УДК 512.628.2

Н. В. Григоренко (Нац. аграр. ун-т, Киев)

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА

We show that, by applying the Galois differential theory, one can essentially improve the description of algebraic geometric operators. In particular, we obtain the complete description of all elementary algebraic geometric operators, present simple formulas for the construction of all such second-order operators, and give a criterion for testing algebraic geometric properties of a linear differential operator with meromorphic coefficients.

Показано, що, використовуючи диференціальну теорію Галуа, можна суттєво покращити опис алгебро-геометричних операторів. Зокрема, отримано повний опис усіх елементарних алгебро-геометричних операторів, наведено прості формули для побудови всіх таких операторів другого порядку, надано критерій перевірки на алгебро-геометричність для лінійного диференціального оператора з мероморфними коефіцієнтами.

Изучение коммутирующих линейных дифференциальных операторов было начато Флоке [1] еще в 1879 г. В конце прошлого столетия интерес к их изучению снова возобновился. Это связано с тем, что такие операторы появляются (уже под названием алгебро-геометрических) в так называемых парах Лакса для представления систем Гельфанда – Дикого. Одна из недавних работ Р. Вайкарда [2] содержит все необходимые определения и основные результаты. Более подробное изложение тех же вопросов можно найти в статье [3].

Несмотря на длительный период изучения, алгебро-геометрические оператор все же исследованы мало. Не решена, например, задача построения всех алгебро-геометрических операторов второго порядка. По-видимому, это объясняется тем, что в исследованиях предыдущих лет, в основном, преобладал аналитический подход.

Цель настоящей работы — показать, что, применяя дифференциальную теорию Галуа, можно существенно улучшить описание алгебро-геометрических операторов. В частности, мы описываем все элементарные алгебро-геометрические операторы и приводим простые формулы для генерации таких операторов порядка 2.

Следующий технический результат полезен в приложениях.

Теорема 1. *Пусть M — дифференциальное поле характеристики нуль с полем констант C, H — подгруппа группы дифференциальных автоморфизмов поля M над полем C, M^H — поле инвариантов H, F — сильнонормальное расширение M^H в поле M ($M^H \subset F \subset M$), H_F — ограничения автоморфизмов из H до изоморфизмов F, $\overline{H}_F$ — замыкание H_F в группе Галуа* $\mathrm{Gal}\,(F/M^H)$. *Тогда*

$$\mathrm{Gal}\,(F/M^H) = \overline{H}_F.$$

Доказательство. Поля инвариантов групп $\overline{H}_F$ и $\mathrm{Gal}\,(F/M^H)$ совпадают, поэтому, согласно теореме 3(b) [4, с. 398], совпадают и эти группы.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел и $\mathbb{W} = \mathbb{C}(\rho(z), \rho'(z))$, где $\rho(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Любое сильнонормальное расширение поля $\mathbb{W}$ в поле функций, мероморфных в комплексной плоскости, имеет коммутативную группу Галуа.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{M}$ поле функций, мероморфных в комплексной плоскости, а через H решетку периодов $\rho(z)$. Решетка H действует на $\mathbb{M}$ по формуле $f(z) \mapsto f(z+h)$, $h \in H$, $f \in \mathbb{M}$, и, согласно теории

© Н. В. ГРИГОРЕНКО, 2009

эллиптических функций (см. [5], § 20.1), $\mathbb{M}^H = \mathbb{W}$. Если F — сильнонормальное расширение $\mathbb{W}$ в поле $\mathbb{M}$, то согласно теореме 1 $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{W}) = \overline{H}_F$, но группа H коммутативна, поэтому коммутативна группа H_F, следовательно, коммутативна алгебраическая группа $\overline{H}_F$, как замыкание коммутативной группы.

Доказательства следующих двух теорем полностью аналогичны доказательству теоремы 2, поэтому мы их опускаем.

Теорема 3. *Пусть* $p \in \mathbb{C}^*$ *и* $\mathbb{L}_p$ *— поле всех мероморфных функций данного периода* p. *Любое сильнонормальное расширение поля* $\mathbb{L}_p$ *в поле мероморфных функций имеет коммутативную группу Галуа.*

Теорема 4. *Любое сильнонормальное расширение поля комплексных чисел в поле мероморфных функций имеет коммутативную группу Галуа.*

***Замечание* 1.** Известная (см., например, [2], теорема 4) теорема Пикара утверждает, что если линейный дифференциальный оператор над $\mathbb{W}$ имеет только мероморфные нули, то он обладает нулем, который является эллиптической функцией второго рода. Теорема 2 уточняет теорему Пикара и позволяет описать все нули такого оператора. Чтобы это показать, нам потребуются следующие две леммы, в которых мы используем обозначения из теоремы 2.

Лемма 1. *Пусть* $f(z) \in \mathbb{M}$ *и* $f'(z) \in \mathbb{M}$. *Тогда*

$$f(z) = c_1\zeta(z) + c_2 z + g(z),$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $g(z) \in \mathbb{W}$ *и* $\zeta(z)$ *— дзета-функция Вейерштрасса.*

Доказательство. Согласно теории эллиптических функций (см. [5], § 20.52), $f'(z)$ может быть представлена в виде

$$f'(z) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\zeta^{(j)}(z - a_k) + c_2,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — неприводимые относительно решетки периодов полюсы $f'(z)$, а c_{kj}, c_2 — некоторые константы. Поскольку $f'(z)$ — производная мероморфной функции, $c_{k0} = 0$ для любого k, следовательно, она может быть записана в виде

$$f'(z) = -\sum_{k=1}^{m} c_{k1}\rho(z - a_k) - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\rho^{(j)}(z - a_k) + c_2.$$

Ясно, что двойная сумма представляет собой производную от некоторой эллиптической функции $\tilde{g}(z)$, поэтому, интегрируя предыдущее равенство, получаем

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{m} c_{k1}\zeta(z - a_k) + c_2 z + \tilde{g}(z).$$

Учитывая, что разность $\zeta(z - a_k) - \zeta(z)$ инвариантна относительно решетки периодов H, последнюю сумму можно заменить одним слагаемым $c_1\zeta(z)$, т. е. $f(z) = c_1\zeta(z) + c_2 z + g(z)$ для подходящих констант c_1, c_2 и эллиптической функции $g(z)$.

Следствие. *Любое расширение Пикара – Вессио поля* $\mathbb{W}$ *в поле* $\mathbb{M}$ *с унипотентной группой Галуа содержится в поле* $\mathbb{W}(z, \zeta(z))$.

