УДК 517.986.7

Ю. В. Богданський (Ін-н прикл. систем. аналізу Нац. техн. ун-ту України „КПІ”, Київ),
В. М. Статкевич (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Nonlinear didderential equations and boundary-value problems with essentially infinite-dimensional operators (of the Laplace – Levy type) are considered. An analog of the Picard theorem is proved.

Рассмотрены нелинейные дифференциальные уравнения и краевые задачи с существенно бесконечномерными операторами (типа Лапласа – Леви). Доказан аналог теоремы Пикара.

Класичний оператор Лапласа – Леві було введено в роботі [1]. Сучасний стан теорії оператора Лапласа – Леві викладено в монографії [2]. Існує велика кількість публікацій з цієї тематики (див., зокрема, [3, 4]). В роботі [5] запропоновано суттєво нескінченновимірний оператор як узагальнення оператора Лапласа – Леві, властивостям цього оператора та задачам, що пов’язані з ним, присвячено роботи [5 – 7]. На відміну від скінченновимірного випадку цей оператор другого порядку задовольняє лейбніцевську властивість — є диференціюванням алгебри гладких функцій. Останній факт дав можливість в роботі [8] розглянути лінійні суттєво нескінченновимірні рівняння на зразок звичайних диференціальних рівнянь.

1. Нехай H — нескінченновимірний сепарабельний дійсний гільбертів простір, $B_C(H)$ — банахів простір самоспряжених обмежених лінійних операторів на H, J — конус невід’ємних лінійних функціоналів на $B_C(H)$, $j \in J$ — ненульовий функціонал такий, що всі оператори з $B_C(H)$ скінченного рангу належать його ядру; функціонал, який має наведену властивість, згідно з [5], називаємо суттєво нескінченновимірним.

Множину $D \subset B_C(H)$ називаємо майже компактною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subset B_C(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$ та $d > 0$ такі, що $K + Q_{n,d}$ є ε-сіткою для D (тут $Q_{n,d}$ — множина операторів з $B_C(H)$, ранг яких не перевищує n, а норма не перевищує d).

Зафіксуємо $R > 0$. Нехай $B_R = \{x \in H \,|\, \|x\| \le R\}$ — куля радіуса R. Через Z позначимо множину всіх дійснозначних функцій класу $C^2(H)$, носії яких належать B_R, u'' рівномірно неперервна на H, а множина $\{u''(x) \,|\, x \in B_R\}$ є майже компактною. Нехай X — замикання Z за нормою $\sup_{x \in B_R} |u(x)|$, X є комутативною банаховою алгеброю відносно поточкових операцій. Для довільної функції $g \in C(\mathbb{R})$ такої, що $g(0) = 0$, виконується $g \circ u \in X$.

Суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор $L : X \supset Z \to X$ задається формулою $(Lu)(x) = \dfrac{1}{2} j(u''(x))$ [5, 6]. Він допускає замикання $A = \bar{L}$, визначене на $D(A)$, яке є генератором (C_0)-півгрупи стиску $T(t)$ у просторі X, при цьому $\forall\, t \ge 0 \;\; \forall\, u \in Z : T(t)u \in Z$.

Півгрупа $T(t)$ має такі властивості [6]:

1) існує $t_0 > 0$ таке, що $T(t_0) = 0$ (нільпотентність півгрупи);

2) $\forall\, u,\ v \in X \;\; \forall\, t \ge 0 : T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v$ (мультиплікативність півгрупи);

3) $\forall\, u \in X \quad \forall\, t \geq 0 \quad \forall\, g \in C(\mathbb{R})$ такої, що $g(0) = 0 : T(t)\big(g(u)\big) = g\big(T(t)\,u\big)$.

Позначимо через Y клас таких поверхонь в H, які можна подати у вигляді $S = \big\{x \in H \mid g(x) = 1\big\}$, де $g \in Z$ та $\inf_{x\in S}\|g'(x)\| > 0$. S_ε — ε-окіл поверхні S.

