

РЕГУЛЯРНІ ОРТОСКАЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗШИРЕНИХ ГРАФІВ ДИНКІНА \widetilde{E}_6 І \widetilde{E}_7 ТА *-АЛГЕБР, АСОЦІЙОВАНИХ З НИМИ

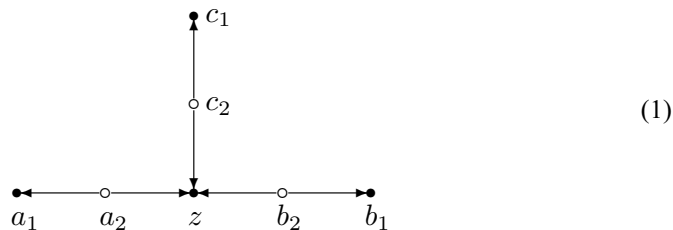
We obtain a classification of regular orthoscalar representations of the extended Dynkin graphs \widetilde{E}_6 and \widetilde{E}_7 with special character and of *-algebras associated with them up to the unitary equivalence.

Получена классификация неразложимых ортоскалярных представлений расширенных графов Динкина \widetilde{E}_6 и \widetilde{E}_7 со специальным характером и *-алгебр, ассоциированных с ними, с точностью до унитарной эквивалентности.

1. Вступ. Ця робота є продовженням роботи [1], позначення і методи з якої ми в подальшому використовуємо. В [1] одержано класифікацію регулярних ортоскалярних зображень розширеного графа Динкіна \widetilde{E}_8 зі спеціальним характером $\delta_{\widetilde{E}_8}$, з її допомогою описано трійки операторів A, B, C , спектри яких містяться у множинах $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 3\}$ відповідно і для яких $A + B + C = 6I$, або, в інших термінах, *-зображення алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_8})$. Класифікацію нерозкладних *-зображень алгебр, що асоційовані з розширеними графами Динкіна $\widetilde{D}_4, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7$, алгебр $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{D}_4}), \mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_6}), \mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_7})$ наведено в [2–4].

Використавши результати роботи [5], ми одержимо класифікацію нерозкладних ортоскалярних зображень графів \widetilde{E}_6 і \widetilde{E}_7 зі спеціальними характерами $\delta_{\widetilde{E}_6}$ і $\delta_{\widetilde{E}_7}$ відповідно і, як наслідок, іншими методами, результати робіт [3, 4].

2. Регулярні ортоскалярні зображення графа \widetilde{E}_6 і асоційованої з ним *-алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_6})$. Ортоскалярні *-зображення графа \widetilde{E}_6 збігаються (див. [5]) з *-зображеннями колчана $Q_{\widetilde{E}_6}$



Знайдемо всі його регулярні нерозкладні зображення в категорії гільбертових просторів.

Спочатку знайдемо розмірності, в яких існують регулярні нерозкладні зображен-

ня. Мінімальний уявний додатний корінь для $\widetilde{E}_6 \in \delta_{\widetilde{E}_6} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$

(координати вектора $\delta_{\widetilde{E}_6}$ розташовано у відповідності з вершинами графа в (1)).

Форма Тітса для $Q_{\widetilde{E}_6}$ має вигляд

$$q(x) = x_{a_1}^2 + x_{a_2}^2 + x_{b_1}^2 + x_{b_2}^2 + x_{c_1}^2 + x_{c_2}^2 + x_z^2 - x_{a_1}x_{a_2} - x_{a_2}x_z - x_{b_1}x_{b_2} - x_{b_2}x_z - x_{c_1}x_{c_2} - x_{c_2}x_z,$$

лінійна форма

$$L_{\tilde{E}_6}(x) = x_{a_1} + x_{b_1} + x_{c_1} + 3x_z - 2x_{a_2} - 2x_{b_2} - 2x_{c_2}.$$

Крім розмірності $\delta_{\tilde{E}_6}$ (уявний корінь графа), всі інші розмірності d нерозкладних регулярних зображень є дійсними коренями графа і задовольняють (див. [5]) систему

$$\begin{aligned} q(d) &= 1, \\ L_{\tilde{E}_6}(d) &= 0, \\ d &\leq \delta_{\tilde{E}_6}. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему (2) можна розв'язати безпосереднім перебором. Розв'язки наведено у таблиці.

χ	$d^{(1)}$	$d^{(2)}$	$d^{(3)}$	$d^{(4)}$	$d^{(5)}$	$d^{(6)}$	$d^{(7)}$	$d^{(8)}$	$d^{(9)}$	$d^{(10)}$	$d^{(11)}$	$d^{(12)}$	$d^{(13)}$	$d^{(14)}$
a_1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
a_2	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
b_1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
b_2	1	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	1	1
c_1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
c_2	1	0	1	1	1	0	1	1	2	1	2	1	1	1
z	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2

Використовуючи відбиття Кокстера (див. [1]), можна відсіяти ті розмірності з таблиці, яким відповідають розкладні зображення. Залишаються (крім $\delta_{\tilde{E}_6}$) розмірності $d^{(1)} - d^{(8)}$.