Лемма 2. *Пусть* $f(z) \in \mathbb{M}$ *и* $t = f'/f$. *Функция* $t(z)$ *тогда и только тогда эллиптическая, когда*

$$t(z) = \sum_{k=1}^{m} m_k \zeta(z - a_k) + c,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — *числа, неприводимые относительно решетки периодов* H, $c \in \mathbb{C}$, $m_k \in \mathbb{Z}$ *и* $\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$.

Доказательство. Пусть $t(z) \in \mathbb{W}$ и $a_1, \ldots, a_n$ — совокупность неприводимых полюсов $t(z)$. Поскольку $t(z)$ — логарифмическая производная мероморфной функции, ее главная часть вблизи полюса a_k равна $m_k (z - a_k)^{-1}$, где $m_k \in \mathbb{Z}$. Так как сумма вычетов эллиптической функции в ячейке равна нулю, получаем $\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$. Выражая, как в лемме 1, функцию $t(z)$ через $\zeta(z)$, получаем

$$t(z) = \sum_{k=1}^{n} m_k \zeta(z - a_k) + c.$$

Обратно, пусть $t(z) = \sum_{k=1}^{n} m_k \zeta(z - a_k) + c$, где $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные числа, неприводимые относительно решетки периодов H, $c \in \mathbb{C}$, $m_k \in \mathbb{Z}$ и $\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$. Положим

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} \sigma(z - a_k)^{m_k} \exp(cz),$$

где $\sigma(z)$ — обычная σ-функция (см. [5], § 20.42). Легко проверить, что $f(z) \in \mathbb{M}$ и $t = f'/f$. Нетрудно убедиться, что $t(z)$ инвариантна относительно решетки периодов H, поэтому $t(z) \in \mathbb{W}$.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть* $f(z)$ — *элемент Пикара – Вессио над* $\mathbb{W}$ *и* $f(z) \in \mathbb{M}$. *Тогда*

$$f(z) \in \mathbb{W}[z, \zeta(z), \eta_1, \ldots, \eta_n, \eta_1^{-1}, \ldots, \eta_n^{-1}, \exp(\mu_1 z), \ldots, \exp(\mu_m z)],$$

где $\eta_1 = \sigma(z - a_1)/\sigma(z), \ldots, \eta_n = \sigma(z - a_n)/\sigma(z)$, $a_1, \ldots, a_n$ — *комплексные числа, неприводимые относительно решетки периодов* H, *и* $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}^*$.

Доказательство. Так как $f(z)$ — элемент Пикара – Вессио над $\mathbb{W}$, он содержится в некотором расширении F поля $\mathbb{W}$ в поле $\mathbb{M}$. Согласно теореме 2, группа Галуа этого расширения коммутативна. Это означает [6], что F порождается над $\mathbb{W}$ присоединением некоторого числа примитивных и экспоненциальных элементов, которые, в соответствии с предложением 10.2 [7, с. 4148], порождают кольцо R элементов Пикара – Вессио поля F над полем $\mathbb{W}$. Согласно леммам 1 и 2, все такие элементы получаются из функций $z, \zeta(z), \eta_1, \ldots, \eta_n, \eta_1^{-1}, \ldots, \eta_n^{-1}, \exp(\mu_1 z), \ldots, \exp(\mu_m z)$ с помощью кольцевых операций. Поскольку $\eta_i' / \eta_i = \zeta(z - a_k) - \zeta(z) \in \mathbb{W}$, η_i — элемент Пикара – Вессио над $\mathbb{W}$, то

$$R = \mathbb{W}[z, \zeta(z), \eta_1, \ldots, \eta_n, \eta_1^{-1}, \ldots, \eta_n^{-1}, \exp(\mu_1 z), \ldots, \exp(\mu_m z)]$$

и $f(z) \in R$.

Далее F всегда, если не оговорено противное, обозначает обыкновенное дифференциальное поле характеристики нуль с полем констант C и оператором дифференцирования δ, $\mathfrak{A}$ — универсальное дифференциально-полевое расширение F (см. [4, с. 133]) и $\overline{C}$ — алгебраическое замыкание C в $\mathfrak{A}$. Аналогично предполагается, если нет специальных уточнений, что коэффициенты любого рассматриваемого линейного дифференциального оператора принадлежат $\mathfrak{A}$. Мы используем определение алгебро-геометрических операторов из [2, с. 3].

Как показал Р. Вайкард [2], при изучении алгебро-геометрических операторов можно ограничиться рассмотрением операторов вида $L \equiv \delta^n + q_{n-2}\delta^{n-2} + \ldots$ $\ldots + q_0$, $n \geq 2$. Будем называть оператор такого вида нормализованным.

Пусть L — нормализованный линейный дифференциальный оператор над F. Назовем оператор L *элементарным*, если существуют многочлен $p(x)$ над F вида $p \equiv x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0$ и многочлен $g(x)$ над C вида $g \equiv x^n +$ $+ c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_0$ такие, что для любого $\mu \in C$ существуют $\lambda \in \overline{C}$ и $\upsilon \in \mathfrak{A}^*$ с такими свойствами: $y = p(\lambda)\upsilon$ — решение уравнения $L(y) = \mu y$, $g(\lambda) = \mu$, $\delta\upsilon = \lambda\upsilon$.

Введем следующее обозначение. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем констант. Обозначим через L_V линейный дифференциальный оператор, определенный формулой

$$L_V(y) = \frac{W(\eta_1, \ldots, \eta_n, y)}{W(\eta_1, \ldots, \eta_n)},$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — базис V и W — определитель Вронского.

Следующая теорема дает описание всех элементарных операторов.