Згідно з [7] відкриту обмежену область $G \subset H$ з межею S класу Y будемо називати L-опуклою, якщо $\forall\, x \in S_\varepsilon \bigcap G : g(x) > 1$ та $\sup_{x\in S}(Lg)(x) < 0$. Позначимо через $\bar{G}$ її замикання.

Через $Z(G)$ позначимо множину всіх дійсних функцій класу $C^2(G)$, у яких $u''(x)$ рівномірно неперервна на G, а множина $\big\{u''(x)\,\big|\, x \in G\big\}$ є майже компактною. Нехай $X(G)$ — замикання $Z(G)$ за нормою $\sup_{x\in S}|u(x)|$. Зазначимо, що $x\big|_G \in Z(G)$ для довільної $u \in Z$; $x\big|_G \in X(G)$ для довільної $u \in X$. Задамо оператор $L_G : X(G) \supset Z(G) \to X(G)$ формулою $(L_G)(x) = = \dfrac{1}{2}\, j\big(u''(x)\big)$. Він коректно визначений та допускає замикання $A_G = \bar{L}_G$, визначене на $D(A_G)$. Очевидно, що $\big(u \in D(A)\big) \Rightarrow \Big(u\big|_G \in D(A_G)\Big)$.

У роботі [7] доведено, що існує і до того ж єдина функція $\theta(x)$, рівномірно неперервна на $\bar{G}$, яка задовольняє умови: $\theta(x) > 0$ на G, $\theta(x) = 0$ на S, $\theta\big|_G \in X(G)$; $\theta'(x)$ існує і рівномірно неперервна на $\bar{G}$; $A_G\Big(\theta\big|_G\Big) = -1$ скрізь в області G (фундаментальна функція області G).

Вкладення поверхні S в H індукує ріманову метрику на поверхні S. Нехай ∇ — зв'язність Леві – Чивіти, яка відповідає цій метриці. Для кожного $x \in S$ простір H розкладається в ортогональну суму $H = T_xS \oplus (T_xS)^{\perp}$. Оператору $\nabla^2 u(x)$, визначеному на дотичному просторі T_xS, відповідає оператор $\nabla^2 u(x) \oplus 0 \in B_C(H)$, який теж позначимо через $\nabla^2 u(x)$. Множину дійсних функцій на поверхні S, у яких $\nabla^2 u$ існує і рівномірно неперервна на S та $\Big\{\nabla^2 u(x)\,\big|\, x \in S\Big\}$ є майже компактною множиною, замкнемо за нормою $\sup_{x\in S}|u(x)|$; замикання позначимо через $X(S)$.

Нехай на поверхню S класу Y додатково накладено умови: $g(x) \in Z$, g''' існує та рівномірно неперервна на H, множина $\Big\{\big(g'(\cdot), z\big)''(y) \mid z \in H,\ \|z\| \leq 1,$ $y \in S\Big\}$ є майже компактною множиною, а $\varphi \in X(S)$. Згідно з [7] існує і до того ж єдина функція v, визначена на $\bar{G}$, така, що $v\big|_G \in X(G)$, $A_G\Big(v\big|_G\Big) = 0$ та $v\big|_S = \varphi$, її можна визначити за формулою $v(x) = \big(T(\theta(x))\bar{\varphi}\big)(x)$, де $\bar{\varphi}$ — довільне продовження φ на H. У роботі [7] доведено, що довільну функцію $u \in X(G)$ можна продовжити до функції $\bar{u} \in X$; неперервне продовження u на S дає функцію $\hat{u} \in X(S)$.

2. Позначимо через $\mathcal{F}(Q)$ банахову алгебру усіх дійснозначних обмежених функцій, визначених на довільній множині Q (відносно поточкових операцій, з sup-нормою).