Зображення колчана $Q_{\tilde{E}_6}$ задається блочною матрицею T , рядки якої занумеровано непарними вершинами c_1, b_1, a_1, z , а стовпчики — парними вершинами в порядку a_2, b_2, c_2 . Таким чином,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix},$$

де $A_1 = T_{a_1, a_2}$, $B_1 = T_{b_1, b_2}$, $C_1 = T_{c_1, c_2}$, $A_2 = T_{z, a_2}$, $B_2 = T_{z, b_2}$, $C_2 = T_{z, c_2}$. Ортогональність зображення T з характером $\delta_{\tilde{E}_6}$ означає, що виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} c_1) \quad A_1 A_1^* &= I_{a_1}, & c_4) \quad A_2 A_2^* + B_2 B_2^* + C_2 C_2^* &= 3I_z, \\ c_2) \quad B_1 B_1^* &= I_{b_1}, & c_5) \quad A_1^* A_1 + A_2^* A_2 &= 2I_{a_2}, \\ c_3) \quad C_1 C_1^* &= I_{c_1}, & c_6) \quad B_1^* B_1 + B_2^* B_2 &= 2I_{b_2}, \\ & & c_7) \quad C_1^* C_1 + C_2^* C_2 &= 2I_{c_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Перш ніж, використавши співвідношення (3), обчислити матричні елементи зображення T (у фіксованій розмірності), зведемо зображення припустимими унітарними перетвореннями ($\widetilde{T}_{ij} = U_i T_{ij} V_j^*$) до деякого „канонічного” вигляду.

Нам буде зручно розглядати деякі „ідеальні” матриці: $J_{0,n}$ — „порожня” матриця з нульовою кількістю рядків і n стовпцями, $J_{n,0}$ — „порожня” матриця з нульовою кількістю стовпців і з n рядками (див. [1]). Для них $J_{m,0} \oplus J_{0,n} = 0_{m \times n}$, $J_{m,0} \cdot J_{0,n} = 0_{m \times n}$. Матриця $J_{n,0}$ ($J_{0,n}$) є матрицею лінійного відображення з нульового (відповідно, n -вимірного простору) в n -вимірний (відповідно, нульовий) простір.

Теорема 1. *Нерозкладні зображення розширеного графа Динкіна \widetilde{E}_6 з характером $\delta_{\widetilde{E}_6}$ з точністю до унітарної еквівалентності збігаються з одним із зображень*

$$\begin{aligned}
 T^{(1)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & J_{0,1} & 0 \\ \hline J_{0,0} & 0 & 0 \\ \hline J_{1,0} & \sqrt{2} & 1 \end{array} \right], & T^{(2)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & J_{0,0} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline J_{0,1} & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & 1 & J_{1,0} \end{array} \right], \\
 T^{(3)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & J_{0,1} \\ \hline 0 & J_{0,0} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & J_{1,0} & \sqrt{2} \end{array} \right], & T^{(4)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & J_{0,1} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline J_{0,0} & 0 & 0 \\ \hline J_{1,0} & 1 & \sqrt{2} \end{array} \right], \\
 T^{(5)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & J_{0,0} & 0 \\ \hline J_{0,1} & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & J_{1,0} & 1 \end{array} \right], & T^{(6)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & J_{0,0} \\ \hline 0 & J_{0,1} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \sqrt{2} & J_{1,0} \end{array} \right], \\
 T^{(7)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right], & T^{(8)} &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & J_{0,1} \\ \hline 0 & J_{0,1} & 0 \\ \hline J_{0,1} & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \hline 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

$T_{t,p,\varepsilon}^{(9)}$ з наступними блоками $A_i^{(9)}$, $B_i^{(9)}$, $C_i^{(9)}$:

$$\begin{bmatrix} A_1^{(9)} \\ A_2^{(9)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} B_1^{(9)} \\ B_2^{(9)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{(2-t)(1-p)}}{\sqrt{t}} & \frac{-\sqrt{t+2p-tp-1}}{0} \\ \sqrt{(2-t)p} & \sqrt{\frac{1-p}{p}(t+2p-tp-1)} \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{p}(1-t+tp)}e^{i\varepsilon\theta} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} C_1^{(9)} \\ C_2^{(9)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{t(1-p)}}{\sqrt{2-t}} & \frac{\sqrt{1-t+tp}}{0} \\ -\sqrt{tp} & \sqrt{\frac{1-p}{p}(1-t+tp)} \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{p}(t+2p-tp-1)}e^{-i\varepsilon\theta} \end{bmatrix},$$

де

$$\cos \theta = \frac{p}{2\sqrt{(t+2p-tp-1)(1-t+tp)(1-p)}}, \quad (4)$$

$\varepsilon = 0$, якщо $\cos \theta = 1$, $i\varepsilon = \pm 1$ в інших випадках.