Теорема 6. *Пусть L_0 — нормализованный линейный дифференциальный оператор над полем констант C характеристики 0, $\mathfrak{R}$ — кольцо элементов Пикара – Вессио над C и V — конечномерное C-векторное подпространство кольца $\mathfrak{R}$, инвариантное относительно L_0. Тогда имеет место равенство $L_V L_0 = L L_V$ для некоторого оператора L. Оператор L, определенный этим равенством, элементарный, и любой элементарный оператор может быть получен таким способом.*

Доказательство. Действительно, так как V инвариантно относительно L_0, любой нуль оператора L_V будет нулем оператора $L_V L_0$. Это означает, что имеет место равенство $L_V L_0 = L L_V$ для некоторого оператора L. Покажем теперь, что L — элементарный оператор. Определим многочлены $p(x)$ и $g(x)$ равенствами $p \equiv x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0$, $g \equiv x^n + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_0$, где $a_{m-1}, \ldots, a_0$ и $c_{n-2}, \ldots, c_0$ — коэффициенты операторов L_V и L_0 соответственно. Предположим, что μ — произвольная константа, и выберем λ так, чтобы $g(\lambda) = \mu$. Пусть $\upsilon \in U^*$ и $\delta\upsilon = \lambda\upsilon$. Тогда $L(p(\lambda)\upsilon) = L(L_V(\upsilon)) =$ $= L_V(L_0(\upsilon)) = L_V(g(\lambda)\upsilon) = L_V(\mu\upsilon) = \mu L_V(\upsilon)$, что доказывает элементарность оператора L. Обратно, пусть L — элементарный оператор и $p(x)$, $g(x)$ — ассоциированные с ним многочлены. Определим операторы L_0 и L^* через коэффициенты многочленов $g(x)$ и $p(x)$ соответственно. Тогда, как показано в ходе доказательства теоремы 3 из [2, с. 4], $L^* L_0 = LL^*$ и $\ker L^* \subset \Re$.

Теорема доказана.

Теорема 7. *Любой рациональный или просто периодический алгебро-геометрический потенциал является элементарным.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, F обозначает либо поле рациональных функций $\mathbb{C}(z)$, либо поле периодических функций $\mathbb{C}(\exp(2\pi iz/p))$ простого периода p, $\delta = d/dz$ и $L \equiv \delta^2 - q(z)$ — алгебро-геометрический оператор над F. Согласно формуле 2.8 [8, с. 512], существуют собственное значение λ оператора L и соответствующая ему собственная функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi^2 \in F$. Следовательно, $q(z) + \lambda = \varphi''/\varphi$, но правая часть этого равенства может быть представлена в виде

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{1}{4}\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{h'}{h}\right)',$$

где $h = \varphi^2$. Рассматривая логарифмическую производную h'/h и ее производную, легко убеждаемся, что выражение справа стремится к нулю при z, стремящемся к бесконечности, если $h \in \mathbb{C}(z)$, и ограничено на концах полосы периодов, если $h \in \mathbb{C}(\exp(2\pi iz/p))$. Поскольку все решения алгебро-геометрического оператора мероморфны (см. [3], теорема 1), применяя теоремы 7 и 8 из [2], заключаем, что L является элементарным оператором.

***Замечание* 2.** В связи с этой теоремой возникает вопрос: существует ли неэлементарный алгебро-геометрический оператор над F или, более общо, над расширением Пикара – Вессио поля $\mathbb{C}$?

Теорема 8. *Пусть F — дифференциальное поле характеристики нуль с полем констант C, L_0 — алгебро-геометрический оператор над F и L — нормализованный линейный дифференциальный оператор такой, что имеет место равенство $HL_0 = LH$ для некоторого нетривиального линейного дифференциального оператора H. Тогда L является алгебро-геометрическим оператором.*

Доказательство. Из равенства $HL_0 = LH$ следует, что $L_0(\operatorname{Ker} H) \subset \operatorname{Ker} H$ и $\operatorname{ord} L = \operatorname{ord} L_0$. Учитывая конечномерность $\operatorname{Ker} H$ над C, легко заключаем, что существует $S \in C[L_0]$ такой, что $\operatorname{Ker} S \supset \operatorname{Ker} H$. Согласно определению алгебро-геометрического оператора, для оператора L_0 существует линейный дифференциальный оператор T такой, что $[T, L_0] = 0$ и $(\operatorname{ord} T, \operatorname{ord} L_0) = 1$. Положим $P_0 = TS$, тогда $(\operatorname{ord} P_0, \operatorname{ord} L) = 1$ и $\operatorname{Ker} P_0 \supset \operatorname{Ker} H$. Последнее включение означает, что существует оператор P такой, что $HP_0 = PH$ и $(\operatorname{ord} P, \operatorname{ord} L) = 1$. Покажем, что P коммутирует с L. Действительно,

$$[P, L]H = PLH - LPH = PHL_0 - LHP_0 = HP_0L_0 - HL_0P_0 = H[P_0, L_0] = 0,$$

поэтому $[P, L] = 0$. Согласно [2] (теорема 2, следствие 2), последнее равенство доказывает, что L является алгебро-геометрическим оператором.

Приведем (без доказательства) следующие очевидные свойства линейных дифференциальных операторов, которые потребуются нам в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть H, K, L, L_0, L^*, S — линейные дифференциальные операторы, $L^* L_0 = LL^*$ и $L^* \neq 0$. Тогда*:

i) *если* K *коммутирует с* L^*, *то* $L^*(L_0 + K) = (L + K)L^*$;

ii) *если* S *коммутирует с* L_0 *и* $L^* = HS$, *то* $HL_0 = LH$;

iii) *если* L_0 *и* L *— нормализованные операторы и* $L^* = a_0\delta^m + a_1\delta^{m-1} + \ldots$, *то* $\delta a_0 = 0$.

Лемма 4. *Пусть* F *— дифференциальное поле характеристики нуль с полем констант* C, Ω *— кольцо линейных дифференциальных операторов над* F, $L \in \Omega$, $\operatorname{ord} L \geq 2$ *и* $V = \operatorname{Ker} L$. *Предположим также, что существует* $T \in \Omega$ *такой, что* $T(V) \subset V$. *Тогда группа Галуа* G *оператора* L *содержится в централизаторе* Z *оператора* T *в группе* $GL(V)$. *Если* $T \neq AL + \lambda$ *для любых* $A \in \Omega$, $\lambda \in C$ *и* $\operatorname{ord} L = 2$, *то эта группа коммутативна.*

Доказательство. Поскольку оператор T определен над F, для любого $\sigma \in G$ имеем $\sigma T \sigma^{-1} = T$, следовательно, $\sigma \in Z$. Если $\operatorname{ord} L = 2$ и $T \neq AL + \lambda$, то жорданова каноническая форма для T в некотором базисе пространства V имеет вид $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, где $\mu_1 \neq \mu_2$ и $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \overline{C}$. Легко проверить, что эти матрицы имеют коммутативные централизаторы. В то же время группа Галуа оператора определяется выбором фундаментальной системы нулей с точностью до сопряжения матрицами над $\overline{C}$ (см. предложение 13(b) [4, с. 412]). Следовательно, G — коммутативна.

***Замечание* 3.** Как показывает следующий пример, группа Галуа может быть некоммутативной, если порядок оператора не равен двум.