Нехай $\mathcal{X}$ — замкнена підалгебра в $\mathcal{F}(Q)$, $T(t)$ — (C_0)-півгрупа стиску в $\mathcal{X}$ з генератором $\mathcal{A} = T'(0)$. Нехай півгрупа $T(t)$ є нільпотентною та мультиплікативною (див. п. 1). Тоді для будь-якої $g \in C(\mathbb{R})$ такої, що $g(0) = 0$, для будь-якого $t \ge 0$, $u \in \mathcal{X}$ маємо $T(t)\big(g(u)\big) = g\big(T(t)u\big)$, зокрема $T(t)\big(|u|\big) = |T(t)u|$.

Нехай $F: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — нелінійне відображення, що задовольняє умову: $\exists C > 0$ $\forall u, v \in \mathcal{X}$: $|F(u) - F(v)| \le C|u - v|$ (цю умову надалі природно називати „умовою Ліпшиця”).

Теорема 1 (абстрактний варіант теореми Пікара)**.** *За даних умов рівняння*

$$\mathcal{A}u = Fu \tag{1}$$

має і до того ж єдиний розв'язок в $\mathcal{X}$.

Доведення. Для $f \in \mathcal{X}$ рівняння $\mathcal{A}u = f$ має (єдиний) розв'язок $u = -\int_0^{t_0} T(t) f\, dt$. Рівняння (1) еквівалентне рівнянню

$$u = -\int_0^{t_0} T(t)(Fu)\,dt = g(u), \tag{2}$$

$$\left|g^m(u_1) - g^m(u_2)\right| \le \int_0^{t_0} T(t)\Big(\Big|F\big(g^{m-1}(u_1)\big) - F\big(g^{m-1}(u_2)\big)\Big|\Big)dt \le$$

$$\le C\int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} T(t+s)\Big(\Big|F\big(g^{m-2}(u_1)\big) - F\big(g^{m-2}(u_2)\big)\Big|\Big)ds \le \ldots$$

$$\ldots \le C^{m-1}\int_0^{t_0} dt_1 \ldots \int_0^{t_0} dt_m T(t_1 + \ldots + t_m)\big(\left|F(u_1) - F(u_2)\right|\big) \le$$

$$\le \frac{C^{m-1}t_0^m}{m!}\left|F(u_1) - F(u_2)\right|,$$

звідки $\left\|g^m(u_1) - g^m(u_2)\right\| \le \dfrac{C^m t_0^m}{m!}\|u_1 - u_2\|$ та існує m, для якого g^m є стиском в $\mathcal{X}$. Тож рівняння (2) (а тому і рівняння (1)) має і до того ж єдиний розв'язок.

Наслідок 1. *Нехай* $\mathcal{X} = X$ *— функціональна алгебра з п.* 1, $T(t)$ — (C_0)-*півгрупа з генератором* $T'(0) = A$. *Нехай* $f(x, p)$ *— функція на* $H \times \mathbb{R}$, *яка має наступні властивості: для будь-якого* $p \in \mathbb{R}$ $f(\cdot, p) \in X$ *та* f *є ліпшицевою за другим аргументом* (*рівномірно відносно першого*): $\exists C > 0$ $\forall x \in H$: $|f(x, u) - f(x, v)| \le C|u - v|$. *Тоді рівняння*

$$(Au)(x) = f\big(x, u(x)\big)$$

має і до того ж єдиний розв'язок в X.

Доведення. Досить показати, що для кожної функції $u \in X$ функція $f\big(x, u(x)\big)$ належить до X, а також ліпшицевість (в сенсі теореми 1) відображення $F: X \ni u \mapsto f\big(\cdot, u(\cdot)\big) \in X$, після чого скористатись теоремою 1.

Лема 1 (узагальнена теорема Стоуна – Вейєрштрасса)**.** *Нехай* Y *— замкнена підалгебра* $\mathcal{F}(Q)$, $1 \in Y$; T *— хаусдорфів компакт*; $C(T; Y)$ *— алгебра всіх неперервних функцій на* T *зі значеннями в* Y; W *— підалгебра в* $C(T; Y)$, *що містить тотожно одиничну функцію та поділяє точки*: *для будь-яких* t_1,

$t_2 \in T$ існує $g \in W$, для якої $g(t_1) - g(t_2)$ — оборотний елемент в Y. Тоді W є щільною в $C(T; Y)$.

