УДК 517.5

Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов
(Ин-т прик. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ОЦЕНКЕ ДИЛАТАЦИЙ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ, БОЛЕЕ ОБЩИХ, ЧЕМ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ

We consider the so-called ring Q-mappings which are the natural generalizations of quasiregular mappings in the sense of geometric definition according to J. Väisälä in terms of modules. We prove that, under the condition of degeneracy of the considered mappings, their inner dilatation is majorized by the function $Q(x)$ up to a constant depending only on the dimension of a space.

Розглядаються так звані кільцеві Q-відображення, що є природним узагальненням квазірегулярних відображень у сенсі геометричного визначення за Ю. Вяйсяля, в якому використано термінологію модулів. Доведено, що внутрішня дилатація зазначених відображень за умови їх невиродженості мажорується функцією $Q(x)$ з точністю до сталої, що залежить лише від вимірності простору.

1. Введение. Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений по Ю. Вяйсяля, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M\left(f(\Gamma)\right) \leq K\, M(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная (см. определение 13.1 в [1], раздел 13, гл. II, а также теорему 34.3 там же (гл. IV)). Другими словами, модуль любого семейства кривых при квазиконформных отображениях всегда искажается не более чем в K раз, где $K < \infty$ — некоторая постоянная. В [1] доказано следующее утверждение (см. теорему 34.6 гл. IV).

Утверждение 1. *Предположим, что гомеоморфизм* $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, *удовлетворяет соотношению* (1) *в области* D *для произвольного семейства кривых* Γ. *Тогда для почти всех* $x \in D$ *имеет место оценка*

$$|J(x,f)| \leq K \cdot l\left(f'(x)\right), \tag{2}$$

где $J(x,f)$ *обозначает якобиан отображения* f *в точке* x, *а* $l\left(f'(x)\right) := \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$.

Утверждение 1 играет важную роль в теории квазиконформных отображений, так как связывает условие (1), являющееся чисто геометрическим, с некоторым аналитическим условием (2). Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M\left(f(\Gamma)\right) \leq \int\limits_D Q(x)\cdot \rho^n(x)\,dm(x), \tag{3}$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1, в метрике ρ, другими словами, $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$, а $Q\colon D \to [1,\infty]$ — наперед заданная функция, измеримая по Лебегу (см., например, [2]). Определим *внутреннюю дилатацию* $K_I(x,f)$ отображения f отношением

$$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l\,(f'(x))^n}\,,$$

если *якобиан* $J(x,f)\colon = \det f'(x) \neq 0$, $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$, если матрица Якоби $f'(x)$ отображения f в точке x ненулевая, а якобиан $J(x,f) = 0$. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Предположим, что некоторое открытое и дискретное отображение* $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, *удовлетворяет оценке вида* (3) *при некоторой измеримой по Лебегу функции* $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$. *Тогда при некоторой постоянной* c_n, *зависящей только от* n, *для почти всех* $x \in D$ *выполнено*

$$K_I(x,f) \leq c_n \cdot Q(x).$$

2. Предварительные сведения. По-видимому, впервые неравенство вида (3) было установлено О. Лехто и К. Вертаненом для квазиконформных отображений на плоскости в [3, с. 221] (раздел 6.3, гл. V), и Ю. Ф. Струговым в работе [4] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем в пространстве. Соотношение (3) установлено В. Я. Гутлянским (совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Вуориненом) в работе [5] для квазиконформных отображений в пространстве, где Q равно $K_I(x,f)$. В монографии В. М. Миклюкова [6] исследовались другие классы отображений, удовлетворяющих оценкам, которые имеют некоторые сходства с упомянутым выше неравенством.

В дальнейшем будем предполагать, что контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ, а только „некоторые”. Именно, ограничимся рассмотрением только тех семейств кривых Γ, которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке заданной области; для наших целей, в частности доказательства утверждения 2, таких семейств Γ вполне достаточно. Неравенство вида (3), выполненное для упомянутых выше семейств кривых, положено в основу определения *кольцевых Q-отображений* (см., например, [2], раздел 7.1, гл. VII).

Всюду D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| < r\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r\}$, $A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n := B(0,1)$ в $\mathbb{R}^n$. Запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f задано в области D и непрерывно. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Приведенные выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x) \ \ dm(x).$$

Пусть $E,\, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,\, b)$.