Положим $F = C(z)$, $\delta = d/dz$, $L_0 = \delta - z$, $T = \delta^2 - z^2$ и $L = L_0 T$. Нетрудно убедиться, что $y = \exp\left(\frac{1}{2}z^2\right)$ — нуль L_0 и $T - 1$ одновременно. Тогда $T(\ker L) \subset \ker L$, так как $\operatorname{ord} T < \operatorname{ord} L$, $T \neq AL + \lambda$ для любых $A \in \Omega$ и $\lambda \in C$. Группа Галуа оператора T изоморфна $SL(2)$ (см. [9, с. 75]), следовательно, группа Галуа оператора L некоммутативная.

Теорема 9. *Группа Галуа любого алгебро-геометрического оператора второго порядка коммутативна.*

Доказательство. Пусть L — алгебро-геометрический оператор второго порядка. Тогда, согласно определению алгебро-геометрического оператора, существует коммутирующий с L оператор нечетного порядка. Возьмем такой оператор T наименьшего порядка и применим лемму 4. Поскольку T коммутирует с L, $T(\operatorname{Ker} L) \subset \operatorname{Ker} L$. Очевидно, что условие $T \neq AL + \lambda$ выполняется, ибо в противном случае A коммутирует с L и имеет меньший порядок, чем T. Следовательно, группа Галуа оператора L коммутативна.

Теорема 6 устанавливает зависимость между коэффициентами операторов L_0 и L через коэффициенты оператора связи L_V. Для операторов второго порядка эта зависимость особенно простая. Ее описывает следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть даны операторы* $L_0 = \delta^2 + q_0$, $L = \delta^2 + q$, $L_V = \delta^m + a_1\delta^{m-1} + a_2\delta^{m-2} + \ldots$ *и имеет место равенство* $L_V L_0 = L L_V$. *Тогда* $q_0 = q + 2a_1'$.

Доказательство. Вычислим коэффициенты при δ^m в левой и правой частях операторного равенства

$$(\delta^m + a_1\delta^{m-1} + a_2\delta^{m-2} + \ldots)(\delta^2 + q_0) = (\delta^2 + q)(\delta^m + a_1\delta^{m-1} + a_2\delta^{m-2} + \ldots),$$

$$\delta^{m+2} + a_1\delta^{m+1} + a_2\delta^m + q_0\delta^m + \ldots =$$
$$= \delta^{m+2} + \delta^2 a_1\delta^{m-1} + \delta^2 a_2\delta^{m-2} + q_0\delta^m + \ldots,$$

$$\delta^{m+2} + a_1\delta^{m+1} + a_2\delta^m + q_0\delta^m + \ldots =$$
$$= \delta^{m+2} + (a_1\delta^2 + 2a_1'\delta + a_1'')\delta^{m-1} + a_2\delta^m + q\delta^m + \ldots,$$
$$\delta^{m+2} + a_1\delta^{m+1} + a_2\delta^m + q_0\delta^m + \ldots =$$
$$= \delta^{m+2} + a_1\delta^{m+1} + 2a_1'\delta^m + a_2\delta^m + q\delta^m + \ldots .$$

Мы видим, что имеет место равенство $a_2 + q_0 = 2a_1' + a_2 + q$, из которого следует утверждение леммы.

Для формулировки основной теоремы об элементарных операторах второго порядка нам необходимы следующие обозначения.

Пусть поле C алгебраически замкнуто и $p \in C[z]$ — многочлен нечетной степени. Обозначим через $\ddot{p}(z)$ последовательность $p(z), p''(z), \ldots$, образованную отличными от нуля производными четного порядка многочлена $p(z)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ и $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$ при $i \neq j$. Обозначим через $\exp(\lambda_i z)$ $(\equiv e^{\lambda_i z})$ фиксированное решение уравнения $y'/y = \lambda_i$ и $D_{\lambda_i} = \delta^2 - \lambda_i^2$, где $\delta = d/dz$. Положим $v_{\lambda_i} = p_{\lambda_i}^+ \exp(\lambda_i z) + p_{\lambda_i}^- \exp(-\lambda_i z)$, где $p_{\lambda_i}^{\pm} \in C[z]$ и $\deg p_{\lambda_i}^+ = \deg p_{\lambda_i}^-$. Обозначим через $\ddot{v}_{\lambda_i}$ последовательность v_{λ_i}, $D_{\lambda_i}(v_{\lambda_i})$, $D_{\lambda_i}^2(v_{\lambda_i}), \ldots$, образованную отличными от нуля элементами. Заметим, что в этой последовательности степень многочленов при экспонентах понижается на единицу и у последнего члена последовательности она равна нулю.

Теорема 10. *Все элементарные операторы вида* $\delta^2 + q$ *описываются формулой*

$$q = 2\left[\frac{W'(\ddot{p}(z), \ddot{v}_{\lambda_1}, \ldots, \ddot{v}_{\lambda_n})}{W(\ddot{p}(z), \ddot{v}_{\lambda_1}, \ldots, \ddot{v}_{\lambda_n})}\right]' + c, \quad c \in C. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $L = \delta^2 + q$ — элементарный оператор. Согласно теореме 6, существуют оператор $L_0 = \delta^2 - c$, $c \in C$, конечномерное C-векторное подпространство V кольца элементов Пикара – Вессио над C, инвариантное относительно L_0, и ассоциированный с ним оператор L_V такие, что $L_V L_0 = L L_V$. Согласно лемме 5, $q = c - 2a_1'$, где a_1 — второй коэффициент оператора L_V, который при известном базисе $\eta_1, \ldots, \eta_n$ пространства V определяется по формуле $a_1 = -\dfrac{W'(\eta_1, \ldots, \eta_n)}{W(\eta_1, \ldots, \eta_n)}$. Поскольку пространство V инвариантно относительно δ^2, можно считать, что $L_0 = \delta^2$, заменив L на $L + c$, если $c \neq 0$. Можно также считать, что оператор L_V не имеет правых делителей из $C[\delta]\backslash C$, так как они, согласно лемме 3, не влияют на значение q. Так как поле C алгебраически замкнуто, применяя к L_0 общую теорию эндоморфизмов векторных пространств (см. [10, с. 445], следствие к теореме 7) и используя теорию линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами (см. [11, с. 129]), легко заключить, что V имеет базис вида $\ddot{p}(z)$, $\ddot{v}_{\lambda_1}, \ldots, \ddot{v}_{\lambda_n}$. Необходимо только показать, что степень многочлена $p(z)$ нечетная и $\deg p_{\lambda_i}^+ = \deg p_{\lambda_i}^-$. Действительно, если степень $p(z)$ четная, то, применяя к $p(z)$ оператор L_0 (дифференцируя) достаточное число раз, получаем, что V содержит ненулевую константу. Это означает, что δ — правый делитель оператора L_V. Получили противоречие, следовательно, степень многочлена $p(z)$ нечетная. Аналогично предположим, что $\deg p^{+}_{\lambda_i} > \deg p^{-}_{\lambda_i}$, и применим к v_{λ_i} оператор D_{λ_i} достаточное число раз. Тогда получим, что V содержит $\exp(\lambda_i z)$. Это означает, что $\delta - \lambda_i$ — правый делитель оператора L_V. Пришли к противоречию. Точно так же мы придем к противоречию, предположив, что $\deg p^{+}_{\lambda_i} < \deg p^{-}_{\lambda_i}$. Следовательно, $\deg p^{+}_{\lambda_i} = \deg p^{-}_{\lambda_i}$.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Все элементарные операторы над $C(z)$ вида $\delta^2 + q$ описываются формулой*

