УДК 517.95

Н. М. Гринців, М. І. Іванчов (Львів. нац. ун-т)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНОВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

In a free-boundary domain, conditions are established for the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of finding the time-dependent heat conduction coefficient. The case of strong degeneration is investigated when unknown coefficient tends to zero as $t \to +0$ similar to a power function t^β, where $\beta \geq 1$.

В области со свободной границей найдены условия существования и единственности решения обратной задачи определения зависящего от времени коэффициента теплопроводности. Исследован случай сильного вырождения, когда неизвестный коэффициент стремится к нулю при $t \to +0$ как степенная функция t^β, где $\beta \geq 1$.

До задач для параболічних рівнянь з виродженням, задач з вільною межею та обернених задач приводить ряд практично важливих процесів. Кожний із наведених типів задач досліджено достатньо повно, проте їх поєднання в одній задачі практично не розглядалось. Обернену задачу для одновимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею досліджено в [1]. Умови існування та єдиності розв’язку оберненої задачі для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням встановлено в [2]. Роботи [3, 4] присвячено вивченню обернених задач відповідно для гіперболічного та еліптичного рівнянь з виродженням. Задачу з вільною межею для параболічної системи з виродженням досліджено в [5].

У даній роботі вивчається одновимірна обернена задача для рівняння теплопровідності із сильним степеневим виродженням у випадку, коли частина межі області невідома. Аналогічну задачу для випадку слабкого виродження розглянуто в [6].

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon 0 < x < h(t),\, 0 < t < T\}$, де $x = h(t)$ — невідома функція, розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$, в рівнянні теплопровідності

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq h(0), \tag{2}$$

крайовими умовами та умовами перевизначення

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \tag{3}$$

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $t = t$ задачу (1) – (5) зведемо до оберненої відносно невідомих $(a(t), h(t), v(y,t))$ в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t)\colon 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{h'(t)}{h(t)} y v_y + f(yh(t), t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \quad 0 \le y \le 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \tag{8}$$

$$\frac{a(t)}{h(t)} v_y(0,t) = \mu_3(t), \tag{9}$$

$$h(t) \int_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

де $v(y,t) = u(yh(t),t)$.

Під розв'язком задачі (6)–(10) будемо розуміти трійку функцій $(a(t), h(t), v(y,t))$ із класу $C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, $v_y(0,t) \in C(0,T]$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$, яка задовольняє умови (6)–(10) і для якої існує скінченна додатна границя $\lim\limits_{t \to +0} a(t)t^{-\beta} > 0$, де $\beta \ge 1$ — фіксоване число.

Умови існування та єдиності розв'язку задачі (6)–(10) сформульовано у наступній теоремі.

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови*:

1) $\varphi \in C[0,\infty)$, $\varphi(x) \ge \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\mu_4 \in C^1[0,T]$, $\mu_4(t) > 0$, $t \in [0,T]$;

2) $\mu_i \in C^1[0,T]$, $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2$, $f \in C([0,\infty) \times [0,T])$, $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$;

3) $\varphi \in C^1[0,h_0]$, $f \in C^{2,0}([0,H_1] \times [0,T])$, *де числа* h_0 *та* H_1 *будуть визначені нижче,* $\mu_3 \in C[0,T]$, $\mu_3(t) > 0$, $t \in (0,T]$, *існує скінченна границя* $\lim\limits_{t \to +0} \mu_3(t) t^{-\frac{\beta+1}{2}} \equiv M > 0$, $f(0,t) - \mu_1'(t) > 0$, $|\mu_4'(t)| \le C_2 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $t \in [0,T]$, $|f(x,t)| \le C_1 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}$, $(x,t) \in [0,H_1] \times [0,T]$, *де* C_1, C_2 *— деякі додатні сталі,* $\gamma > 0$ *— довільне фіксоване число*;

4) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними задачі* (6)–(10), *що існує єдиний розв'язок цієї задачі при* $y \in [0,1]$, $t \in [0,T_0]$.

