УДК 517.929

Т. А. Лукьянова, А. А. Мартынюк (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ

Some integral inequalities on the time scale are presented and sufficient conditions of the uniform stability of equilibrium of a nonlinear system on the time scale are obtained.

Наведено деякі інтегральні нерівності на часовій шкалі та отримано достатні умови рівномірної стійкості стану рівноваги нелінійної системи на часовій шкалі.

1. Введение. Интегральные неравенства являются мощным и широко применяемым средством для качественного исследования интегральных и дифференциальных уравнений. В частности, в книге [1] неравенство Гронуолла и его обобщения используются для изучения интегральных уравнений с дегенеративным ядром, систем дифференциальных уравнений общего вида и квазилинейных систем. В данной работе подход, предложенный в [1], распространяется на случай интегральных и дифференциальных уравнений на временной шкале.

Исследование динамических уравнений на временной шкале является актуальным, поскольку позволяет как одновременно описать динамику систем в непрерывном и дискретном случаях, так и исследовать динамику системы во временной области „между" этими состояниями. Кроме того, сужение результатов, полученных для общей временной шкалы, дает возможность получать новые результаты для дискретных систем (например, следствия 3 и 4), аналогичные известным для непрерывного случая.

В данной работе на основе новых интегральных неравенств получены оценки решений систем интегральных и дифференциальных уравнений на произвольной временной шкале. Эти оценки применены для исследования устойчивости состояния равновесия системы дифференциальных уравнений общего вида. Эффективность полученных результатов продемонстрирована на конкретном примере.

2. Основные обозначения и необходимые теоремы. Временной шкалой $\mathbb{T}$ называется произвольное непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Основные понятия и теоремы математического анализа на временной шкале, такие как определения производной и интеграла, правила дифференцирования и интегрирования, определение экспоненциальной, регрессивной и rd-непрерывной функций, подробно изложены в работах [2, 3]. Приведем только некоторые необходимые понятия и определения.

Обозначим через $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ множество всех rd-непрерывных функций $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Функция $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется rd-непрерывной, если порождаемый ею оператор суперпозиции (fx) переводит множество $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ в себя.

Функция $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регрессивной, если $1 + \mu(t) f(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$, и положительно регрессивной, если $1 + \mu(t) f(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$. Множество всех rd-непрерывных и положительно регрессивных функций f: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{R}^+$.

Функция f: $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется регрессивной, если при любом

$t \in \mathbb{T}^k$ оператор $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, действующий по формуле $Fx = x + \mu(t) f(t, x)$, обратим.

Кроме того, обозначим через $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $[a, +\infty)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < +\infty\}$, $a \in \mathbb{T}$.

Далее нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1 ([4], теорема 3.5)**.** *Пусть функции* $u, p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ rd*-непрерывны на* $\mathbb{T}$, *функция* $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ *является* Δ*-дифференцируемой на* $\mathbb{T}$ *и* $f^{\Delta}(t) \geq 0$. *Если*

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t p(s)\, u(s)\, \Delta s$$

для всех $t \in \mathbb{T}$, *то*

$$u(t) \leq f(a)\, e_p(t, a) + \int_a^t f^{\Delta}(s)\, e_p\big(t, \sigma(s)\big)\, \Delta s$$

для всех $t \in \mathbb{T}$, *где функция* $e_p(t, a)$, $a \in \mathbb{T}$, *является решением начальной задачи*

$$x^{\Delta}(t) = p(t)\, x(t), \qquad x(a) = 1.$$

Лемма 2 ([5], замечание 2)**.** *Если функция* $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ *является* rd*-непрерывной на* $\mathbb{T}$, *то*

$$e_p(t, a) \leq \exp\left(\int_a^t p(s)\, \Delta s\right)$$

при всех $a \in \mathbb{T}$, $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

В дальнейшем будут необходимы такие свойства экспоненциальной функции:

1) $e_p(a, a) = 1$, $e_p(t, a) > 0$ при $p \in \mathcal{R}^+$, $a \in \mathbb{T}$ и $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$;

2) $\int_a^t p\, e_p(s, a)\, \Delta s = e_p(t, a) - 1$ при $p \in \mathcal{R}^+$, $a \in \mathbb{T}$ и $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$;

3) если $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то $\lim_{t \to +\infty} e_{\ominus\lambda}(t, a) = 0$, где $\ominus\lambda = -\dfrac{\lambda}{1 + \mu(t)\lambda} \in \mathcal{R}^+$ (см. [6]).