Доведення. Зображення $T^{(1)} - T^{(7)}$ знаходять безпосередньо, розв'язуючи систему (3). Зображення $T^{(8)}$ припустимими перетвореннями спочатку зводиться до „канонічного” вигляду (позначення, пов'язані з процесом зведення, див. в [1, 5])

$$T^{(8)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{0,1} \\ 0 & J_{0,1} & 0 \\ J_{0,1} & 0 & 0 \\ a_{41}^+ & a_{42}^- & a_{43}^+ \\ 0 & a_{52}^+ & a_{53}^+ \end{bmatrix}.$$

Для $T^{(9)}$ „канонічний” вигляд є таким:

$$T^{(9)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15}^+ & a_{16}^+ \\ 0 & 0 & a_{23}^+ & a_{24}^- & 0 & 0 \\ a_{31}^+ & \bar{0}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41}^+ & \vec{0}_3 & a_{43}^+ & \bar{0}_2 & a_{45}^+ & \bar{0}_2 \\ 0|_2 & a_{52}^+ & a_{53}^+ & a_{54}^+ & a_{55}^- & a_{56}^+ \\ 0|_2 & a_{62}^+ & 0|_3 & a_{64}^c & 0|_4 & a_{66}^c \end{bmatrix}.$$

Матричні елементи знаходять послідовно з системи (3).

Теорему доведено.

Нехай $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_6})$ – *-алгебра, асоційована з графом \tilde{E}_6 :

$$\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_6}) = \mathbb{C}\langle a, b, c | a = a^*, b = b^*, c = c^*, a(a-e)(a-2e) = 0, \rangle$$

$$b(b - e)(b - 2e) = 0, \quad c(c - e)(c - 2e) = 0, \quad a + b + c = 6e \rangle.$$

Позначимо через $\text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\widetilde{E}_6})$ категорію скінченновимірних $*$ -зображень $*$ -алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_6})$. $\text{Rep}(Q_{\widetilde{E}_6}, \delta_{\widetilde{E}_6})$ – категорія ортоскалярних зображень колчана $Q_{\widetilde{E}_6}$ з фіксованим характером $\delta_{\widetilde{E}_6}$. Як і в роботі [1], побудуємо функтор $\Psi: \text{Rep}(Q_{\widetilde{E}_6}, \delta_{\widetilde{E}_6}) \rightarrow \text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\widetilde{E}_6})$ таким чином. Якщо $T \in \text{Rep}(Q_{\widetilde{E}_6}, \delta_{\widetilde{E}_6})$, покладемо $A = T_{z,a_2} T_{z,a_2}^*$, $B = T_{z,b_2} T_{z,b_2}^*$, $C = T_{z,c_2} T_{z,c_2}^*$, $\pi = (\pi(a), \pi(b), \pi(c)) = (A, B, C)$ – зображення алгебри \mathfrak{A} , $\Psi(T) = \pi$.

Лема 1 [1]. Функтор Ψ є функтором еквівалентності категорій $\text{Rep}(Q_{\widetilde{E}_6}, \delta_{\widetilde{E}_6})$ і $\text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\widetilde{E}_6})$.

Як наслідок, з теореми 1 і леми 1 отримуємо наступне твердження.

Теорема 2. Незвідні зображення алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_6})$, пов’язані з розширеним графом Динкіна \widetilde{E}_6 , з точністю до унітарної еквівалентності збігаються із одним із наступних попарно нееквівалентних зображень $\pi^{(1)} - \pi^{(9)}$ (далі будемо вважати $\pi^{(i)}(a) = A^{(i)}$, $\pi^{(i)}(b) = B^{(i)}$, $\pi^{(i)}(c) = C^{(i)}$, $i \in \overline{1,9}$):

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= 0, & B^{(1)} &= 2, & C^{(1)} &= 1, \\ A^{(2)} &= 2, & B^{(2)} &= 1, & C^{(2)} &= 0, \\ A^{(3)} &= 1, & B^{(3)} &= 0, & C^{(3)} &= 2, \\ A^{(4)} &= 0, & B^{(4)} &= 1, & C^{(4)} &= 2, \\ A^{(5)} &= 2, & B^{(5)} &= 0, & C^{(5)} &= 1, \\ A^{(6)} &= 1, & B^{(6)} &= 2, & C^{(6)} &= 0, \\ A^{(7)} &= 1, & B^{(7)} &= 1, & C^{(7)} &= 1, \end{aligned}$$

$$A^{(8)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{(8)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$C^{(8)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad A_{t,p,\varepsilon}^{(9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{t,p,\varepsilon}^{(9)} = \begin{pmatrix} t & \sqrt{tp(2-t)} & 0 \\ \sqrt{tp(2-t)} & \frac{1}{p}(t+3p-2tp-1) & -\frac{1}{p}\sqrt{q}e^{-i\varepsilon\theta} \\ 0 & -\frac{1}{p}\sqrt{q}e^{i\varepsilon\theta} & \frac{1}{p}(1-t+tp) \end{pmatrix},$$

$$C_{t,p,\varepsilon}^{(9)} = \begin{pmatrix} 2-t & -\sqrt{tp(2-t)} & 0 \\ -\sqrt{tp(2-t)} & \frac{1}{p}(1-t-p+2tp) & -\frac{1}{p}\sqrt{q}e^{i\varepsilon\theta} \\ 0 & -\frac{1}{p}\sqrt{q}e^{-i\varepsilon\theta} & \frac{1}{p}(t+2p-tp-1) \end{pmatrix},$$

де $q = (1 - t + tp)(t + 2p - tp - 1)(1 - p)$, $\cos \theta = p/2\sqrt{q}$, $\varepsilon = 0$, якщо $\cos \theta = 1$, і $\varepsilon = \pm 1$ в інших випадках.