Доведення аналогічне доведенню класичної теореми Стоуна – Вейєрштрасса з використанням структурних властивостей алгебри Y.

Продовжимо доведення наслідку 1. Приєднаємо до алгебри X одиницю, тобто будемо розглядати алгебру Y функцій вигляду $c \cdot 1 + u$, де $u \in X$. За лемою 1 кожну функцію з $C([a, b]; Y)$ можна наблизити многочленами вигляду $q(p) = \sum_{k=0}^{m} h_k p^k$, де $h_k \in Y$.

Виберемо тепер $u \in X$, $[a; b] = [\inf_H u; \sup_H u]$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує функція $\sum_{k=0}^{m} h_k u^k$, для якої $\sup_H \left| f(x, u(x)) - \sum_{k=0}^{m} h_k(x) u^k(x) \right| \le \varepsilon$. Тому $f(x, u(x)) \in Y$. Оскільки, за умовою наслідку 1, $\operatorname{supp} f(x, u(x))$ є обмеженим, то $f(x, u(x)) \in X$.

Ліпшицевість відображення F очевидна.

3. Нехай G — L-опукла обмежена область в H з межею S, що задовольняє умови гладкості класу C^3, сформульовані в п. 1; $u: \bar{G} \to \mathbb{R}$. Поставимо крайову задачу

$$A_G(u|_G) = F(u|_G), \tag{3}$$

$$u|_S = \varphi \in X(S) \tag{4}$$

і доведемо її коректність за певних умов на нелінійне відображення $F\colon X(G) \to \to X(G)$. Для цього нам знадобиться явний вигляд розв'язку такої крайової задачі:

$$A_G(u|_G) = v \in X(S), \tag{5}$$

$$u|_S = \varphi \in X(S). \tag{6}$$

Лема 2. *Розв'язок задачі* (5), (6) *має вигляд* $u(x) = (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x) - - \int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar{v})(x)\,dt$ *(тут $\bar{\varphi}$, $\bar{v}$ — продовження функцій φ, v на весь простір H, існування яких пояснювалось в п.* 1).

Доведення. Як було доведено в [7] та нагадано в п. 1, для функції $u_1(x) = = (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)$ ($x \in \bar{G}$) виконуються співвідношення $A_G(u_1|_G) = 0$, $u_1|_S = \varphi$. Оскільки $\theta|_S = 0$, то досить довести, що для функції $u_2(x) = = -\int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar{v})(x)\,dt$

$$A_G(u_2|_G) = v. \tag{7}$$

Цей факт доводиться за наступною схемою (аналогічно доведенню леми 1 з [9]). Виберемо $v \in D(A_G)$, а також послідовності $\{\eta_n\} \subset Z(G)$, $\{v_n\} \subset Z(G)$, для яких $\eta_n \to \theta|_G$, $L_G \eta_n \to -1$ при $n \to \infty$ та $v_n \to v$, $L_G v_n \to A_G v$ при $n \to \infty$. Через $\bar{\eta}_n$, $\bar{v}_n$ позначимо відповідні продовження функцій η_n, v_n на весь простір H. Розглянемо послідовність $\bar{F}_n(x) = -\int_0^{\bar{\eta}_n(x)} (T(t)\bar{v}_n)(x)\,dt$. Нескладні обчислення $\bar{F}_n'$, $\bar{F}_n''$, $L\bar{F}_n$ та наступний граничний перехід доводять, що $A_G(u_2|_G) = v$.

Щільність $D(A_G)$ в $X(G)$ дозволяє стверджувати, що рівність (7) виконується для всіх $v \in X(G)$.

Зауважимо, що процедура продовження функції $u \in X(G)$ до функції $\overline{u} \in X$ [7] є гомоморфізмом алгебр зі збереженням sup-норми.