Предположим, что на временной шкале $\mathbb{T}$ определена система динамических уравнений

$$x^{\Delta}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad t \in I, \tag{1}$$

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \quad t_0 \in I, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $I = [\alpha, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $\alpha \in \mathbb{T}$, $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(t, 0) \equiv 0$, $\sup \mathbb{T} = +\infty$. Кроме того, предположим, что для задачи (1), (2) выполняются условия существования единственного решения на $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Это решение будем обозначать $x(t) = x(t; t_0, x_0)$.

Определение 1. *Состояние равновесия* $x(t) \equiv 0$ *системы* (1) *называется равномерно устойчивым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует постоянная* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такая, что из условия* $\|x_0\| < \delta$ *следует оценка* $\|x(t;\, t_0,\, x_0)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *и* $t_0 \in I$.

В работе [3] для произвольной временной шкалы доказана следующая теорема существования и единственности.

Лемма 3 ([3], теорема 8.24)**.** *Предположим, что для любых значений* $t \in \mathbb{T}$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$ *определены окрестности* $I_c = (t - c,\, t + c) \bigcap \mathbb{T}$ *и* $S(b) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < b \right\}$, *где* $c > 0$, $\inf \mathbb{T} \le t - c$, $\sup \mathbb{T} \ge t + c$, *такие, что вектор-функция* $f\colon I_c \times S(b) \to \mathbb{R}^n$ *является* $r\,d$*-непрерывной, ограниченной на* $I_c \times S(b)$ *и удовлетворяет условию*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le L(t, x)\|x_1 - x_2\|, \quad L(t, x) > 0,$$

при всех (t, x_1), $(t, x_2) \in I_c \times S(b)$. *Кроме того, предположим, что существуют положительные непрерывные функции* $p, q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ *такие, что*

$$\|f(t, x)\| \le p(t)\|x\| + q(t)$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$.

Тогда начальная задача

$$x^{\Delta}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad t \in \mathbb{T},$$

$$x(t_0;\, t_0,\, x_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{T}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

имеет точно одно решение на $\mathbb{T}$.

3. Оценки решений систем интегральных и дифференциальных уравнений. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$x(t) = g(t) + B(t)\int_a^t U\big(s, x(s)\big)\,\Delta s, \quad t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}, \tag{3}$$

где $x, g : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$, $B : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$, $U : [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — rd-непрерывные функции, $a \in I$. Пусть существует решение уравнения (3) на $[a, +\infty)_{\mathbb{T}}$.

Лемма 4. *Предположим, что существуют* rd*-непрерывные функции* $L, M : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что*:

1) $\|U(t, x)\| \le L\big(t, \|x\|\big)$ *при всех* $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$;

2) $0 \le L(t, u) - L(t, v) \le M(t, v)(u - v)$ *при всех* $t \in I$, $u \ge v \ge 0$.

Тогда для решения $x(t)$ *интегрального уравнения* (3) *при всех* $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *имеет место оценка*

$$\|x(t) - g(t)\| \le |B(t)| \int_a^t L\big(s, \|g(s)\|\big)\, e_p\big(t, \sigma(s)\big)\,\Delta s,$$

где $p(t) = |B(t)|\, M\big(t, \|g(t)\|\big)$.

Доказательство. Пусть функция $x(t)$ является решение уравнения (3). Обозначим

$$y(t) = \int_a^t U\big(s,\ x(s)\big)\,\Delta s \tag{4}$$

и из (3) получим

$$x(t) = g(t) + B(t)\,y(t). \tag{5}$$

Дифференцируя (4), с учетом (5) имеем

$$y^{\Delta}(t) = U\big(t,\ g(t) + B(t)\,y(t)\big), \quad y(a) = 0.$$

Тогда

$$\left\| y^{\Delta}(t) \right\| = \big\| U\big(t,\ g(t) + B(t)\,y(t)\big)\big\| \le L\big(t, \|g(t) + B(t)\,y(t)\|\big) \le$$

$$\le L\big(t, \|g(t)\| + |B(t)|\,\|y(t)\|\big) = L\big(t, \|g(t)\| + |B(t)|\,\|y(t)\|\big) - L\big(t, \|g(t)\|\big) +$$

$$+ L\big(t, \|g(t)\|\big) \le L\big(t, \|g(t)\|\big) + M\big(t, \|g(t)\|\big)\,|B(t)|\,\|y(t)\| \tag{6}$$