Тепер вкажемо область зміни незалежних параметрів t і p . З невід'ємності значень в підкореневих виразах отримуємо нерівності $0 \leq t \leq 2$, $0 \leq p \leq 1$, $1 - t + tp \geq 0$, $t + 2p - tp - 1 \geq 0$. Для існування дійсного числа θ маємо нерівність $p^2 \leq 4(t + 2p - tp - 1)(1 - t + tp)(1 - p)$. Розв'язуючи цю систему нерівностей, отримуємо, що $p \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$, і при фіксованому p маємо $t \in [a_p, b_p]$, де $a_p = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 - 3p^2}{(1-p)^3}}$, $b_p = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 - 3p^2}{(1-p)^3}}$. При $t = a_p$, або $t = b_p$ з формули (4) маємо $\cos \theta = 1$, і зображення реалізується в дійсних числах.

При $t = 0$ отримуємо $p = \frac{2}{3}$, із зображення прямим доданком виділяється зображення $T^{(3)}$ ($a_{15} = 0$, $a_{43} = 0$, $a_{55} = 0$), а його доповнення розкладається в суму зображень $T^{(1)}$ і $T^{(2)}$. Аналогічно, при $t = 2$ маємо $p = \frac{2}{3}$, із зображення прямим доданком виділяється $T^{(6)}$ ($a_{23} = 0$, $a_{45} = 0$, $a_{53} = 0$), а його доповнення розкладається в суму зображень $T^{(4)}$ і $T^{(5)}$.

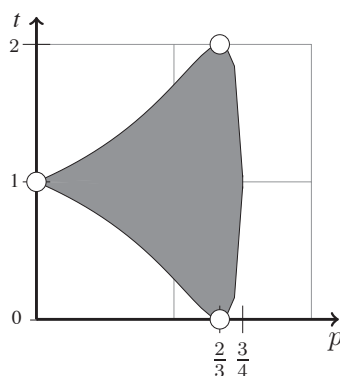
З $p = 0$ впливає $t = 1$. При цьому $a_{16} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{53} = 0$, $a_{55} = 0$. Зображення в цьому випадку розкладається в пряму суму зображень $T^{(7)}$ та $T^{(8)}$.

Для інших припустимих пар незвідність перевіряється безпосередньо. У випадку, коли $0 < p < \frac{3}{4}$ і $a_p < t < b_p$, парі (p, t) відповідає два нерозкладних зображення, одне з яких отримується з іншого заміною $e^{i\theta}$ на $e^{-i\theta}$ і навпаки.

Нехай

$$M = \left\{ (p, t, \varepsilon) \mid 0 < p \leq \frac{3}{4}, a_p \leq t \leq b_p, \varepsilon = 0 \text{ при } t = a_p, \text{ або } t = b_p, \right. \\ \left. \varepsilon = \pm 1 \text{ при } a_p < t < b_p, (p, t, \varepsilon) \neq \left(\frac{2}{3}, 0, 0\right), \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right) \right\}.$$

Проекція множини M на площину (p, t) має вигляд

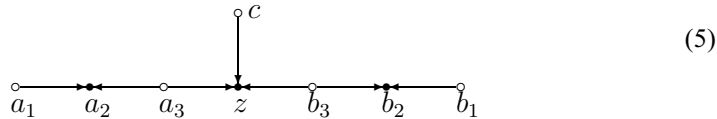


(1)

Теорема 3. *Нерозкладні зображення $T_{p,t,\varepsilon}^{(9)}$ ($\pi_{t,p,\varepsilon}^{(9)}$) колчана $Q_{\tilde{E}_6}$ (алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_6})$) параметризуються точками множини M (різним точкам відповідають унітарно нееквівалентні зображення). При $(p, t, \varepsilon) = (0, 1, 0)$ зображення $T_{p,t,\varepsilon}^{(9)}$ ($\pi_{p,t,\varepsilon}^{(9)}$) розкладається в пряму суму зображень $T^{(7)}$ і $T^{(8)}$ ($\pi^{(7)}$ і $\pi^{(8)}$), при*

$(p, t, \varepsilon) = \left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$ – в пряму суму зображень $T^{(1)} - T^{(3)}$ ($\pi^{(1)} - \pi^{(3)}$), а при $(p, t, \varepsilon) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$ – в пряму суму зображень $T^{(4)} - T^{(6)}$ ($\pi^{(4)} - \pi^{(6)}$).

