подгрупп. Пусть

$K \lhd G$ и $L \lhd G$, $K \bigcap L = 1$ и H — произвольная подгруппа простого порядка из G. Без потери общности можно считать, что K и L — минимальные нормальные делители группы G. Тогда, очевидно, $N = KL$ — абелева непримарная вполне факторизуемая группа. Если $H \subseteq N$ и, например, $H \not\subset K$, то $K \cdot N$, как абелева подгруппа непростого порядка, дополняема в G. Поскольку $K \lhd G$, отсюда следует дополняемость подгруппы H в G. Если $H \not\subset N$ и, по крайней мере, одна из подгрупп $K \cdot H$ или $L \cdot H$ абелева, то она дополняема в G. Если же подгруппы $K \cdot H$ и $L \cdot H$ обе неабелевы, то по крайней мере одна из подгрупп $K \cdot H$ или $KL \cdot H$ дополняема в G, а значит, в G дополняема и подгруппа H. Тогда G — вполне факторизуемая группа [5]. Полученное противоречие доказывает предложение 2.

Пусть $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Централизатор подгруппы Фиттинга $F(G)$ конечной разрешимой группы G содержится в $F(G)$. В силу предложения 2 группа F примарна.

Если F — неабелева группа, то F либо неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p, $p > 2$, либо группа диэдра порядка 8 [11]. Последняя, как отмечалось, изоморфна своей группе автоморфизмов [12, с. 106]. Значит, второй случай невозможен. Пусть M — дополнение к F в G. Если M_1 и M_2 — подгруппы различных порядков из M, то по крайней мере одна из подгрупп FM_1 или FM_2 дополняема в G, а значит, в F дополняема и подгруппа F'. Из полученного противоречия следует, что группа M имеет простой порядок $q \neq p$. Нетрудно убедиться, что G — группа типа 3 доказываемой теоремы.

Пусть F — абелева группа. Если F — циклическая группа непростого порядка, то, очевидно, $|F| = p^2$ и $G = F \leftthreetimes M$. Предположим, что порядок M — непростой. Поскольку F совпадает со своим централизатором в G, для нижнего слоя $\omega(F) = D$ и любых двух нетривиальных подгрупп M_1 и M_2 различных порядков из M обе подгруппы DM_1 и DM_2 неабелевы и одна из них (не входящая в класс сопряженных недополняемых неабелевых подгрупп) должна быть дополняема в G. Из полученного противоречия следует, что M — циклическая группа простого порядка $q \neq p$, а G — группа типа 6 доказываемой теоремы.

Пусть F — циклическая группа простого порядка p. Если P — силовская подгруппа группы G, то $F \subseteq Z(P)$ [16] и, значит, $P \subseteq C_G(F) = F$. Следовательно, F — силовская p-подгруппа группы G. Так как группа автоморфизмов циклической группы абелева, фактор-группа G/F абелева. Пусть M — холловская p'-подгруппа группы G. Поскольку G — не вполне факторизуемая группа, M — не вполне факторизуемая группа [4]. Значит, M содержит минимальную не вполне факторизуемую подгруппу B. Из описания таких групп [19] следует, что B — циклическая группа порядка q^2, $q \neq p$. Нетрудно убедиться, используя дополняемость в M абелевых подгрупп непростых порядков, что $M = B$ и G — группа типа 7 доказываемой теоремы.

Если F — нециклическая абелева примарная группа, то ее нижний слой $\omega(F)$ будет дополняем в G, а значит, и в F. Отсюда следует, что $\omega(F) = F$, т. е. F — элементарная абелева группа порядка p^α. Если $\alpha \geq 3$, то нетрудно показать, что F разлагается в прямое произведение подгрупп простого порядка, нормальных в G, что противоречит предложению 2. Отсюда в силу предложения 2 следует, что F — нециклическая группа порядка p^2 и, значит, $G = F \leftthreetimes M$.

