УДК 517.5

О. Ф. Герус (Житомир. держ. ун-т)

ОЦІНКА МОДУЛЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ КВАТЕРНІОННОГО СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛА КОШІ

We establish an upper estimate for the continuity module of the quaternion singular Cauchy integral in terms of the continuity module of integrand and a metric characteristic of a curve.

Установлена верхняя оценка модуля непрерывности кватернионного сингулярного интеграла Коши через модуль непрерывности подынтегральной функции и метрическую характеристику кривой.

1. Вступ. А. Зигмунд [1] уперше встановив оцінку модуля неперервності тригонометрично спряженої функції на прямій, що рівносильна оцінці модуля неперервності сингулярного інтеграла Коші на колі. З цієї оцінки, зокрема, випливає теорема Племеля – Привалова про інваріантність класів Гельдера відносно сингулярного інтеграла Коші. Оцінка А. Зигмунда узагальнювалась на більш широкі класи кривих у роботах Л. Г. Магнарадзе [2, 3], А. А. Бабаєва та В. В. Салаєва [4 – 6], П. М. Тамразова [7, 8], О. Ф. Геруса [9 – 11], Т. С. Салімова [12], Є. М. Динькіна [13]. Зокрема, з'ясувалось, що найбільш широким класом кривих (див. [6, 9]), для яких вона має такий же вигляд, як і на колі, є клас регулярних кривих (у яких міра частини кривої, що потрапляє в круг, не перевищує сталої, помноженої на радіус круга). На більш загальних кривих (див. [6, 9 – 13]) мажоранта погіршується і починає залежати ще і від кривої.

В роботі [14] розглянуто узагальнення інтеграла типу Коші в теорії так званих α-гіперголоморфних функцій, які діють з простору $\mathbb{R}^2$, наділеного певною структурою кватерніонного множення, у алгебру комплексних кватерніонів. Одержано формули для межових значень такого інтеграла на замкнених кусково-ляпуновських кривих та теорему Племеля – Привалова для відповідного сингулярного інтеграла, через який виражаються межові значення. В роботі [15] доведено аналогічні формули для замкнених жорданових спрямлюваних кривих. Метою даної роботи є встановлення оцінки модуля неперервності відповідного сингулярного інтеграла.

2. Кватерніони. Кватерніонне узагальнення інтеграла типу Коші. Позначимо через $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ та $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ відповідно алгебри дійсних та комплексних кватерніонів, тобто таких, що подаються у вигляді $a = \sum_{k=0}^{3} a_k \boldsymbol{i}_k$, де $\{a_k\}_{k=0}^{3} \subset \mathbb{R}$ для дійсних кватерніонів і $\{a_k\}_{k=0}^{3} \subset \mathbb{C}$ для комплексних; $\boldsymbol{i}_0 = 1$, а $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ — уявні одиниці з правилом множення $\boldsymbol{i}_1^2 = \boldsymbol{i}_2^2 = \boldsymbol{i}_3^2 = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 = -1$; комплексну уявну одиницю позначатимемо через i. $\mathbb{H}$ є некомутативною асоціативною алгеброю над полем дійсних чисел, що не має дільників нуля, $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — некомутативною асоціативною алгеброю над полем комплексних чисел, що має дільники нуля.

Під модулем комплексного кватерніона розумітимемо його евклідову норму $|a| = \|a\|_{\mathbb{R}^8}$. Для дійсних кватерніонів a, b виконуються рівності $|ab| = |a||b|$, $|a|^2 = a\bar{a} = \bar{a}a$, де $\bar{a} := a_0 - \sum_{k=1}^{3} a_k \boldsymbol{i}_k$ — спряжений кватерніон. Для комплексних кватерніонів мають місце співвідношення $|a|^2 \not\equiv a\bar{a}$ та

$$|ab| \le \sqrt{2}\,|a||b| \tag{1}$$

(див. лему 2.1 з роботи [15]).