$$q = 2\left[\frac{W'(\ddot{p}(z))}{W(\ddot{p}(z))}\right]' + c, \quad c \in C.$$

Доказательство. Среди множества операторов L_V, связующих операторы L_0 и L, выберем оператор с наименьшим порядком. Согласно лемме 3 (iii), можно считать, что его старший коэффициент равен единице. Поскольку $q \in C(z)$, L_V определен над $C(z)$. Если это не так, то существует дифференциальный изоморфизм σ над $C(z)$ в $\mathfrak{A}$ такой, что оператор $L_V - \sigma L_V$ также будет связывать операторы L_0 и L, но его порядок ниже, чем порядок оператора L_V. Это противоречит выбору L_V, следовательно, L_V определен над $C(z)$. Предположим теперь, что группа Галуа L_V нетривиальна. Тогда это тор и существует нуль v этого оператора такой, что $v'/v \in C(z)$. Последнее означает, что $v = p(z)\exp(\lambda z)$, где $\lambda \in C^*$ и $p(z)$ — многочлен, так как v — элемент Пикара – Вессио над C. Применяя нужное число раз оператор D_λ, получаем, что $\exp(\lambda z)$ — нуль L_V. Это противоречит выбору L_V.

***Следствие* 2.** *Пусть F — экспоненциальное расширение поля C. Все элементарные операторы над F вида $\delta^2 + q$ описываются формулой*

$$q = 2\left[\frac{W'(v_{\lambda_1}, \ldots, v_{\lambda_n})}{W(v_{\lambda_1}, \ldots, v_{\lambda_n})}\right]' + c, \quad c \in C, \qquad \deg p^{\pm}_{\lambda_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если $F = C(\exp(\mu z))$, где $\mu \in C^*$, то $2\lambda_i \in \mathbb{Z}\mu$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Обозначим через V_0 подпространство V с базисом $\ddot{p}(z)$, а через V_{λ_i} — с базисом $\ddot{v}_{\lambda_i}$. Следствие будет доказано, если мы покажем, что $V_0 = \{0\}$ и $\dim V_{\lambda_i} = 1$. Пусть G — группа Галуа L_V над F. Ясно, что подпространство V_0 инвариантно относительно G, следовательно, все коэффициенты L_{V_0} принадлежат F, а все нули L_V — $C(z)$, поэтому все коэффициенты L_{V_0} принадлежат $C(z)$. Однако $F \cap C(z) = C$, значит, L_{V_0} определен над C, но это противоречит выбору L_V, поэтому $V_0 = \{0\}$. Предположим, что длина последовательности $\ddot{v}_{\lambda_i}$ больше единицы и $\overline{V}$ — подпространство V_{λ_i}, порожденное двумя последними элементами $\ddot{v}_{\lambda_i}$. Покажем теперь, что $G\overline{V} \subset \overline{V}$. Обозначим через $U_{\lambda_i^2}$ ядро оператора $D^2_{\lambda_i}$, тогда $\overline{V} = U_{\lambda_i^2} \cap V$. Поскольку оператор $D^2_{\lambda_i}$ определен над $FGU_{\lambda_i^2} \subset U_{\lambda_i^2}$, то $G\overline{V} \subset GU_{\lambda_i^2} \cap GV \subset U_{\lambda_i^2} \cap V = \overline{V}$. Следовательно, коэффициенты оператора $L_{\overline{V}}$

принадлежат полю F. Поэтому вронскиан фундаментальной системы нулей оператора $L_{\overline{V}}$ принадлежит некоторому экспоненциальному расширению поля F, а значит, экспоненциальному расширению поля C. Теперь вычислим этот вронскиан непосредственно. Пространство $\overline{V}$ порождается элементами $u_1 = (\mu_1 z + \nu_1)e^{\lambda_i z} + (\mu_2 z + \nu_2)e^{-\lambda_i z}$ и $u_2 = \mu_1 e^{\lambda_i z} - \mu_2 e^{-\lambda_i z}$, где $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2 \in C$ и $\mu_1 \mu_2 \neq 0$. Поэтому детерминант Вронского $W(u_1, u_2)$ будет иметь вид

$$W(u_1, u_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\mu_1 z + \nu_1)e^{\lambda_i z} + (\mu_2 z + \nu_2)e^{-\lambda_i z} & \mu_1 e^{\lambda_i z} - \mu_2 e^{-\lambda_i z} \\ \mu_1 e^{\lambda_i z} + \mu_2 e^{-\lambda_i z} + \lambda_i[(\mu_1 z + \nu_1)e^{\lambda_i z} - (\mu_2 z + \nu_2)e^{-\lambda_i z}] & \lambda_i[\mu_1 e^{\lambda_i z} + \mu_2 e^{-\lambda_i z}] \end{vmatrix}.$$

После несложных, но несколько громоздких, вычислений, получим $W(u_1, u_2) = 4\lambda_i \mu_1 \mu_2 z + f$, где $f \in C[e^{\lambda_i z}, e^{-\lambda_i z}]$. Следовательно, z принадлежит экспоненциальному расширению поля C. Но это невозможно, так как z — примитивный элемент над C. Это противоречие доказывает, что размерность пространства V_{λ_i} не больше единицы. Предположим теперь, что $F = C(\exp(\mu z))$, где $\mu \in \in C^*$. Так как V_{λ_i} порождается одним элементом $u = \mu_1 e^{\lambda_i z} - \mu_2 e^{-\lambda_i z}$, то для любого $\sigma \in G$ $\sigma u = \theta_\sigma u$, где $\theta_\sigma \in C^*$. Но

$$\sigma u = \mu_1 \sigma e^{\lambda_i z} - \mu_2 \sigma e^{-\lambda_i z} = \mu_1 \gamma_\sigma e^{\lambda_i z} - \mu_2 \gamma_\sigma^{-1} e^{-\lambda_i z} = \theta_\sigma \mu_1 e^{\lambda_i z} - \theta_\sigma \mu_2 e^{-\lambda_i z},$$

где $\gamma_\sigma \in C^*$, откуда следует, что $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma^{-1}$. Последнее равенство означает, что $e^{2\lambda_i z} \in F$. Следовательно, $2\lambda_i \in \mathbb{Z}\mu$.