и, поскольку $\|y(t)\| = \left\| \int_a^t y^{\Delta}(s)\,\Delta s \right\| \le \int_a^t \left\| y^{\Delta}(s) \right\| \Delta s$, из (6) следует оценка

$$\|y(t)\| \le \int_a^t \left\| y^{\Delta}(s) \right\| \Delta s \le \int_a^t L\big(s, \|g(s)\|\big)\,\Delta s +$$

$$+ \int_a^t |B(s)|\,M\big(s, \|g(s)\|\big)\,\|y(s)\|\,\Delta s. \tag{7}$$

Обозначая $f(t) = \int_a^t L\big(s, \|g(s)\|\big)\,\Delta s$, $p(t) = |B(t)|\,M\big(t, \|g(t)\|\big)$, неравенство (7) записываем в виде

$$\|y(t)\| \le f(t) + \int_a^t p(s)\,\|y(s)\|\,\Delta s,$$

при этом $f^{\Delta}(t) = L\big(t, \|g(t)\|\big) \ge 0$, $f(a) = 0$. С учетом леммы 1 при всех $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ получаем неравенство

$$\|y(t)\| \le f(a)\,e_p(t, a) + \int_a^t L\big(s, \|g(s)\|\big)\,e_p\big(t, \sigma(s)\big)\,\Delta s,$$

откуда имеем оценку

$$\|x(t) - g(t)\| \le |B(t)|\,\|y(t)\| \le |B(t)| \int_a^t L\big(s, \|g(s)\|\big)\,e_p\big(t, \sigma(s)\big)\,\Delta s.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Предположим, что существует rd-непрерывная функция $S\colon [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что при всех $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\|U(t,\, x+y) - U(t,\, x)\| \;\le\; S\big(t,\, \|x\|\big)\, \|y\|.$$

Тогда для решения $x(t)$ *интегрального уравнения* (3) *при всех* $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *имеет место оценка*

$$\|x(t) - g(t)\| \;\le\; |B(t)| \int_a^t \big\|U\big(s,\, g(s)\big)\big\|\, e_p\big(t,\, \sigma(s)\big)\, \Delta s\,, \tag{8}$$

где $p(t) = |B(t)|\, S\big(t,\, \|g(t)\|\big)$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4, для

$$y(t) \;=\; \int_a^t U\big(s,\, x(s)\big)\, \Delta s$$

получаем оценку

$$\left\|y^{\Delta}(t)\right\| \;=\; \|U(t,\, g(t) + B(t)\, y(t))\| \;\le\; \|U(t,\, g(t))\| \;+\; S\big(t,\, \|g(t)\|\big)\, |B(t)|\, \|y(t)\|,$$

откуда следует, что

$$\|y(t)\| \;\le\; \int_a^t \left\|y^{\Delta}(s)\right\| \Delta s \;\le\; \int_a^t \big\|U\big(s,\, g(s)\big)\big\|\, \Delta s \;+$$

$$+\; \int_a^t |B(s)|\, S\big(s,\, \|g(s)\|\big)\, \|y(s)\|\, \Delta s\,. \tag{9}$$

Если положить $f(t) \;=\; \int_a^t \big\|U\big(s,\, g(s)\big)\big\|\, \Delta s\,,$ $p(t) \;=\; |B(s)|\, S\big(t,\, \|g(t)\|\big),$ то неравенство (9) примет вид

$$\|y(t)\| \;\le\; f(t) \;+\; \int_a^t p(s)\, \|y(s)\|\, \Delta s\,.$$

Тогда с учетом леммы 1 получаем

$$\|y(t)\| \;\le\; \int_a^t \big\|U\big(s,\, g(s)\big)\big\|\, e_p\big(t,\, \sigma(s)\big)\, \Delta s\,,$$

откуда имеем оценку

$$\|x(t) - g(t)\| \;\le\; |B(t)|\, \|y(t)\| \;\le\; |B(t)| \int_a^t \big\|U\big(s,\, g(s)\big)\big\|\, e_p\big(t,\, \sigma(s)\big)\, \Delta s\,.$$

Лемма 5 доказана.