Означимо числа h_0 та H_1. Зауважимо спочатку, що згідно з умовою 1 теореми існує єдиний розв'язок $h(0) = h_0 > 0$ рівняння

$$\int_0^{h_0} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Враховуючи це, з припущення 2 теореми за принципом максимуму [7, с. 25] отримуємо оцінку

$$v(y,t) \ge M_0 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{11}$$

в якій число M_0 визначається вихідними даними задачі. Тоді з умови (10) знаходимо

$$h(t) \le \frac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Оцінюючи розміри області і знову застосовуючи принцип максимуму до розв'язку задачі (6)–(8), отримуємо

$$v(y,t) \le M_1 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{13}$$

З оцінки (13) та умови (10) випливає

$$h(t) \ge \frac{1}{M_1} \min_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{14}$$

2. Зведення задачі (6)–(10) до системи рівнянь. Позначимо $b(t) \equiv \dfrac{a(t)}{h^2(t)}$, $p(t) \equiv h'(t)$, $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Припускаючи, що функції $b(t)$, $h(t)$ відомі, задачу (6)–(8) зведемо до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{15}$$

$$w(y,t) = w_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau, \quad (y,t) \in Q_T, \tag{16}$$

де $G_k(y,t,\eta,\tau)$, $k = 1,2$, — функції Гріна першої $(k = 1)$ та другої $(k = 2)$ крайових задач для рівняння

$$v_t = b(t) v_{yy} + f(yh(t),t). \tag{17}$$

Вони визначаються формулою

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$
$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right), \quad k = 1,2,$$

де $\theta(t) = \int_0^t b(\tau) d\tau$.

Через $v_0(y,t)$ позначено розв'язок рівняння (17), який задовольняє умови (7), (8):

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\, \varphi(\eta h_0) d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\, b(\tau)\mu_1(\tau)\, d\tau -$$
$$- \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\, b(\tau)\mu_2(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\, f(\eta h(\tau),\tau) d\eta d\tau. \tag{18}$$

Здиференціюємо (18) по y. Використовуючи властивості функцій Гріна $G_{1y} = -G_{2\eta}, G_{2\tau} = -b(\tau)G_{2\eta\eta}$ та інтегруючи частинами, одержуємо

$$w_0(y,t)=h_0\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta+\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,(\mu_2'(\tau)-f(h(\tau),\tau))\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\,h(\tau)f_\eta(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau. \tag{19}$$

З умов (9) і (10) маємо

$$h(t)=\frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy}, \tag{20}$$

$$b(t)w(0,t)=\frac{\mu_3(t)}{h(t)},\quad t\in[0,T]. \tag{21}$$

Диференціюючи (10) за змінною t та враховуючи рівняння (6), знаходимо

$$p(t)=\left(\mu_4'(t)-h(t)\int\limits_0^1 f(yh(t),t)dy-\right.$$
$$\left.-\,b(t)h(t)(w(1,t)-w(0,t))\right)\mu_2^{-1}(t),\quad t\in[0,T]. \tag{22}$$

Отже, задачу (6) – (10) зведено до еквівалентної системи рівнянь (15), (16), (20) – (22) щодо невідомих $b(t)$, $h(t)$, $p(t)$, $v(y,t)$, $w(y,t)$. Існування розв'язку вказаної системи будемо доводити за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи.

3. Апріорні оцінки розв'язків системи (15), (16), (20) – (22). Спочатку встановимо поведінку функції $|w(y,t)|$ при $t\to+0$. Введемо позначення

$$W(t)=\max_{y\in[0,1]}\bigl|w(y,t)\bigr|,\qquad h_{\min}(t)=\min_{0\le\tau\le t}h(\tau),\qquad h_{\max}(t)=\max_{0\le\tau\le t}h(\tau),$$

$$b_0(t)=\frac{b(t)}{t^\beta},\qquad b_{\min}(t)=\min_{0\le\tau\le t}b_0(\tau),\qquad b_{\max}(t)=\max_{0\le\tau\le t}b_0(\tau).$$

Оцінимо доданки, які входять до формули (19). Беручи до уваги рівність $\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta=1$, яку легко безпосередньо перевірити, маємо

$$\left|\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right|\le C_3,$$
$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)h(\tau)f_\eta(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau\right|\le C_4. \tag{23}$$

Використовуючи оцінку функції Гріна [8, с. 12]

$$G_2(y,t,\eta,\tau) \le C_5 + \frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \tag{24}$$