В работе [7] (раздел 13) Ф. Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Исходя из изложенного, введем в рассмотрение некоторый класс отображений (см., например, [2], раздел 7.1, гл. VII). Пусть $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $S_i := S(x_0, r_i)$. Говорят, что $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M\big(f\,(\Gamma\,(S_1, S_2, A))\big) \le \int\limits_A Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{4}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \ \ge\ 1\,. \tag{5}$$

Условимся говорить, что f является *кольцевым Q-отображением в области* D, если для f соотношения (4), (5) выполнены в каждой точке x_0 области D. Слово „кольцевое” в данном выше определении указывает на происхождение семейства кривых $\Gamma\,(S_1,\,S_2,\,A)$, входящих в левую часть неравенства (4), а „Q-отображение” — на заданную вещественнозначную функцию Q в правой части (4).

Изучение кольцевых Q-отображений, в частности, связано с исследованием классов Соболева, а также с исследованием уравнений типа *Бельтрами*, решения которых удовлетворяют соотношениям вида (4) (см., например, [2], раздел 11.5, гл. XI). Заметим, что K-квазиконформные отображения удовлетворяют соотношениям вида (3), (4) при $Q(x) \equiv K \in [1,\infty)$. Обратно, если f — гомеоморфизм, удовлетворяющий соотношению вида (3) при $Q(x) \equiv K \in [1,\infty)$, то f является K-квазиконформным отображением (см. теорему 34.3 в [1]).

В случае, когда открытое дискретное отображение f удовлетворяет соотношению вида (3) при $Q(x) \equiv K \in [1,\infty)$, функция Q выносится из-под знака интеграла в (3) и в правой части (3) появляется модуль Γ, умноженный на K. В последнем случае f называется *отображением с ограниченным искажением*; по поводу определений и свойств квазирегулярных отображений (или отображений с ограниченным искажением) подробнее см., например, в монографиях [8, 9]. Отметим, что основная трудность при доказательстве какого-либо свойства отображения f, удовлетворяющего соотношению вида (3) или (4), при неограниченной функции $Q(x)$ состоит в том, чтобы проследить поведение правой части соответствующего неравенства в зависимости от поведения функции Q. При изучении отображений с ограниченным искажением подобная трудность, понятно, возникать не будет.

Следующие важные определения можно найти в [9] (см. раздел 3, гл. II). Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $\beta\colon [a,\,b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}\,(\beta(a))$. Кривая $\alpha\colon [a,\,c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если: (i) $\alpha(a) = x$; (ii) $f\circ\alpha = \beta|_{[a,\,c)}$; (iii) если $c < c' \le b$, то не существует кривой $\alpha'\colon [a,\,c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,\,c)}$ и $f\circ\alpha' = \beta|_{[a,\,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}\,(\beta(a))$. Тогда кривая $\beta\colon [a,\,b) \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x (см. следствие 3.3 в [9], гл. II). *Конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, называем пару $E = (A,\, C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* (пишем $f \in ACL$), если в любом n-мерном параллелепипеде P с ребрами, параллельными осям координат, и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Известно, что если $f \in ACL$, то f имеет почти всюду частные производные в D. *Емкостью* конденсатора E называется величина $\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}\, (A,\, C) = \inf\limits_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n dm(x)$, где $W_0(E) = W_0\,(A,\, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A таких, что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$.

Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f\,'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $\|f\,'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{|f\,'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина $K_O(x,f) = \dfrac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x,f) \neq 0$, $K_O(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x,f) = \infty$ в остальных точках. *Линейная дилатация* f в точке x есть величина $H(x,f) = \sqrt[n]{K_I(x,f) K_O(x,f)}$. Известно (см., например, [8], § 3 гл. I), что

$$K_I(x,f) \leq K_O^{n-1}(x,f), \qquad K_O(x,f) \leq K_I^{n-1}(x,f).$$

В работе [10] установлено свойство ACL для гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяющих соотношению вида (3) при локально интегрируемой Q. Там же показана принадлежность таких гомеоморфизмов классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, дифференцируемость почти всюду и оценка внешней дилатации

$$K_O(x,f) \leq C_n \cdot Q^{\,n-1}(x) \tag{6}$$

для почти всех $x \in D$. Более того, открытые дискретные отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющие оценке вида (4) в области D для произвольной неотрицательной измеримой функции η, удовлетворяющей условию „нормировки" (5), и функции $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ дифференцируемы почти всюду (теорема 3.1 в [11]) и удовлетворяют оценке (6) (следствие 3.2 в [11]). В частности, из изложенного выше следует, что внутренняя $K_I(x,f)$ и внешняя $K_O(x,f)$ дилатации для открытых дискретных кольцевых Q-отображений f определены корректно, по крайней мере, при условии локальной интегрируемости функции $Q(x)$ в правой части определяющего соотношения (4) и условии $J(x,f) \neq 0$ почти всюду (см. там же).