3. Регулярні ортоскалярні зображення графа \widetilde{E}_7 і асоційованої з ним $*$ -алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_7})$. Для колчана $Q_{\widetilde{E}_7}$



форма Тітса має вигляд

$$q(x) = x_{a_1}^2 + x_{a_2}^2 + x_{a_3}^2 + x_{b_1}^2 + x_{b_2}^2 + x_{b_3}^2 + x_z^2 - x_{a_1}x_{a_2} - x_{a_2}x_{a_3} - x_{a_3}x_z - x_{b_1}x_{b_2} - x_{b_2}x_{b_3} - x_{b_3}x_z - x_cx_z$$

і лінійна форма $L_{\widetilde{E}_7}(x) = 2x_{a_1} + 2x_{b_1} + 4x_z - x_{a_1} - 3x_{a_3} - x_{b_1} - 3x_{b_3} - 2x_c$. Мінімальний додатний уявний корінь $\delta_{\widetilde{E}_7} = \begin{matrix} & & & 2 & & & & & & & \\ & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & \end{matrix}$. Нерозкладні регулярні зображення існують у розмірності, що збігається з цим коренем, а також у розмірностях, що є розв'язками системи

$$\begin{aligned} q(d) &= 1, \\ L_{\widetilde{E}_7}(d) &= 0, \\ d &\leq \delta_{\widetilde{E}_7}. \end{aligned} \tag{6}$$

Розв'язки системи наведено в наступній таблиці.

χ	$d^{(1)}$	$d^{(2)}$	$d^{(3)}$	$d^{(4)}$	$d^{(5)}$	$d^{(6)}$	$d^{(7)}$	$d^{(8)}$	$d^{(9)}$	$d^{(10)}$
a_1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
a_2	0	0	1	1	1	1	0	0	2	1
a_3	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
b_1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
b_2	1	1	0	0	1	1	0	2	0	1
b_3	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1
c	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
z	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2

χ	$d^{(11)}$	$d^{(12)}$	$d^{(13)}$	$d^{(14)}$	$d^{(15)}$	$d^{(16)}$	$d^{(17)}$	$d^{(18)}$	$d^{(19)}$	$d^{(20)}$
a_1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
a_2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2
a_3	1	2	1	2	2	2	2	2	2	3
b_1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
b_2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1
b_3	2	1	2	2	2	3	2	2	2	2
c	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1
z	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3

Як і в п. 2, частина розмірностей відсіюється, оскільки в цих розмірностях ортоскалярні зображення є розкладними. Залишаються розмірності $d^{(1)} - d^{(9)}$.

Зображення колчана задається блочною матрицею

$$T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{34} & A_{35} \end{bmatrix},$$

де $A_{11} = T_{a_2, a_1}$, $A_{12} = T_{a_2, a_3}$, $A_{22} = T_{a_3, z}$, $A_{23} = T_{c, z}$, $A_{24} = T_{z, b_3}$, $A_{34} = T_{b_2, b_3}$, $A_{35} = T_{b_2, b_1}$. Ортоскалярність зображення з характером $\delta_{\tilde{E}_7}$ означає, що виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} c_1) \quad A_{11}^* A_{11} &= I_{a_1}, & c_5) \quad A_{23}^* A_{23} &= 2I_c, \\ c_2) \quad A_{11} A_{11}^* + A_{12} A_{12}^* &= 2I_{a_2}, & c_6) \quad A_{24}^* A_{24} + A_{34}^* A_{34} &= 3I_{b_3}, \\ c_3) \quad A_{12}^* A_{12} + A_{22}^* A_{22} &= 3I_{a_3}, & c_7) \quad A_{34} A_{34}^* + A_{35} A_{35}^* &= 2I_{b_2}, \\ c_4) \quad A_{22} A_{22}^* + A_{23} A_{23}^* + A_{24} A_{24}^* &= 4I_z, & c_8) \quad A_{35}^* A_{35} &= I_{b_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 4. *Нерозкладні зображення розширеного графа Динкіна \tilde{E}_7 з характером $\delta_{\tilde{E}_7}$ з точністю до унітарної еквівалентності збігаються з одним із зображень*

$$T^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{1,0} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

$$T^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{3} & J_{1,0} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & J_{1,0} \end{array} \right],$$

$$T^{(3)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} J_{1,0} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & J_{1,0} & \sqrt{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_{0,1} & J_{0,0} \end{array} \right],$$

$$T^{(4)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & J_{1,0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_{0,0} & J_{0,0} \end{array} \right],$$

$$T^{(5)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} J_{1,0} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & J_{1,0} \end{array} \right],$$

$$T^{(6)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & J_{1,0} & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

$$T^{(7)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{4/3} & \sqrt{8/3} & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_{0,1} & J_{0,0} \end{array} \right],$$

$$T^{(8)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} J_{1,0} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

$$T^{(9)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{1/2} & \sqrt{1/2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & J_{1,0} \end{array} \right],$$