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, $z := x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2$, $\zeta := \xi\boldsymbol{i}_1 + \eta\boldsymbol{i}_2$ — дійсні кватерніони, які містяться в евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$, наділеному додатковою структурою кватерніонного множення, $H_n^{(p)}$ — функції Ганкеля роду $p \in \{1; 2\}$ і порядку $n \in \{0; 1; 2\}$ (див. [16]). Позначимо

$$\mathcal{E}_\alpha(z) := \begin{cases} (-1)^p \dfrac{i}{4} H_0^{(p)}(\alpha|z|) & \text{при } \alpha \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln|z| & \text{при } \alpha = 0, \end{cases}$$

де

$$p = \begin{cases} 1 & \text{при } \operatorname{Im}(\alpha) > 0 \quad \text{або } \alpha > 0, \\ 2 & \text{при } \operatorname{Im}(\alpha) < 0 \quad \text{або } \alpha < 0. \end{cases}$$

Відомо (див. наприклад, [17]), що функція $\mathcal{E}_\alpha$ є фундаментальним розв'язком оператора Гельмгольца $\Delta_{\alpha^2} := \Delta_{\mathbb{R}^2} + M^{\alpha^2}$, де $\Delta_{\mathbb{R}^2} = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, і M^a — оператор множення на $a \in \mathbb{C}$.

Кватерніонним ядром Коші K_α називається фундаментальний розв'язок оператора ${}_\alpha\partial := \partial_1 \circ M^{\boldsymbol{i}_1} + \partial_2 \circ M^{\boldsymbol{i}_2} + M^\alpha$ подібно до того, як класичне ядро Коші є фундаментальним розв'язком оператора Коші – Рімана $\overline{\partial} := \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$. Завдяки факторизації оператора Гельмгольца (див. [18, 15])

$$\Delta_{\alpha^2} = -{}_\alpha\partial \circ {}_{-\alpha}\partial$$

маємо

$$K_\alpha(z) = -{}_{-\alpha}\partial[\mathcal{E}_\alpha](z),$$

звідки отримуємо

$$K_\alpha(z) = \begin{cases} (-1)^p \dfrac{i\alpha}{4}\left(H_1^{(p)}(\alpha|z|)\dfrac{z}{|z|} + H_0^{(p)}(\alpha|z|)\right) & \text{при } \alpha \neq 0, \\ -\dfrac{z}{2\pi|z|^2} & \text{при } \alpha = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Функції Ганкеля $H_0^{(p)}(t)$, $H_1^{(p)}(t)$ розвиваються в ряди таким чином (див. [16]):

$$H_0^{(p)}(t) = \left(1 - (-1)^p \frac{2i}{\pi}\left(\ln\frac{t}{2} + \boldsymbol{C}\right)\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} +$$

$$+ \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+p} t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}, \tag{3}$$

$$H_1^{(p)}(t) = \left(1 - (-1)^p \frac{2i}{\pi}\left(\ln\frac{t}{2} + \boldsymbol{C}\right)\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{2^{2k+1}\, k!\,(k+1)!} +$$

$$+ (-1)^p \left(\frac{2i}{\pi t} + \frac{it}{2\pi}\right) + \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+p}\, t^{2k+1}}{2^{2k+1}\, k!\,(k+1)!} \left(\sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}\right), \tag{4}$$

де $\boldsymbol{C}$ — стала Ейлера.

Для замкненої жорданової спрямлюваної кривої $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ і неперервної функції $f \colon \Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ кватерніонний інтеграл типу Коші визначається формулою (див. [15])

$$\Phi_\alpha[f](z) := \int_\Gamma K_\alpha(\zeta - z)\,\sigma\, f(\zeta), \quad z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma,$$

де $\sigma := d\eta \boldsymbol{i}_1 - d\xi \boldsymbol{i}_2$.

3. Кватерніонний сингулярний інтеграл Коші. Нехай $\delta > 0$,

$$\omega_\Gamma(f, \delta) := \sup_{\substack{|z_1 - z_2| \le \delta \\ \{z_1; z_2\} \subset \Gamma}} \left| f(z_1) - f(z_2) \right|$$

— модуль неперервності функції f на Γ,

$$\Omega_\Gamma(f, a, b) := \begin{cases} \sup\limits_{a \le t \le b} \dfrac{\omega_\Gamma(f, t)}{t} & \text{при } 0 < a \le b, \\ \Omega_\Gamma(f, b, b) & \text{при } 0 < b < a, \end{cases}$$