Примеры. Приведем простые примеры использования формул из теоремы 10 и следствий к ней для построения алгебро-геометрических потенциалов. Пусть $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел и $i^2 = -1$. Положим $v_i = \operatorname{Sin} z$, тогда $W(v_i) = v_i = \operatorname{Sin} z$, и согласно теореме 10 получаем $q = 2[(\operatorname{Sin} z)' \operatorname{Sin}^{-1} z]' = -2\operatorname{Sin}^{-2} z$. Положим $p(z) \equiv z$, тогда $q = 2(z^{-1})' = -2z^{-2}$. Для полинома $p(z)$ третьей степени вронскиан $W(\ddot{p}(z))$ имеет вид $W = pp''' - p'p''$ и является полиномом третьей степени. Как показывает несложный анализ, в этом случае нули W либо занимают на плоскости одну точку, либо образуют правильный треугольник. Поэтому $q = -6z^{-2}$ $(p(z) \equiv z^3)$ или $q = -6z(z^3 + 2c)(z^3 - c)^{-2}$ $(p(z) \equiv z^3 + 2c,\ c \in \mathbb{C}^*)$.

Полиномы пятой степени порождают еще большее разнообразие типов алгебро-геометрических потенциалов. Для потенциалов с наиболее простым размещением полюсов порождающие полиномы имеют вид:

1) $p(z) \equiv z^5$ — классический однополюсный потенциал;

2) $p(z) \equiv z^5 + 2c$, $c \in \mathbb{C}^*$ — полюсы образуют правильный пятиугольник с центром;

3) $p(z) \equiv z^5 + \mu z^2$, $\mu \in \mathbb{C}^*$ — полюсы образуют два правильных треугольника с единым центром, повернутые на 60 градусов один относительно другого и коэффициентом подобия равным $\sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}}$;

4) $p(z) \equiv z^5 + \mu z^2 + c$, $c\mu^{-5/3} = 6\sqrt[3]{2}$ — полюсы образуют выпуклый четы-

рехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, одна из них является осью симметрии и полином $W(\ddot{p}(z))$ имеет корень кратности три.

Нахождение алгебро-геометрических потенциалов с помощью формулы (1) требует вычисления определителя, поэтому трудность вычислений быстро возрастает с увеличением порядка определителя, который растет вместе со степенью порождающего полинома. Еще сложнее находить расположение полюсов алгебро-геометрических потенциалов. Поэтому для построения простых примеров алгебро-геометрических потенциалов лучше использовать теорему 8 и лемму 5. Покажем на примерах, как это можно сделать, но вначале докажем следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 1. *Пусть F — дифференциальное поле характеристики нуль с оператором дифференцирования δ, $L_0 = \delta^2 + q_0$ — алгебро-геометрический оператор над F и η — нуль оператора L_0 такой, что $\eta'\eta^{-1} = a \in F$. Тогда*

$$q = q_0 + 2a' \tag{2}$$

— алгебро-геометрический потенциал над F.

Доказательство. Положим $H = \delta - a$, тогда η — нуль оператора HL_0 и имеет место равенство $HL_0 = LH$ для некоторого оператора $L = \delta^2 + q$. Согласно теореме 8, L — алгебро-геометрический оператор, и из леммы 5 получаем $q_0 = q + 2a_1' = q - 2a'$, следовательно, $q = q_0 + 2a'$.

Преобразования вида $q \to q_0 + 2a'$ называют [8] преобразованиями Дарбу. С помощью этих преобразований нетрудно получить некоторое обобщение предыдущих примеров.

1. Покажем, что из формулы (2) следует алгебро-геометричность классического однополюсного потенциала $q = -m(m+1)z^{-2}$. Действительно, как установлено выше, при $m = 1$ этот потенциал — алгебро-геометрический. Для любого m соответствующий оператор $\delta^2 - m(m+1)z^{-2}$ имеет два нуля: $\eta_1 = z^{-m}$ и $\eta_2 = z^{m+1}$. Преобразование Дарбу, соответствующее второму нулю, повышает ранг потенциала и сохраняет его форму

$$q = q_0 + 2a' = -m(m+1)z^{-2} - 2(m+1)z^{-2} = -(m+1)(m+2)z^{-2}.$$

Это означает, что алгебро-геометричность классического однополюсного потенциала следует из соображений индукции.

2. Воспользуемся теперь для преобразования нулем $\eta = z^{m+1} - \mu z^{-m}$, $\mu \in \mathbb{C}^*$. Тогда

$$a = \sum_{k=1}^{2m+1} (z - \lambda_k)^{-1} - mz^{-1}, \qquad \lambda_k^{2m+1} = \mu,$$

$$q_1 = -2 \sum_{k=1}^{2m+1} (z - \lambda_k)^{-2} + 2mz^{-2} - m(m+1)z^{-2}$$

или

$$q_1 = -2 \sum_{k=1}^{2m+1} (z - \lambda_k)^{-2} - (m-1)mz^{-2}.$$

Из этой формулы видно, что полюсы алгебро-геометрического потенциала q_1 образуют правильный $(2m+1)$-угольник с центром.