$T_{t,p,\varepsilon}^{(10)}$ з наступними блоками $A_{ij}^{(10)}$:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(10)} & A_{12}^{(10)} & 0 \\ 0 & A_{22}^{(10)} & A_{23}^{(10)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{t} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2-p} & 0 & -\sqrt{2-t} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{p} & \sqrt{\frac{1}{p}} & 0 & \sqrt{2 - \frac{2-tp^2}{p(2-p)}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2 - \frac{1}{p}} & 0 & \sqrt{\frac{2-tp^2}{p(2-p)}} e^{i\varepsilon\theta_1} \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} A_{24}^{(10)} & A_{25}^{(10)} & \sqrt{2-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{35}^{(10)} & \sqrt{t} & \sqrt{p} & 0 & 0 \\ & & 0 & \sqrt{2-p} & \sqrt{\frac{1-tp}{2-p}} & 0 \\ & & 0 & 0 & -\sqrt{2 - \frac{1-tp}{2-p}} e^{i\varepsilon\theta_2} & 0 \\ \hline & & 1 & -\sqrt{tp} & 0 & \sqrt{1-tp} \\ & & 0 & \sqrt{1-tp} & -1 & \sqrt{tp} \end{array} \right].$$

Якщо позначити $x = \frac{2-tp^2}{p(2-p)}$, $y = \frac{1-tp}{2-p}$, то $\varepsilon = 0$ при $x = 2$, або $y = 0$, а при $0 < x < 2$ і $0 < y < 2$ $\varepsilon = \pm 1$ і

$$\cos \theta_1 = -\sqrt{\frac{(x-y)(2-x)}{x(2-x+y)}},$$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{y(x-y)}{(2-y)(2-x+y)}},$$
(8)

t і p – незалежні параметри (різним припустимим трійкам (p, t, ε) відповідають унітарно нееквівалентні зображення).

Доведення. Зображення $T^{(1)} - T^{(6)}$ знаходять безпосередньо з системи (6). Зображення $T^{(7)} - T^{(9)}$ спочатку зводять до „канонічного” вигляду

$$T^{(7)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} J_{0,0} & J_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{23}^- & a_{24}^+ & 0 \\ 0 & a_{32}^+ & a_{33}^- & a_{34}^+ & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_{0,1} & J_{0,0} \end{array} \right],$$

$$T^{(8)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} J_{1,0} & a_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{22}^+ & 0 & a_{24}^- & a_{25}^+ & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^+ & a_{34}^+ & a_{35}^+ & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^+ & a_{55}^+ \end{array} \right],$$

$$T^{(9)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_{11}^+ & a_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & a_{22}^+ & a_{23}^+ & a_{24}^+ & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{32}^+ & a_{33}^- & 0 & a_{35}^+ & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45}^+ & J_{1,0} \end{array} \right],$$

а потім матричні елементи знаходять із системи. Для зображення $T^{(10)}$ „канонічний” вигляд є таким:

$$T^{(10)} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} a_{11}^+ & a_{12}^+ & \vec{0}_{10} & \vec{0}_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 \downarrow_{11} & 0 \downarrow_9 & a_{23}^+ & a_{24}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{32}^+ & \bar{0}_{11} & \bar{0}_{11} & a_{35}^+ & \bar{0}_2 & a_{37}^+ & \bar{0}_2 & \bar{0}_2 & 0 \\ \hline 0 & \bar{0}_{11} & a_{43}^+ & \bar{0}_6 & a_{45}^- & \vec{0}_5 & a_{47}^+ & a_{48}^+ & \bar{0}_6 & 0 \\ \hline 0 & \bar{0}_{11} & a_{53}^- & a_{54}^+ & 0 \downarrow_4 & a_{56}^{\geq 0} & 0 \downarrow_3 & a_{58}^+ & a_{59}^{\geq 0} & 0 \\ \hline 0 & \bar{0}_{11} & 0 \downarrow_8 & a_{64}^+ & 0 \downarrow_4 & a_{66}^c & 0 \downarrow_3 & 0 \downarrow_7 & a_{69}^c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77}^+ & a_{78}^- & \vec{0}_{10} & a_{7,10}^+ \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \downarrow_9 & a_{88}^+ & a_{89}^- & a_{8,10}^+ \end{array} \right].$$

Елементи a_{66}^c і a_{69}^c – комплексні числа. Позначаючи $a_{35}^+ = \sqrt{t}$, $a_{48}^+ = \sqrt{p}$, послідовно знаходимо всі інші матричні елементи з системи (7). Нерозкладність отриманих зображень перевіряється безпосередньо.

Формули (7) отримують з умови ортогональності 5- і 6-го рядків матриці $T^{(10)}$:

$$\sqrt{(2-x+y)(x-y)} + \sqrt{(2-x)xe^{i\theta_1}} - \sqrt{(2-y)ye^{i\theta_2}} = 0.$$

Теорему доведено.