$\Gamma_{z,\delta} := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| \le \delta\}$, $\theta_z(\delta) := \operatorname{mes} \Gamma_{z,\delta}$ — криволінійна міра Лебега множини $\Gamma_{z,\delta}$ (див. [6]),

$$\Theta(z, \delta) := \frac{\delta^2}{\theta_z(4\delta) - \theta_z(\delta)}.$$

Об'єктом дослідження в даній роботі є сингулярний інтеграл

$$F_\alpha[f](t) := \lim_{\delta \to 0} \int_{\Gamma \backslash \Gamma_{t,\delta}} K_\alpha(\zeta - t)\, \sigma\big(f(\zeta) - f(t)\big), \quad t \in \Gamma,$$

з яким пов'язане існування межових значень інтеграла типу Коші Φ_α і в термінах якого виражаються ці значення (див. теорему 3.3 роботи [15]).

Далі позначатимемо через $c(\cdot), \ldots, c(\cdot, \ldots, \cdot)$ додатні сталі (можливо різні), які залежать лише від аргументів у дужках. Символом c без аргументів позначатимемо абсолютні сталі.

Теорема. *Нехай функція* $f \colon \Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *задовольняє умови*

$$\sup_{z \in \Gamma} \int_0^d \Omega_\Gamma\big(f, \Theta(z, x), x\big)\, dx < +\infty, \tag{5}$$

$$\sup_{z \in \Gamma} \int_0^d |\ln x|\, \omega_\Gamma(f, x)\, d\theta_z(x) < +\infty. \tag{6}$$

Тоді інтеграл $F_\alpha[f]$ *існує в кожній точці кривої* Γ *і правильною є оцінка*

$$\omega_\Gamma(F_\alpha[f],\delta) \le c \sup_{z\in\Gamma} \int_0^{2d} \Omega_\Gamma(f,\Theta(z,x),x) \frac{dx}{1+\dfrac{x}{\delta}} +$$

$$+ c(\alpha) \sup_{z\in\Gamma} \int_0^d \frac{|\ln x|\,\omega_\Gamma(f,x)}{1+\dfrac{\omega_\Gamma(f,x)}{\omega_\Gamma(f,4\delta)}} d\theta_z(x) + c(\alpha)\delta \sup_{z\in\Gamma} \int_{3\delta}^d \frac{\omega_\Gamma(f,x)}{x} d\theta_z(x), \qquad (7)$$

де d *— діаметр кривої* Γ.

Доведення. Завдяки формулам (2) – (4) ядро Коші K_α можна записати у вигляді

$$K_\alpha(z) = -\frac{z}{2\pi|z|^2} + \frac{\alpha}{2\pi}\ln|z| + \tilde{K}_\alpha(z), \qquad (8)$$

де $\tilde{K}_\alpha$ — неперервна функція, що дорівнює нулю при $\alpha = 0$. Тому $F_\alpha = F + L_\alpha + \tilde{F}_\alpha$, де

$$F[f](t) := -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\zeta - t}{|\zeta - t|^2}\,\sigma(f(\zeta) - f(t)),$$

$$L_\alpha[f](t) := \frac{\alpha}{2\pi}\int_\Gamma \ln|\zeta - t|\;\sigma(f(\zeta) - f(t)),$$

$$\tilde{F}_\alpha[f](t) := \int_\Gamma \tilde{K}_\alpha(\zeta - t)\,\sigma(f(\zeta) - f(t)), \quad t \in \Gamma.$$

Згідно з означенням модуля неперервності маємо

$$\omega_\Gamma(F_\alpha[f],\delta) \le \omega_\Gamma(F[f],\delta) + \omega_\Gamma(L_\alpha[f],\delta) + \omega_\Gamma(\tilde{F}_\alpha[f],\delta).$$

Інтеграл $F[f]$ зводиться до вигляду

$$F[f](t) = \frac{\boldsymbol{i}_1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta} - \tilde{t}}\,\boldsymbol{i}_2\big(f(\tilde{\zeta}) - f(\tilde{t})\big), \qquad (9)$$