3. Потенциалу q_1 соответствует нуль $\eta_1 = z^m(z^{2m+1} - \mu)^{-1}$. Выберем второй нуль в виде

$$\eta_2 = \eta_1 \int \eta_1^{-2}\,dz = z^m(z^{2m+1}-\mu)^{-1}\int (z^{m+1} - \mu z^{-m})^2\,dz =$$

$$= z^m(z^{2m+1}-\mu)^{-1}\int (z^{2(m+1)} - 2\mu z + \mu^2 z^{-2m})dz =$$

$$= z^{-m+1}(z^{2m+1}-\mu)^{-1}[(2m+3)^{-1}z^{4m+2} - \mu z^{2m+1} - \mu^2(2m-1)^{-1}].$$

После разложения полинома в квадратных скобках на множители получим

$$\eta_2 = \lambda z^{-(m-1)}(z^{2m+1}-\mu)^{-1}(z^{2m+1}-\mu_1)(z^{2m+1}-\mu_2),$$

где

$$\mu_{1,2} = \frac{\mu}{2}\left[2m + 3 \pm (2m+1)\sqrt{\frac{2m+3}{2m-1}}\right]$$

и $\lambda = (2m-1)^{-1}(2m+3)^{-1}$. Воспользуемся теперь нулем η_2 для преобразования потенциала q_1. Тогда $q_2 = q_1 + 2a'$, где

$$a = -\sum_{k=1}^{2m+1}(z-\lambda_k)^{-1} - (m-1)z^{-1} + \sum_{k=1}^{2m+1}(z-\lambda_{1k})^{-1} + \sum_{k=1}^{2m+1}(z-\lambda_{2k})^{-1},$$

$$\lambda_k^{2m+1} = \mu, \qquad \lambda_{jk}^{2m+1} = \mu_j, \quad j = 1, 2.$$

Следовательно,

$$q_2 = -(m-2)(m-1)z^{-2} - 2\sum_{k=1}^{2m+1}(z-\lambda_{1k})^{-2} - 2\sum_{k=1}^{2m+1}(z-\lambda_{2k})^{-2},$$

$$\lambda_{jk}^{2m+1} = \mu_j, \quad j = 1, 2.$$

Из этой формулы видно, что полюсы алгебро-геометрического потенциала q_2 образуют два правильных $(2m+1)$-угольника с единым центром, повернутые на $\pi/(2m+1)$ градусов один относительно другого и коэффициентом подобия равным $\sqrt[2m+1]{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}$.

Пусть $\mathbb{M}$ — поле функций, мероморфных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Как было отмечено ранее, нули алгебро-геометрического оператора принадлежат $\mathbb{M}$. Поэтому при изучении алгебро-геометрических операторов можно ограничиться рассмотрением лишь операторов с мероморфными коэффициентами, у которых все особые точки, принадлежащие $\mathbb{C}$, фуксовы и имеют целые показатели. С другой стороны, если L является алгебро-геометрическим оператором, то $L + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, — также алгебро-геометрический оператор. Поэтому алгебро-геометрический оператор можно охарактеризовать как оператор с параметром, все нули которого мероморфны при любом значении параметра. Как показал Р. Вайкард [2], при определенных ограничениях, налагаемых на поведение коэффициентов оператора на бесконечности, этого свойства достаточно, чтобы оператор с мероморфными коэффициентами был алгебро-геометрическим. Линейные дифференциальные операторы над $\mathbb{M}$, которые имеют только мероморфные нули, можно охарактеризовать следующим образом.

Лемма 6. *Пусть L — линейный дифференциальный оператор над $\mathbb{M}$. Группа Галуа L над $\mathbb{M}$ тривиальна тогда и только тогда, когда все особые* *точки оператора L, принадлежащие $\mathbb{C}$, фуксовы, имеют целые попарно различные показатели и все характеристические определители в этих точках равны нулю.*

Доказательство. Пусть L имеет тривиальную группу Галуа над $\mathbb{M}$. Это означает, что все нули оператора L принадлежат $\mathbb{M}$. Следовательно, любая особая точка нуля есть полюс, поэтому это фуксова особая точка для коэффициентов оператора L с целыми показателями. Поскольку отсутствует логарифмическое ветвление, согласно теореме 1 [12], все характеристические определители в этой точке равны нулю. Обратно, пусть все особые точки оператора фуксовы, имеют целые попарно различные показатели и все характеристические определители в них равны нулю. Тогда, согласно теореме 1 [12], оператор L имеет фундаментальную систему нулей в $\mathbb{C}((z))$, но так как особая точка фуксова, формальные ряды сходятся, и поэтому данная точка является полюсом для любого нуля оператора L. Поскольку все особые точки, лежащие в конечной плоскости, такие, любой нуль оператора L является мероморфной функцией. Следовательно, группа Галуа оператора L тривиальна.

Предложенный выше критерий мероморфности нулей линейного дифференциального оператора над $\mathbb{M}$ довольно сложно использовать на практикев случае операторов высокого порядка. Однако для операторов второго порядка ситуация существенно упрощается.

Пусть $q \in \mathbb{M}$ — мероморфный потенциал. Полюс z_0 потенциала $q(z)$ назовем алгебро-геометрическим, если:

в окрестности z_0 имеет место представление

$$q(z) = -n(n+1)(z-z_0)^{-2} + \mu_{-1}(z-z_0)^{-1} + \mu_0 + \mu_1(z-z_0) + \mu_2(z-z_0)^2 + \ldots, \tag{3}$$

где $n \in \mathbf{N}$, $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = -1, 0, 1, \ldots$;

характеристический определитель $\chi_g = \det(a_{ij})$, где $i, j = 1, \ldots, 2n+1$,

$$a_{ij} = \begin{cases} \mu_{i-j-1}, & \text{если } i \geq j, \\ (j-n-1)(j-n-2) - n(n+1), & \text{если } j - i = 1, \\ 0, & \text{если } j - i \geq 2, \end{cases}$$

равен нулю и не зависит от μ_0.

При $n = 1$ характеристический определитель легко вычисляется:

$$\chi_g = \begin{vmatrix} \mu_{-1} & -2 & 0 \\ \mu_0 & \mu_{-1} & -2 \\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_{-1} \end{vmatrix} = \mu_{-1}^3 + 4\mu_1 + \mu_{-1}\mu_0.$$

Он равен нулю и не зависит от μ_0 тогда и только тогда, когда $\mu_{-1} = \mu_1 = 0$.

При $n = 2$ характеристический определитель уже не так легко вычисляется (для его вычисления лучше использовать Mathcad, GAP и т. п.):

$$\chi_g = \begin{vmatrix} \mu_{-1} & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_0 & \mu_{-1} & -6 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_{-1} & -6 & 0 \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & \mu_{-1} & -4 \\ \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & \mu_{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \mu_{-1}^5 + 20\mu_{-1}^3\mu_0 + 84\mu_{-1}^2\mu_1 + 64\mu_{-1}\mu_0^2 + 288\mu_{-1}\mu_2 + 192\mu_1\mu_0 + 576\mu_3.$$

Однако он также равен нулю и не зависит от μ_0 тогда и только тогда, когда $\mu_{-1} = \mu_1 = \mu_3 = 0$.