Известно, что для конденсатора $E = (A, C)$

$$\operatorname{cap} E \geq \frac{(\inf m_{n-1}\, S)^{\,n}}{[m(A \setminus C)]^{\,n-1}}, \tag{7}$$

где $m_{n-1}\, S$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега $C^{\,\infty}$-многообразия S, являющегося границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A; в (7) точная нижняя грань берется по всем таким S (см. предложение 5 из [12]).

Предложение 1. *Пусть* $E = (A,\, C)$ — *произвольный конденсатор в* $\mathbb{R}^n$ *и* Γ_E — *семейство всех кривых вида* $\gamma\colon\, [a,\, b) \to A$ *с* $\gamma(a) \in C$ *и* $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ *для произвольного компакта* $F \subset A$. *Тогда* $\operatorname{cap} E = M(\Gamma_E)$ (*см. предложение* 10.2 *в* [9], *гл.* II).

3. Формулировка и доказательство основного результата. Следствия.

Теорема 1. *Пусть $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение. Предположим, что $Q \in L^1_{\text{loc}}(D)$ и $J(x,f) \neq 0$ почти всюду. Тогда при почти всех $x \in D$ выполнено соотношение*

$$K_I(x,f) \leq c_n \cdot Q(x)\,,$$

где константа c_n зависит только от n.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 в [11], f дифференцируемо почти всюду в области D. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$ и $J(x,f) > 0$ всюду, где f имеет производную, не равную нулю, и где $J(x,f) \neq 0$. В каждой точке $x \in D$ дифференцируемости отображения f, где $J(x,f) \neq 0$, рассмотрим конденсатор $E_r = (A_r, G_r)$, $A_r = \{y\colon |x-y| < 2r\}$ и $G_r = \{y\colon |x-y| \leq r\}$. Поскольку f — открытое и непрерывное отображение, $f(E_r)$ также является конденсатором в $\mathbb{R}^n$. Пусть Γ_{E_r} и $\Gamma_{f(E_r)}$ — семейства кривых в смысле предложения 1 и Γ^*_r — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E_r)}$ при отображении f с началом в G_r. Покажем, что $\Gamma^*_r \subset \Gamma_{E_r}$.

Предположим противное, т. е. что существует кривая $\beta\colon [a,\,b) \to \mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f(E_r)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha\colon [a,\,c) \to A_r$ лежит в некотором компакте K внутри A_r. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ — компакт в A_r. Заметим, что $c \neq b$, так как в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в $f(A_r)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f(E_r)}$. Рассмотрим множество

$$G = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)\right\} \qquad t_k \in [a,\,c), \quad \lim_{k\to\infty} t_k = c.$$

Отметим, что переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$ в силу непрерывности f будем иметь $f\left(\alpha(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in [a,\,c)$, $t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако $f\left(\alpha(t_k)\right) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в A_r. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ (см. [13], раздел 3.6, гл. I)

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha\left([t_k,\,c)\right)} = \limsup_{k\to\infty} \alpha\left([t_k,\,c)\right) = \liminf_{k\to\infty} \alpha\left([t_k,\,c)\right) \neq \varnothing$$

в силу монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha\left([t_k,\,c)\right)$ и, таким образом, G является связным согласно [13] (п. 9.12, гл. I). Таким образом, в силу дискретности f множество G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha\colon [a,\,c) \to A_r$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha\colon [a,\,c] \to K \subset A_r$ и $f\left(\alpha(c)\right) = \beta(c)$. Снова согласно следствию 3.3 в [9] (гл. II) можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,\,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c,\,b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_{E_r}$. Заметим, что $\Gamma_{f(E_r)} > f(\Gamma^*_r)$, и, следовательно, по предложению 1

$$\operatorname{cap} f(E_r) = M\left(\Gamma_{f(E_r)}\right) \leq M\left(f(\Gamma^*_r)\right) \leq M\left(f(\Gamma_{E_r})\right). \tag{8}$$

Поскольку f является кольцевым Q-отображением в области D, из (8) следует, что

$$\operatorname{cap} f(E_r) \le \int\limits_{r<|x-y|<2r} Q(y)\, \eta^{\,n}(|x-y|)\, dm(y)$$

для любой неотрицательной измеримой функции $\eta\colon (r, 2r) \to [0,\infty]$ такой, что $\int\limits_r^{2r} \eta(t)dt \ge 1$. В частности, рассмотрим однопараметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_r(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{r}, & \text{если} \quad t \in (r, 2r), \\ 0, & \text{если} \quad t \in \mathbb{R} \setminus (r, 2r). \end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{cap}\, f(E_r) \le \frac{2^n \Omega_n}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\, dm(y)\,. \tag{9}$$