Следствие 1. *Предположим, что существуют* rd-*непрерывные функции* $L, M\colon\, I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что*:

1) $\|f(t,\, x)\| \le L\big(t,\, \|x\|\big)$ *при всех* $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$;

2) $0 \le L(t,\, u) - L(t,\, v) \le M(t,\, v)\,(u - v)$ *при всех* $t \in I$, $u \ge v \ge 0$.

Тогда для решения $x(t)$ *задачи* (1), (2) *при всех* $t \in [t_0,\, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *имеет место оценка*

$$\|x(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} L\big(s, \|x_0\|\big) e_p\big(t, \sigma(s)\big)\,\Delta s, \tag{10}$$

где $p(t) = M\big(t, \|x_0\|\big)$.

Доказательство. Перепишем уравнения (1) в виде

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\,\Delta s.$$

Используя лемму 4 при $g(t) \equiv x_0$, $B(t) \equiv 1$, $a = t_0$, получаем оценку (10).

Следствие 2. *Предположим, что существует* rd*-непрерывная функция* $S\colon [a, +\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что при всех* $t \in [a, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *и* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$\|U(t, x + y) - U(t, x)\| \le S\big(t, \|x\|\big)\|y\|.$$

Тогда для решения $x(t)$ *задачи* (1), (2) *при всех* $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *имеет место оценка*

$$\|x(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\| e_p\big(t, \sigma(s)\big)\,\Delta s, \tag{11}$$

где $p(t) = S\big(t, \|x_0\|\big)$.

Доказательство. Как и при доказательстве следствия 1, используя лемму 5 при $g(t) \equiv x_0$, $B(t) \equiv 1$, $a = t_0$, получаем оценку (11).

4. Основной результат. Теперь мы можем доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Предположим, что существуют* rd*-непрерывные функции* L, $M\colon I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что* $L(t, 0) \equiv 0$ *и выполняются неравенства:*

1) $\|f(t, x)\| \le L\big(t, \|x\|\big)$ *при всех* $t \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$;

2) $0 \le L(t, u) - L(t, v) \le M(t, v)(u - v)$ *при всех* $t \in I$, $u \ge v \ge 0$.

Тогда если существуют постоянные $K > 0$, $\delta_0 > 0$ *такие, что*

$$\int_{\alpha}^{+\infty} M(s, \delta)\,\Delta s \le K$$

для любого $0 \le \delta \le \delta_0$, *то состояние равновесия* $x(t) \equiv 0$ *системы* (1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Используя следствие 1 и лемму 2, для решения $x(t)$ системы (1) получаем оценку

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| + \|x(t) - x_0\| \le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} L\big(s, \|x_0\|\big) e_p\big(t, \sigma(s)\big)\,\Delta s \le$$

$$\le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} L\big(s, \|x_0\|\big) \exp\left(\int_{\sigma(s)}^{t} p(\tau)\,\Delta\tau\right)\Delta s =$$

$$= \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} L\big(s, \|x_0\|\big) \exp\left(\int_{\sigma(s)}^{t} M\big(\tau, \|x_0\|\big)\,\Delta\tau\right)\Delta s. \tag{12}$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\varepsilon/2,\ \varepsilon/(2Ke^K),\ \delta_0\}$. В силу условия 2 теоремы $L(t, u) \le M(t, 0)\,u$ при всех $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ и $u \ge 0$, откуда следует неравенство

$$\int_{t_0}^{t} L(s, u)\,\Delta s \le u\int_{t_0}^{t} M(s, 0)\,\Delta s \le u\int_{\alpha}^{+\infty} M(s, 0)\,\Delta s \le Ku.$$

Продолжая оценку (12), при всех $\|x_0\| \le \delta$ и $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ получаем

$$\|x(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \int_{t_0}^{t} L\big(s, \|x_0\|\big)\exp\left(\int_{\sigma(s)}^{t} M\big(\tau, \|x_0\|\big)\Delta\tau\right)\Delta s \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \int_{t_0}^{t} L\big(s, \|x_0\|\big)\exp\left(\int_{\alpha}^{+\infty} M\big(\tau, \|x_0\|\big)\Delta\tau\right)\Delta s \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + e^K\int_{t_0}^{t} L\big(s, \|x_0\|\big)\Delta s \le \frac{\varepsilon}{2} + e^K K\|x_0\| \le \varepsilon,$$

откуда и следует равномерная устойчивость нулевого состояния равновесия системы (1).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Предположим, что существует rd-непрерывная функция S: $[\alpha, +\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что при всех $t \in [\alpha, +\infty)_{\mathbb{T}}$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\|f(t, x + y) - f(t, x)\| \le S\big(t, \|x\|\big)\|y\|.$$

Тогда если существуют постоянные $K > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\int_{\alpha}^{+\infty} S\big(u, \delta\big)\,\Delta u \le K$$

для любого $0 \le \delta \le \delta_0$, то состояние равновесия $x(t) \equiv 0$ системы (1) равномерно устойчиво.