Тепер розглянемо алгебру $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_7})$, асоційовану з графом \widetilde{E}_7 , і побудуємо всі її нерозкладні зображення

$$\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_7}) = \mathcal{C} \left\langle a, b, c \mid a = a^*, b = b^*, c = c^*, a(a-e)(a-2e)(a-3e) = 0, \right. \\ \left. b(b-e)(b-2e)(b-3e) = 0, c(c-2e) = 0, a+b+c = 4e \right\rangle,$$

$\text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\widetilde{E}_7})$ – категорія скінченновимірних *-зображень *-алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_7})$. Аналогічно тому, як це було зроблено в роботі [1], і для алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_6})$ будемо функтор $\Psi: \text{Rep}(Q_{\widetilde{E}_7}, \delta_{\widetilde{E}_7}) \rightarrow \text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\widetilde{E}_7})$. Якщо $T \in \text{Rep}(Q_{\widetilde{E}_7}, \delta_{\widetilde{E}_7})$, покладемо $A = T_{z,a_3} T_{z,a_3}^*$, $B = T_{z,b_3} T_{z,b_3}^*$, $C = T_{z,c} T_{z,c}^*$, $\pi = (\pi(a), \pi(b), \pi(c)) = (A, B, C)$ – зображення алгебри \mathfrak{A} , $\Psi(T) = \pi$.

Лема 2 [1]. Функтор Ψ є функтором еквівалентності категорій $\text{Rep}(Q_{\widetilde{E}_7}, \delta_{\widetilde{E}_7})$ і $\text{Rep}(\mathfrak{A}, \delta_{\widetilde{E}_7})$.

Як наслідок, з теореми 4 і леми 2 отримуємо наступне твердження.

Теорема 5. Незвідні ортоскалярні зображення алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\widetilde{E}_7})$, пов’язаної з розширеним графом Динкіна \widetilde{E}_7 , з точністю до унітарної еквівалентності збігаються з одним із наступних попарно нееквівалентних зображень $\pi^{(1)} - \pi^{(10)}$ (далі будемо вважати $\pi^{(i)}(a) = A^{(i)}$, $\pi^{(i)}(b) = B^{(i)}$, $\pi^{(i)}(c) = C^{(i)}$, $i \in \overline{1,10}$):

$$A^{(1)} = 0, \quad B^{(1)} = 2, \quad C^{(1)} = 2,$$

$$A^{(2)} = 3, \quad B^{(2)} = 1, \quad C^{(2)} = 0,$$

$$A^{(3)} = 1, \quad B^{(3)} = 3, \quad C^{(3)} = 0,$$

$$A^{(4)} = 2, \quad B^{(4)} = 0, \quad C^{(4)} = 2,$$

$$A^{(5)} = 1, \quad B^{(5)} = 1, \quad C^{(5)} = 2,$$

$$A^{(6)} = 2, \quad B^{(6)} = 2, \quad C^{(6)} = 0,$$

$$A^{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{(7)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad C^{(7)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$A^{(8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{(8)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C^{(8)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^{(9)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad B^{(9)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{(9)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_{t,p,\varepsilon}^{(10)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-p & -\sqrt{p(2-p)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p(2-p)} & p + \frac{1}{p} & \sqrt{\frac{1}{p}\left(2 - \frac{1}{p}\right)} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{p}\left(2 - \frac{1}{p}\right)} & 2 - \frac{1}{p} \end{pmatrix},$$

$$B_{t,p,\varepsilon}^{(10)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-t & \sqrt{t(2-t)} & 0 & 0 \\ \sqrt{t(2-t)} & t+p & \sqrt{p(2-p)} & 0 \\ 0 & \sqrt{p(2-p)} & 2-p+y & \sqrt{y(2-y)}e^{-i\varepsilon\theta_2} \\ 0 & 0 & \sqrt{y(2-y)}e^{i\varepsilon\theta_2} & 2-y \end{pmatrix},$$

$$C_{t,p,\varepsilon}^{(10)} = \begin{pmatrix} t & -\sqrt{t(2-t)} & 0 & 0 \\ -\sqrt{t(2-t)} & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & \sqrt{x(2-x)}e^{-i\varepsilon\theta_1} \\ 0 & 0 & \sqrt{x(2-x)}e^{i\varepsilon\theta_1} & x \end{pmatrix},$$

$$\partial e \ x = \frac{2 - tp^2}{p(2 - p)}, \ y = \frac{1 - tp}{2 - p}, \ \varepsilon = 0 \text{ при } x = 2, \text{ або } y = 2, \text{ а при } 0 < x < 2 \text{ і } 0 < y < 2 \ \varepsilon = \pm 1 \text{ і}$$

$$\cos \theta_1 = -\sqrt{\frac{(x - y)(2 - x)}{x(2 - x + y)}},$$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{\frac{y(x - y)}{(2 - y)(2 - x + y)}},$$

t і p — незалежні параметри (різним припустимим трійкам (p, t, ε) відповідають унітарно нееквівалентні зображення).