С другой стороны, по неравенству (7)

$$\operatorname{cap} f(E_r) \ge \frac{(\inf m_{n-1}\, S)^n}{\big[m\,(f(A_r) \setminus f(G_r))\big]^{\,n-1}}\,, \tag{10}$$

где инфимум берется по всевозможным $C^{\,\infty}$-многообразиям S, являющимся границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего $f(G_r)$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $f(A_r)$. Комбинируя (9) и (10), получаем

$$(\inf m_{n-1}\, S)^{\,n} \le \frac{2^n \Omega_n \,[m(f(A_r) \setminus f(G_r))]^{n-1}}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\, dm(y). \tag{11}$$

При $r \to 0$ множество $f(G_r)$ с точностью до $o(r)$ представляет собой эллипсоид $f^{\,\prime}(G_r)$, являющийся образом шара G_r при линейном отображении f'. Если данный эллипсоид имеет полуоси $0 < a_1 r \le \ldots \le a_n r$, то $m\,(f^{\,\prime}(G_r)) = \Omega_n a_1 \ldots a_n r^n = \Omega_n J(x,f) r^n$. Разместим эллипсоид таким образом, чтобы его центр совпал с началом координат, а главные направления совпали с координатными осями $e_1, \ldots, e_n$. Тогда площадь его поверхности допускает нижнюю оценку

$$\begin{gathered} m_{n-1}\,(\partial f'(G_r)) \ge 2 m_{n-1}\big(\operatorname{Pr}_1\, (f^{\,\prime}(G_r))\big) = \\ = 2\Omega_{n-1} \cdot a_2 \ldots a_n r^{\,n-1} = 2\Omega_{n-1} \frac{J(x,f)}{l\,(f'(x))} r^{\,n-1}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\operatorname{Pr}_1(\cdot)$ обозначает проекцию на гиперплоскость, перпендикулярную вектору e_1. Следовательно, согласно (11) и (12)

$$\begin{gathered} \left[2\Omega_{n-1} \frac{J(x,f)}{l\,(f^{\,\prime}(x))} r^{n-1} - o(r^{\,n-1})\right]^n \le \left[m_{n-1} \partial f^{\,\prime}\,(G_r) - o\left(r^{n-1}\right)\right]^{\,n} \le \\ \le \frac{2^{\,n} \Omega_n \,[m\,(f(A_r) \setminus f(G_r))]^{n-1}}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\, dm(y). \end{gathered} \tag{13}$$

Разделив неравенство (13) на $r^{\,n(n-1)}$, устремив r к 0 и применив теорему Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла (см. [14]), будем иметь

$$\left[\frac{J(x,f)}{l\left(f'(x)\right)}\right]^n \le [J(x,f)]^{\,n-1}\, c_n\cdot Q(x)$$

для почти всех $x\in D$. Следовательно, поскольку по условию теоремы 1 выполнено условие $J(x,f)\ne 0$ почти всюду, получаем

$$K_I(x,f)=\frac{J(x,f)}{\left(l\left(f'(x)\right)\right)^n}\le c_n\cdot Q(x)$$

для почти всех $x\in D$.

***Следствие* 1.** *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в области D. Предположим, что $Q\in L^1_{\rm loc}(D)$ и $J(x,f)\ne 0$ почти всюду. Тогда почти всюду*

$$H(x,f)\le c_n\cdot Q(x),$$

где константа c_n зависит только от n.

***Следствие* 2.** *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в области D. Предположим, что $Q\in L^1_{\rm loc}(D)$ и $J(x,f)\ne 0$ почти всюду. Тогда $H(x,f)\in L^1_{\rm loc}(D)$ и $K_I(x,f)\in L^1_{\rm loc}(D)$.*

***Следствие* 3.** *Если, дополнительно, f в условиях теоремы* 1 *и следствий* 1, 2 *удовлетворяет более сильной оценке вида* (3) *для произвольных кривых γ семейства Γ и $\rho\in{\rm adm}\,\Gamma$, то и без дополнительного условия $J(x,f)\ne 0$ почти всюду имеют место соответствующие заключения*; *последнее условие автоматически следует из* (3) *при $Q\in L^1_{\rm loc}$* (*см., например, следствие* 3.5 *в* [11]).

1. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer, 1971. – **229**.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
3. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973.
4. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859 – 861.
5. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
6. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. – Волгоград: Изд-во Волгоград. ун-та, 2005.
7. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
8. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
9. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Results Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
10. *Салимов Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2008. – **72**, № 5. – С. 141 – 148.
11. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 6. – С. 131 – 158.
12. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185 – 206.
13. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1942.
14. *Saks S.* Theory of the integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1937.

Получено 12.02.10