Лемма 7. *Если* $\mu_{-1} = \mu_1 = \mu_3 = \ldots = \mu_{2n-1} = 0$, *то характеристический определитель* χ_g *также равен нулю и не зависит от* μ_0.

Доказательство. Пусть $\mu_{-1} = \mu_1 = \mu_3 = \ldots = \mu_{2n-1} = 0$, тогда любой элемент a_{ij} определителя χ_g с четной разностью индексов $i - j$ равен нулю. Согласно определению, χ_g равен сумме произведений вида $\pm\prod_k^{2n+1} a_{k\sigma(k)}$, где σ — перестановка на множестве чисел $1, \ldots, 2n+1$. Легко видеть, что для какого-то нечетного k $k - \sigma(k)$ — четное целое число, так как в множестве $1, \ldots, 2n+1$ нечетных чисел больше, чем четных. Это означает, что каждое такое произведение содержит нулевой сомножитель, следовательно, определитель χ_g равен нулю и не зависит от μ_0.

Как показано выше, для малых n справедливо и обратное утверждение. Однако автору не известно доказательство этого утверждения для произвольного n. Поэтому при проверке полюса мероморфного потенциала на алгеброгеометричность возникает необходимость вычисления характеристического определителя. Эти вычисления можно несколько упростить в случаях рационального, просто периодического (более общо — элементарного) и эллиптического потенциалов. В этих случаях потенциал $q(z)$ имеет мероморфный интеграл, а следовательно, равен нулю коэффициент μ_{-1} в разложении (3).

Согласно лемме 6, все полюсы алгебро-геометрического потенциала алгебро-геометрические. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (например, для потенциала Айри $q(z) \equiv z$). Однако для эллиптического потенциала это так. Более того, существуют дополнительные ограничения на поведение рационального и просто периодического потенциала, при которых обратное утверждение справедливо.

Предложение 2. *Пусть* $q(z)$ — *мероморфный потенциал. Для того чтобы потенциал* $q(z)$ *был алгебро-геометрическим, необходимо и достаточно, чтобы*:

1) *каждый полюс* $q(z)$ *был алгебро-геометрическим, если потенциал* $q(z)$ — *эллиптический*;

2) *каждый полюс* $q(z)$ *был алгебро-геометрическим и потенциал был ограничен при* $z \to \infty$, *если потенциал* $q(z)$ — *рациональный*;

3) *каждый полюс* $q(z)$ *был алгебро-геометрическим и потенциал был ограничен на концах полосы периодов, если потенциал* $q(z)$ — *просто периодический.*

Доказательство. *Необходимость* указанных условий следует из теоремы 1 [2] и леммы 6 для эллиптического потенциала. Необходимость дополнительного условия для рационального и просто периодического потенциала следует из теоремы 7. Достаточность приведенных условий следует из леммы 6 и теоремы 2 из [2].

Примеры. Следующие „канонические" потенциалы имеют четные разложения в полюсах и, согласно лемме 7, эти полюсы алгебро-геометрические:

$$n(n+1)z^{-2}, \qquad n(n+1)\mathrm{Sin}^{-2} z, \qquad n(n+1)\rho(z) + n_1(n_1+1)\rho(z-\omega_1) +$$
$$+ n_2(n_2+1)\rho(z-\omega_2) + n_3(n_3+1)\rho(z-\omega_3),$$

где $\rho(z)$ — функция Вейерштрасса $(\rho'^2 = 4\rho^3 - g_2\rho - g_3)$, ω_1, ω_2 — полупериоды и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ (потенциал Трайбиха – Вердье). Согласно предложению 2, все эти потенциалы — алгебро-геометрические.

Пусть θ_1 — комплексное число, отличное от полюсов $\wp(z)$ и такое, что уравнение $\wp'^2(\theta_1) = 4y^3 - g_2 y - g_3$ имеет корень α, отличный от $\wp(\theta_1)$. Выберем θ_2 так, чтобы $\wp(\theta_2) = \alpha$ и $\wp'(\theta_1) + \wp'(\theta_2) = 0$. Тогда потенциал $2\big(\wp(z) + \wp(z-\theta_1) + \wp(z-\theta_2)\big)$ — алгебро-геометрический. Действительно, согласно лемме 7, необходимо и достаточно показать, что равен нулю коэффициент μ_{-1} в разложении (3) для этого потенциала в точках 0, θ_1, θ_2. Это означает выполнение равенств

$$\wp'(\theta_1) + \wp'(\theta_2) = 0, \qquad \wp'(\theta_1) + \wp'(\theta_1 - \theta_2) = 0, \qquad \wp'(\theta_2) + \wp'(\theta_2 - \theta_1) = 0.$$

Первое равенство обеспечено выбором θ_2, а два других являются следствием первого, так как $\wp'(\theta_1 - \theta_2) = -\dfrac{1}{2}\big(\wp'(\theta_1) - \wp'(\theta_2)\big)$ согласно формуле сложения для функции $\wp'(z)$ (см. [4, с. 124]).

1. *Floquet G.* Sur la théorie des équations différentielles linéaires // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1879. – **8**, suppl. – P. 1 – 132.
2. *Weikard R.* On commuting differential operators // Electron. J. Different. Equat. – 2000. – Paper № 19. – P. 1 – 11.
3. *Weikard R.* On rational and periodic solutions of stationary KdV equations // Doc. Math. J. – 2000. – **5**. – P. 109 – 126.
4. *Kolchin E. R.* Differential algebra and algebraic groups. – New York, London: Acad. Press, 1973. – 448 p.
5. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. II. – 515 с.
6. *Григоренко Н. В.* Абелевы расширения в теории Пикара – Вессио // Мат. заметки. – 1975. – **17**. – С. 113 – 117.
7. *Kovacic J.* Geometric characterization of strongly normal extensions // Trans. Amer. Math. Soc. – 2006. – **358**. – P. 4135 – 4157.
8. *Ohmiya M.* Darboux – Lamé equation and isomonodromic deformations // Abstr. Appl. Anal. – 2004. – **6**. – P. 511 – 524.
9. *Григоренко Н. В.* Критерий разрешимости в квадратурах и прямая задача теории Галуа для линейных дифференциальных уравнений // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 71 – 75.
10. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1976. – 576 с.
12. *Григоренко Н. В.* Логарифмические особенности фуксовых уравнений и критерий конечности группы монодромии // Мат. заметки. – 1983. – **33**. – С. 881 – 884.

Получено 31.10.07