Доказательство. Полагая $y = -x$ при всех $t \in I$ и $x \in \mathbb{R}^n$, получаем неравенство

$$\|f(t, x)\| \le S\big(t, \|x\|\big)\|x\|,$$

откуда согласно лемме 5 имеем

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| + \|x(t) - x_0\| \le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t}\|f(s, x_0)\|\,e_p\big(t, \sigma(s)\big)\Delta s \le$$

$$\le \|x_0\| + \|x_0\|\int_{t_0}^{t} S\big(s, \|x_0\|\big)\exp\left(\int_{\sigma(s)}^{t} p(\tau)\,\Delta\tau\right)\Delta s =$$

$$= \|x_0\| + \|x_0\|\int_{t_0}^{t} S\big(s, \|x_0\|\big)\exp\left(\int_{\sigma(s)}^{t} S\big(\tau, \|x_0\|\big)\Delta\tau\right)\Delta s, \qquad (13)$$

где $p(t) = S\big(t, \|x_0\|\big)$, $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon/(2Ke^K), \delta_0\}$. Продолжая оценку (13), при всех $\|x_0\| \le \delta$ и $t \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ получаем

$$\|x(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \|x_0\| \int_\alpha^{+\infty} S\big(s, \|x_0\|\big) \exp\left(\int_\alpha^{+\infty} S\big(\tau, \|x_0\|\big)\Delta\tau \right) \Delta s \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \|x_0\| e^K \int_\alpha^{+\infty} S\big(s, \|x_0\|\big)\Delta s \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + e^K K \|x_0\| \le \varepsilon,$$

откуда и следует равномерная устойчивость нулевого состояния равновесия системы (1).

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 1.** В случае, когда $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, интеграл и Δ-производная на $\mathbb{T}$ совпадают с интегралом Римана и эйлеровой производной. Поэтому теоремы 3.5.1 и 3.5.7 из [1] автоматически получаются как следствия из теорем 1 и 2.

Пусть теперь $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. В этом случае начальная задача (1), (2) принимает вид

$$\Delta x(\tau) = f\big(\tau, x(t)\big), \quad \tau \in I, \tag{14}$$

$$x(\tau_0; \tau_0, x_0) = x_0, \quad \tau_0 \in I, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta x(\tau) = x(\tau + 1) - x(\tau)$, $I = \{\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(\tau, 0) \equiv 0$, и для задачи (14), (15) выполняются условия существования и единственности решения на $[\tau_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при любых начальных данных $(\tau_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

***Следствие* 3.** *Предположим, что существуют функции* $L, M\colon I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что* $L(\tau, 0) \equiv 0$ *и выполняются неравенства*:

1) $\|f(\tau, x)\| \le L\big(\tau, \|x\|\big)$ *при всех* $\tau \in I$, $x \in \mathbb{R}^n$,

2) $0 \le L(\tau, u) - L(\tau, v) \le M(\tau, v)(u - v)$ *при всех* $\tau \in I$, $u \ge v \ge 0$.

Если существуют постоянные $K > 0$, $\delta_0 > 0$ *такие, что*

$$\sum_{\tau=\alpha}^{+\infty} M(\tau, \delta) \le K$$

для любого $0 \le \delta \le \delta_0$, *то состояние равновесия* $x(t) \equiv 0$ *системы* (14) *равномерно устойчиво*.