Тепер вкажемо область зміни незалежних параметрів t і p . З невід'ємності підкорених виразів у формулах для матричних елементів зображення легко отримуємо, що $p \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, і при фіксованому p значення $t \in [a_p, b_p]$, де $a_p = 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2$, $b_p = \frac{1}{p}$.
При $t = a_p$

$$a_{56}^{\geq 0} = \sqrt{2 - \frac{2 - tp^2}{p(2 - p)}} = 0, \quad x = \frac{2 - tp^2}{p(2 - p)} = 2,$$

і з формул (8) випливає $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0$. При $t = b_p$ маємо $a_{59}^{\geq 0} = \sqrt{\frac{1 - tp}{2 - p}} = \sqrt{y} = 0$ і також $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0$. Таким чином, у цих двох випадках зображення реалізуються в дійсних числах.

При $t = 0$ із зображення прямим доданком виділяється зображення $T^{(7)}$ ($a_{35} = 0$, $a_{47} = 0$, $a_{78} = 0$, $a_{8,10} = 0$), його доповнення розкладається в пряму суму зображень $T^{(5)}$ і $T^{(6)}$.

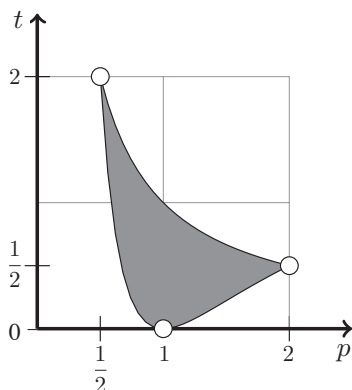
З $p = \frac{1}{2}$ випливає $t = 2$, і в цьому випадку $a_{45} = 0$, $a_{37} = 0$, $a_{64} = 0$ і зображення розкладається в суму зображень $T^{(1)} - T^{(4)}$. З $p = 2$ випливає, що $t = \frac{1}{2}$, і в цьому випадку $a_{43} = 0$, $a_{58} = 0$, $a_{59} = 0$, $a_{7,10} = 0$, $a_{88} = 0$, а зображення розкладається в пряму суму зображень $T^{(8)}$ і $T^{(9)}$.

Для інших припустимих пар безпосередньо перевіряється їх незвідність. Зауважимо, що при $\frac{1}{2} < p < 2$, $a_p < t < b_p$ парі (p, t) відповідають два нерозкладних зображення, одне з яких отримується з іншого заміною $e^{i\theta_1}$ та $e^{i\theta_2}$ на комплексно спряжені числа $e^{-i\theta_1}$, $e^{-i\theta_2}$.

Нехай

$$M = \left\{ (p, t, \varepsilon) \left| \frac{1}{2} < p < 2, \ a_p \leq t \leq b_p, \ \varepsilon = 0 \text{ при } t = a_p, \text{ або } t = b_p, \right. \right. \\ \left. \left. \varepsilon = \pm 1 \text{ при } a_p < t < b_p, \ (p, t, \varepsilon) \neq (1, 0, 0) \right\},$$

$\left(a_p = 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2, \ b_p = \frac{1}{p}\right)$. Проекція множини M на площину (p, t) має вигляд



Теорема 6. *Нерозкладні зображення $T_{t,p,\varepsilon}^{(10)}$ ($\pi_{t,p,\varepsilon}^{(10)}$) колчана $Q_{\tilde{E}_7}$ (алгебри $\mathfrak{A}(\delta_{\tilde{E}_7})$) параметризуються точками множини M (різним точкам відповідають унітарно нееквівалентні зображення). При $(p, t, \varepsilon) = \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$ зображення $T_{t,p,\varepsilon}^{(10)}$ ($\pi_{t,p,\varepsilon}^{(10)}$) розкладається в пряму суму зображень $T^{(1)} - T^{(4)}$ ($\pi^{(1)} - \pi^{(4)}$), при $(p, t, \varepsilon) = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$ – в пряму суму зображень $T^{(8)}, T^{(9)}$ ($\pi^{(8)}, \pi^{(9)}$), а при $(p, t, \varepsilon) = (1, 0, 0)$ – в пряму суму зображень $T^{(5)} - T^{(7)}$ ($\pi^{(5)} - \pi^{(7)}$).*

1. Круляк С. А., Лівінський І. В. Регулярні ортоскалярні зображення розширеного графа Динкіна \tilde{E}_8 та $*$ -алгебри, асоційованої з ним // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1044–1062.
2. Ostrovskiy V., Samoilenko Yu. Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$ -algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Phys. – 1999. – **11**, № 1. – 261 p.
3. Меллит А. С. Когда сумма трех частичных отражений равна нулю // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1277–1283.
4. Островський В. Л. Зображення алгебри, асоційованої з графом Динкіна \tilde{E}_7 // Там же. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1193–1202.
5. Круляк С. А., Назарова Л. А., Ройтер А. В. Ортоскалярные представления колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина, в категории гильбертовых пространств // Функцион. анализ и прил. – 2010. – **44**, вып. 1. – С. 57–73.

Одержано 17.05.10