де $\tilde{\zeta} = \xi + \eta\boldsymbol{i}_3$, $\tilde{t} = \nu + \tau\boldsymbol{i}_3$. Розщепивши функцію f на компоненти, отримаємо чотири комплексних інтеграли, в яких $\boldsymbol{i}_3$ відіграє роль уявної одиниці. Існування цих інтегралів випливає з умови (5) за теоремою 1 роботи [11]. Застосувавши до них оцінку (2) з роботи [11], одержимо

$$\omega_\Gamma(F[f],\delta) \le c \sup_{z\in\Gamma} \int_0^{2d} \Omega_\Gamma(f,\Theta(z,x),x) \frac{dx}{1+\dfrac{x}{\delta}}. \qquad (10)$$

Існування інтеграла $L_\alpha[f]$ випливає з умови (6) аналогічно існуванню інтеграла вигляду (9), доведеному в роботі [11]. Оцінимо $\omega_\Gamma(L_\alpha[f],\delta)$. Нехай $\{t_1; t_2\} \subset \Gamma$, $|t_1 - t_2| \le \delta$. Тоді

$$|L_\alpha[f](t_1) - L_\alpha[f](t_2)|\,\frac{2\pi}{|\alpha|} \le \left|\int_{\Gamma_{t_1,3\delta}} \ln|\zeta - t_1|\,\sigma\big(f(\zeta) - f(t_1)\big)\right| +$$

$$+ \left|\int_{\Gamma_{t_1,3\delta}} \ln|\zeta - t_2|\,\sigma\big(f(\zeta) - f(t_2)\big)\right| + \left|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{t_1,3\delta}} \ln\frac{|\zeta - t_1|}{|\zeta - t_2|}\,\sigma\big(f(\zeta) - f(t_1)\big)\right| +$$

$$+ \left|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{t_1,3\delta}} \ln|\zeta - t_2|\,\sigma\big(f(t_2) - f(t_1)\big)\right| =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \qquad (11)$$

Враховуючи оцінку (1), маємо

$$I_1 \le \sqrt{2}\int_{\Gamma_{t_1,3\delta}} \big|\ln|\zeta - t_1|\big|\,|f(\zeta) - f(t_1)|\,|d\zeta| \le$$

$$\le \sqrt{2}\int_0^{\min\{3\delta;d\}} |\ln x|\,\omega_\Gamma(f, x)\,d\theta_{t_1}(x), \qquad (12)$$

$$I_2 \le \sqrt{2}\int_0^{\min\{4\delta;d\}} |\ln x|\,\omega_\Gamma(f, x)\,d\theta_{t_2}(x). \qquad (13)$$

Завдяки нерівності

$$\left|\ln\frac{|\zeta - t_1|}{|\zeta - t_2|}\right| \le \frac{3\delta}{|\zeta - t_1|},$$

яка виконується для $\zeta \in \Gamma\setminus\Gamma_{t_1,3\delta}$, отримуємо

$$I_3 \le 3\sqrt{2}\delta\int_{3\delta}^{d} \frac{\omega_\Gamma(f, x)}{x}\,d\theta_{t_1}(x), \qquad (14)$$

$$I_4 \le \sqrt{2}\,\omega_\Gamma(f, \delta)\int_{2\delta}^{d} |\ln x|\,d\theta_{t_2}(x). \qquad (15)$$

З нерівностей (11) – (15) випливає

$$\omega_\Gamma\big(L_\alpha[f], \delta\big) \le \frac{3\sqrt{2}|\alpha|}{\pi}\sup_{z\in\Gamma}\int_0^d \frac{|\ln x|\,\omega_\Gamma(f, x)}{1 + \dfrac{\omega_\Gamma(f, x)}{\omega_\Gamma(f, 4\delta)}}\,d\theta_z(x) +$$

$$+ \frac{3\sqrt{2}|\alpha|}{2\pi}\,\delta\sup_{z\in\Gamma}\int_0^d \frac{\omega_\Gamma(f, x)}{x}\,d\theta_z(x). \qquad (16)$$

Інтеграл $\tilde{F}_\alpha[f]$ існує завдяки неперервності підінтегральної функції. З формул (2) – (4), (8) випливає зображення $\tilde{K}_\alpha(\zeta - t) = c(\alpha) + \ln|\zeta - t|\varphi\big(|\zeta - t|\big)$, де функція φ є неперервною на всій площині (після доозначення $\varphi(0) =$

= 0). Тому $\omega_\Gamma\left(\tilde{F}_\alpha[f],\,\delta\right)$ оцінюється тією ж мажорантою, що і $\omega_\Gamma\left(L_\alpha[f],\,\delta\right)$. Таким чином, нерівність (7) випливає з оцінок (10), (16).