***Следствие* 4.** *Предположим, что существует функция* $S\colon I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что при всех* $t \in I$ *и* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$\|f(t, x + y) - f(t, x)\| \le S\big(t, \|x\|\big)\|y\|.$$

Тогда если существуют постоянные $K > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие, что*

$$\sum_{\tau=\alpha}^{+\infty} S(\tau, \delta) \le K$$

для любого $0 \le \delta \le \delta_0$, *то состояние равновесия* $x(t) \equiv 0$ *системы* (14) *равномерно устойчиво.*

5. Пример. Рассмотрим систему динамических уравнений на временной шкале $\mathbb{T}$ вида

$$x^{\Delta}(t) = A(t)\,x(t), \tag{16}$$

где $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $x_1, x_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ a(t) & 0 \end{pmatrix}$, $I = [\alpha, +\infty)_{\mathbb{T}}$. Предположим, что функция $a: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ является непрерывной, регрессивной, $a(t) \ne 0$ при всех $t \in I$ и

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |a(s)|\,\Delta s \le M.$$

Ясно, что функция $f(t, x) = A(t)\,x$ является rd-непрерывной. Покажем, что она регрессивна. Для этого достаточно показать, что при любом фиксированном $t \in I$ оператор $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по формуле $F(x) = x + \mu(t)\,A(t)\,x$, обратим. Для любого $z \in \mathbb{R}^2$ уравнение $F(\xi) = z$ имеет единственное решение $\xi = \left(z_2/(1 + \mu(t)\,a(t)),\ z_1/(1 + \mu(t)\,a(t))\right)^{\mathrm{T}}$, что и означает обратимость оператора F и, соответственно, регрессивность функции $f(t, x)$.

Поскольку $\|f(t, x)\| = |a(t)|\,\|x\|$, выполнены условия леммы 3, т. е. существует единственное решение системы (16) на $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при любых начальных данных $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^2$.

Проверим выполнение условий теоремы 1. Легко видеть, что $L(t, u) = |a(t)|\,u \ge 0$ при $u \ge 0$ и, кроме того, $0 \le L(t, u) - L(t, v) = |a(t)|(u - v)$ при $u \ge v \ge 0$ и $M(t, v) = |a(t)|$. Функции $L(t, u)$, $M(t, v)$ rd-непрерывны, поэтому условия теоремы 1 выполнены и состояние равновесия $x(t) \equiv 0$ системы (16) равномерно устойчиво.

В частности, функция

$$a(t) = |\ominus\lambda|\,e_{\ominus\lambda}(t, \alpha) = \frac{\lambda}{1 + \mu(t)\,\lambda}\,e_{\ominus\lambda}(t, \alpha)$$

при непрерывной $\mu(t)$ является непрерывной и регрессивной при $\lambda > 0$. Поскольку

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{1 + \mu(s)\,\lambda}\,e_{\ominus\lambda}(s, \alpha)\,\Delta s = -\int_{\alpha}^{+\infty} \ominus\lambda\,e_{\ominus\lambda}(s, \alpha)\,\Delta s = -e_{\ominus\lambda}(s, \alpha)\Big|_{\alpha}^{+\infty} =$$

$$= -\left[\lim_{s \to +\infty} e_{\ominus\lambda}(s, \alpha) - e_{\ominus\lambda}(\alpha, \alpha)\right] = 1,$$

состояние равновесия $x(t) \equiv 0$ системы (16) равномерно устойчиво.

6. Заключительные замечания. За редким исключением (см. [4]) основным интегральным неравенством, применяемым на временной шкале, является неравенство Гронуолла (см. [3]) и некоторые его модификации. Леммы 4 и 5, приведенные в этой статье, позволяют расширить границы применимости интегральных неравенств на временной шкале в процессе анализа решений динамических уравнений. Их применение может оказаться перспективным в сочетании с методом функции Ляпунова для динамических уравнений (см. [7]).

1. *Dragomir S. S.* The Gronwall type lemmas and applications. – Timisoara: Tipografia Univ. Timisoara, 1987. – 90 p.
2. *Бохнер М., Мартынюк А. А.* Элементы теории устойчивости А. М. Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 3 – 27.
3. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: An introduction with applications. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 358 p.
4. *Pachpatte D. B.* Explicit estimates on integral inequalities with time scale // J. Inequalities in Pure and Appl. Math. – 2006. – **7**, № 4.
5. *Bohner M.* Some oscillation criteria for first order delay dynamic equations // Far East J. Appl. Math. – 2005. – **18**, № 3. – P. 289 – 304.
6. *Peterson A. C., Raffoul Y. N.* Exponential stability of dynamic equations on time scales // Adv. Difference Equat. – 2005. – **2005**, № 2. – P. 133 – 144.
7. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* К теории устойчивости движения нелинейной системы на временной шкале // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 6. – С. 776 – 782.

Получено 30.11.09,
после доработки — 02.07.10