Теорема 2. *Нехай відображення* $F: X(G) \to X(G)$ *задовольняє умову Ліпшиця. Тоді задача* (3), (4) *має і до того ж єдиний розв'язок.*

Доведення. Як випливає з леми 2, крайова задача (3), (4) еквівалентна рівнянню в $X(G)$: $u(x) = \big(T(\theta(x))\overline{\varphi}\big)(x) - \int_0^{\theta(x)} \Big(T(t)\,\overline{F(u)}\Big)(x)\,dt$. Тож достатньо перевірити, що певний степінь відображення $g: X(G) \to X(G)$, що визначено за формулою $\big(g(u)\big)(x) = \big(T(\theta(x))\overline{\varphi}\big)(x) - \int_0^{\theta(x)} \Big(T(t)\,\overline{F(u)}\Big)(x)\,dt$, є стиском. Нехай $u_1, u_2 \in X(G)$, тоді

$$\big|g^m(u_1) - g^m(u_2)\big| \le \int_0^{\theta(\cdot)} \left(T(t)\left|\overline{F(g^{m-1}u_1)} - \overline{F(g^{m-1}u_2)}\right|\right)\Bigg|_G dt \le$$

$$\le \int_0^{\theta(\cdot)} \left(T(t)\left|\overline{F(g^{m-1}u_1) - F(g^{m-1}u_2)}\right|\right)\Bigg|_G dt \le$$

$$\le C\int_0^{\theta(\cdot)} \left(T(t)\left|\overline{g^{m-1}u_1) - g^{m-1}u_2)}\right|\right)\Bigg|_G dt \le$$

$$\le C\int_0^{t_0} dt \left(T(t)\,\overline{\int_0^{\theta(\cdot)} \left(T(s)\left|\overline{F(g^{m-2}u_1)} - \overline{F(g^{m-2}u_2)}\right|\right)\Bigg|_G ds}\right)\Bigg|_G \le$$

$$\le C\int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} \left(T(t+s)\left|\overline{F(g^{m-2}u_1) - F(g^{m-2}u_2)}\right|\right)\Bigg|_G ds \le \ldots$$

$$\ldots \le \frac{C^m t_0^m}{m!}\,|u_1 - u_2|,$$

звідки й випливає існування m, для якого g^m є стиском в $X(G)$.

Наслідок 2. *Нехай* $f(x, p)$ *— функція на* $G \times \mathbb{R}$, *яка має такі властивості*: *для будь-якого* $p \in \mathbb{R}$ $f(\cdot, p) \in X(G)$ *та* f *є ліпшицевою за другим аргументом* (*рівномірно відносно першого*): $\exists C > 0 \quad \forall x \in G: \big|f(x, u) - f(x, v)\big| \le C|u - v|$. *Тоді крайова задача*

$$\big(A_G(u|_G)\big)(x) = f\big(u|_G(x)\big), \quad u|_S = \varphi \in X(S)$$

має і до того ж єдиний розв'язок.

Доведення. За аналогією з доведенням наслідку 1 слід застосувати лему 1 до алгебри $X(G)$.

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Feller M. N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153 p.

3. *Феллер М. Н.* Заметки о бесконечномерных нелинейных параболических уравнениях // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 690 – 701.
4. *Феллер М. Н.* Краевые задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви в классе Гато // Там же. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1564 – 1574.
5. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Там же. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781 – 784.
6. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярными эллиптическими операторами // Там же. – 1989. – **41**, № 5. – С. 584 – 590.
7. *Богданский Ю. В.* Задача Дирихле для уравнения Пуассона с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором // Там же. – 1994. – **46**, № 7. – С. 803 – 808.
8. *Богданський Ю. В., Статкевич В. М.* Лінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірними операторами // Наук. вісті НТУУ „КПІ”. – 2008. – №2. – С. 144 – 147.
9. *Статкевич В. М.* Об одной краевой задаче с существенно бесконечномерным оператором // Spectral and Evolution Problems. – 2010. – **20**. – Р. 189 – 192.

Одержано 29.04.10