Теорему доведено.

Означення. *Замкнена жорданова спрямлювана крива* Γ *називається регулярною або* K*-регулярною, якщо існує така додатна стала* K, *що для всіх* $z \in \Gamma$ *і всіх* $\delta > 0$ *виконується умова* $\theta_z(\delta) \le K\delta$.

***Наслідок* 1.** *Нехай* Γ — K*-регулярна крива і функція* $f:\Gamma \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *задовольняє умову*

$$\int_0^d \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x}\,dx \;<\; +\infty .$$

Тоді інтеграл $F_\alpha[f]$ *існує в кожній точці кривої* Γ *і правильною є оцінка*

$$\omega_\Gamma(F_\alpha,\,\delta) \;\le\; c(K,\,d,\,\alpha)\int_0^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}dx . \tag{17}$$

Доведення. З монотонності модуля неперервності та означення K-регулярної кривої випливає

$$\Omega_\Gamma\left(f,\,\Theta(z,\,x),\,x\right) \;\le\; \frac{\theta_z(4x)-\theta_z(x)}{x^2}\,\omega_\Gamma(f,\,x) \;\le\; 4K\,\frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x}. \tag{18}$$

Використовуючи інтегрування частинами та монотонність функцій $\omega_\Gamma(f,\,x)$, $\theta_z(x)$, отримуємо

$$\delta\int_{3\delta}^{d} \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x}\,d\theta_z(x) \;\le\; 2\delta\int_{3\delta}^{d}\int_{x}^{2x} \frac{\omega_\Gamma(f,\,t)}{t}\,dt\,d\theta_z(x) \;\le$$

$$\le\; 2\delta\int_{3\delta}^{2d} \frac{\theta_z(x)\,\omega_\Gamma(f,\,x)}{x^2}\,dx \;\le\; 8\,Kd\int_0^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}\,dx . \tag{19}$$

Оцінимо інтеграл (13) (інтеграл (12) оцінюється аналогічно). Знову застосовуючи інтегрування частинами та монотонність функцій $\omega_\Gamma(f,\,x)$, $\theta_z(x)$, при умові $4\delta < 1 \le 2d$ маємо

$$\int_0^{\min\{4\delta;d\}} \left|\ln x\right|\omega_\Gamma(f,\,x)\,d\theta_{t_2}(x) \;\le\; \int_0^{4\delta}\int_x^{1} \frac{\omega_\Gamma(f,\,t)}{t}\,dt\,d\theta_{t_2}(x) \;\le$$

$$\le\; \int_0^{4\delta} \frac{\theta_{t_2}(x)\,\omega_\Gamma(f,\,x)}{x}\,dx \;+\; \theta_{t_2}(4\delta)\int_{4\delta}^{1} \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x}\,dx \;\le\; 8K\int_0^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}\,dx . \tag{20}$$

А якщо $4\delta < 2d \le 1$, то

$$\int_0^{\min\{4\delta;d\}} \left|\ln x\right|\omega_\Gamma(f,\,x)\,d\theta_{t_2}(x) \;\le\; \int_0^{4\delta}\int_x^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f,\,t)}{t}\,dt\,d\theta_{t_2}(x) \;+$$

$$+\ \left|\ln 2d\right| \int\limits_0^{4\delta} \omega_\Gamma(f,\,x)\,d\theta_{t_2}(x) \ \le\ 8K \int\limits_0^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}\,dx\ +$$

$$+\ 16\,K\left|\ln 2d\right|\delta^2\,\omega_\Gamma(f,\,4\delta)\ \le\ c(K,\,d)\int\limits_0^{2d} \frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}\,dx\,. \qquad (21)$$