Подгруппа F, как абелева подгруппа, либо неприводима, либо приводима, но не вполне приводима (в силу предложения 2). В любом случае недополняемые подгруппы простого порядка группы G содержатся в подгруппе F. Но тогда в группе $M \simeq G/F$ все подгруппы простых порядков дополняемы и, значит, она вполне факторизуема.

Подгруппа F, как абелева подгруппа Фиттинга разрешимой группы G, совпадает, как уже отмечалось, со своим централизатором в группе G, и поэтому M можно отождествить с некоторой подгруппой группы $GL(2, p)$ всех невырожденных линейных преобразований двумерного линейного пространства над полем порядка p. Подгруппа M при этом может оказаться либо импримитивной, либо примитивной подгруппой группы $GL(2, p)$.

Если M — импримитивная подгруппа, то две подгруппы порядка p из F сопряжены в группе G, $p > 2$ и F — силовская p-подгруппа группы G [11]. Поскольку F содержит $\dfrac{p^2-1}{p-1} = p+1$ подгрупп порядка p, эти подгруппы образуют не менее двух классов сопряженных недополняемых подгрупп простого порядка группы G. Это противоречит тому, что в рассматриваемой группе G один из таких классов состоит из неабелевых подгрупп.

Пусть M — примитивная подгруппа группы $GL(2, p)$. В [11] показано, что F — силовская p-подгруппа группы G, M — абелева циклическая подгруппа, порядок M либо не делится на квадрат простого числа, либо равен квадрату простого числа. Так как M индуцирует на F неприводимый автоморфизм порядка $|M|$, то, очевидно, в первом случае в группе G дополняемы все неабелевы подгруппы, что противоречит выбору п. 2. Пусть $|M| = q^2$, где q — простое число. Тогда, очевидно, $p + 1 = q^2$, откуда $q = 2$, $p = 3$ и $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rightthreetimes \langle c \rangle$, где $a^3 = b^3 = c^4 = 1$, c индуцирует в $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ неприводимый автоморфизм порядка 4. Несопряженные подгруппы порядков 3, 2 и 18 в группе G недополняемы.

Теорема доказана.

1. *Hall Ph.* Complemented groups // J. London Math.. Soc. – 1937. – **12**. – P. 201 – 204.
2. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. – **92**, № 5. – С. 877 – 880.
3. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**. – С. 273 – 292.
4. *Черникова Н. В.* К основной теореме о вполне факторизуемых группах // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 49 – 58.
5. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Уч. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**. – С. 15 – 31.
6. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб. – 1954. – **35**. – С. 93 – 128.
7. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193 – 209.
8. *Шмидт О. Ю.* Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп // Мат. сб. – 1926. – **33**. – С. 161 – 172.
9. *Шмидт О. Ю.* Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп // Труды семинара по теории групп. – 1938. – С. 7 – 26.
10. *Барышовец П. П., Билоцкий Н. Н.* О группах с малым числом классов сопряженных недополняемых подгрупп // Укр. мат. конгр. - 2009: Тез. сообщ. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2009.
11. *Зайцев Д. И., Зуб О. Н.* Группы с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков // Группы с заданными свойствами подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 105 – 126.

12. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
13. *Зуб О. Н.* Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 134 – 158.
14. *Беркович Я. Г.* Строение группы и строение ее подгрупп // Докл. АН СССР. – 1968. – **179**, № 1. – С. 13 – 16.
15. *Барышовец П. П.* О конечных неабелевых группах с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 733 – 737.
16. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I. – Berlin: Springer, 1967. – 793 S.
17. *Барышовец П. П.* Конечные ненильпотентные группы, в которых все неабелевы подгруппы дополняемы // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 2. – С.147 – 153.
18. *Барышовец П. П.* Об одном классе конечных групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Там же. – 1981. – **33**, № 3. – С. 291 – 296.
19. *Маланьина Г. А., Хлебутина В. И., Шевцов Г. С.* Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы // Мат. заметки. – 1972. – **12**, № 2. – С. 157 – 162.

Получено 09.11.09,
после доработки — 30.07.10