Оцінимо другий доданок у нерівності (14). Нехай $2\delta < 1 < d$. Застосовуючи інтегрування частинами, одержуємо

$$\omega_\Gamma(f,\,\delta)\int\limits_{2\delta}^{d}\left|\ln x\right|d\theta_{t_2}(x)\ =\ \omega_\Gamma(f,\,\delta)\left(\int\limits_{2\delta}^{1}\int\limits_{x}^{1}\frac{dt}{t}\,d\theta_{t_2}(x) + \int\limits_{1}^{d}\int\limits_{1}^{x}\frac{dt}{t}\,d\theta_{t_2}(\delta)\right)\ \le$$

$$\le\ (2K + Kd\,\ln d)\,\omega_\Gamma(f,\,\delta)\ \le\ 4K(2 + d\,\ln d)\int\limits_0^{2d}\frac{\omega_\Gamma(f,\,x)}{x\left(1+\dfrac{x}{\delta}\right)}\,dx\,. \qquad (22)$$

У випадку $2\delta < d < 1$ міркування аналогічні і мажоранта міститиме перед знаком інтеграла лише множник $8K$.

Оцінка (17) випливає з нерівностей (10) – (14), (18) – (22).

Наслідок доведено.

Позначимо

$$H_\mu(\Gamma)\ :=\ \left\{f:\Gamma\to\mathbb{H}(\mathbb{C}):\omega_\Gamma(f,\,\delta)=O(\delta^\mu),\ \delta\to 0\right\}.$$

З попереднього наслідку очевидним чином випливає наступне твердження, відоме як теорема Племеля – Привалова (у випадку, коли Γ — кусково-ляпуновська крива, див. [14]).

Наслідок 2. *Нехай* Γ *— K-регулярна крива,* $0 < \mu < 1$ *і* $f \in H_\mu(\Gamma)$. *Тоді інтеграл* $F_\alpha[\,f\,]$ *існує в кожній точці кривої* Γ *і* $F_\alpha[\,f\,] \in H_\mu(\Gamma)$.

1. *Zygmund A.* Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la s'erie de Fourier // Pr. mat.-fiz. – 1924. – **33**. – P. 125 – 132.
2. *Магнарадзе Л. Г.* Об одном обобщении теоремы Племеля – Привалова // Сообщ. АН ГССР. – 1947. – **8**, № 8. – С. 509 – 516.
3. *Магнарадзе Л. Г.* Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применении к некоторым граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям // Докл. АН СССР. – 1949. – **68**, № 4. – С. 657 – 660.
4. *Бабаев А. А.* Об особом интеграле с непрерывной плотностью // Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. и хим. наук. – 1965. – № 5. – С. 11 – 28.
5. *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Одномерный сингулярный оператор с непрерывной плотностью по замкнутой кривой // Докл. АН СССР. – 1973. – **209**, № 6. – С. 1257 – 1260.
6. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 365 – 380.
7. *Тамразов П. М.* Об ограниченных голоморфных функциях в комплексной области // 3-й съезд болг. матем. Резюмета на докладите III конгрес на Болгарските математици, ч. 1. – Варна, 1972. – С. 186 – 187.
8. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 272 с.
9. *Герус О. Ф.* Конечно-разностные гладкости интегралов типа Коши // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 5. – С. 642 – 646.

10. *Герус О. Ф.* Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши // Там же. – 1978. – **30**, № 5. – С. 594 – 601.
11. *Герус О. Ф.* Оценка модуля непрерывности интеграла типа Коши в области и на ее границе // Там же. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1321 – 1328.
12. *Салимов Т. С.* Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой // Науч. труды МВ и ССО АзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – № 5. – С. 59 – 75.
13. *Дынькин Е. М.* Гладкость интегралов типа Коши // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1979. – **92**. – С. 115 – 133.
14. *Gerus O., Schneider B., Shapiro M.* On boundary properties of α-hyperholomorphic functions in domains of $\mathbb{R}^2$ with the piece-wise Liapunov boundary // Progress in Analysis: Proc. 3rd Int. ISAAC Congr., Berlin, Germany, 20 – 25 August 2001. – World Sci., 2003. – P. 375 – 382.
15. *Gerus O. F., Shapiro M. V.* On a Gauchy-type integral related to the Helmholtz operator in the plane // Bol. Soc. mat. Mexicana. – 2004. – **10**, № 1. – P. 63 – 82.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
17. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
18. *Rocha-Chávez R., Shapiro M. V., Tovar L. M.* On the Hilbert operator for α-hyperholomorphic function theory in $\mathbb{R}^2$ // Complex Variables Theory Appl. – 2000. – **43**, № 1. – P. 1 – 28.

Одержано 01.06.10