для оцінки двох інших доданків з (19), одержуємо

$$\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau \le C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \tag{25}$$

$$\left|\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h(\tau),\tau))d\tau\right| \le C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{26}$$

Звідси випливає оцінка

$$\big|w_0(y,t)\big| \le C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{27}$$

Враховуючи нерівність $\int_0^1 \big|G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\big|\, d\eta \le \dfrac{C_{13}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, з рівняння (16) знаходимо

$$W(t) \le C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_{14} \int\limits_0^t \frac{|\,p(\tau)|\, W(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau. \tag{28}$$

Для оцінки $p(t)$ використаємо рівняння (22) та припущення теореми:

$$\big|p(t)\big| \le C_{15} t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} + C_{16} b(t) W(t), \quad t \in [0,T]. \tag{29}$$

Оцінимо інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le \frac{C_{17}}{\sqrt{b_{\min}(t)}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \le \frac{C_{18}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{b_{\min}(t)}}. \tag{30}$$

Підставляючи (29) та (30) у (28), одержуємо

$$W(t) \le C_{11} + \frac{C_{19}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{b_{\min}(t)}} + \frac{C_{20}}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{b_{\min}(t)}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau +$$

$$+ \frac{C_{21}}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{b_{\min}(t)}} \int\limits_0^t \frac{b(\tau) W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{31}$$

Звідси випливає, що функція $w(y,t)$ поводить себе при $t \to +0$ як $t^{\frac{1-\beta}{2}}$.

Оцінимо $w(0,t)$ знизу. Оскільки $G_2(0,t,1,\tau) \le C_{22}$, то, підставляючи (19) в (16) і використовуючи оцінки (23), маємо

$$w(0,t) \geq \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau))d\tau - C_{23} - C_{24} \int\limits_0^t \frac{|\,p(\tau)|W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{32}$$

Враховуючи явний вигляд функції Гріна, дану нерівність зводимо до вигляду

$$w(0,t) \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau - C_{23} - C_{24} \int\limits_0^t \frac{|\,p(\tau)|W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{33}$$

Беручи до уваги встановлену при $t \to +0$ поведінку інтегралів, які входять до (33), робимо висновок, що для довільного фіксованого q, $0 < q < 1$, існує таке число t_1, $0 < t_1 \leq T$, що

$$C_{23} + C_{24} \int\limits_0^t \frac{|\,p(\tau)|W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau \leq \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \tag{34}$$

Тоді

$$w(0,t) \geq \frac{1-q}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Підставляючи знайдену нерівність в (21), отримуємо

$$b(t) \leq \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{(1-q)h(t) \displaystyle\int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{b_{\max}(t)}}{(1-q)\sqrt{1+\beta}\; h_{\min}(t) \displaystyle\int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau}$$

або

$$b_0(t) \leq \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)\sqrt{b_{\max}(t)}}{(1-q)\sqrt{1+\beta}\; h_{\min}(t) t^\beta \displaystyle\int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau}, \quad t \in [0, t_1]. \tag{35}$$

Позначимо

$$K(t) \equiv \frac{\sqrt{\pi}\mu_3(t)}{\sqrt{1+\beta}\, t^\beta \displaystyle\int_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau}. \tag{36}$$

З умов теореми випливає, що $K(t)$ неперервна та додатна на $(0, T]$. Використовуючи теорему про середнє, легко переконуємось в існуванні додатної границі $\lim\limits_{t \to +0} K(t)$. Отже, з (36) маємо

$$b_{\max}(t) \leq \frac{K^2_{\max}(t)}{(1-q)^2 h^2_{\min}(t)}, \tag{37}$$

де $K_{\max}(t) = \max\limits_{0\le\tau\le t} K(\tau)$. Звідси випливає оцінка

$$b(t) \le A_1 t^{\beta}, \quad t \in [0, t_1], \tag{38}$$

де стала $A_1 > 0$ визначається вихідними даними задачі.

Для оцінки $b(t)$ знизу використаємо оцінку $w(0,t)$ зверху:

$$w(0,t) \le C_{25} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + C_{26} \int\limits_0^t \frac{|\,p(\tau)|W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau. \tag{39}$$

Підставляючи (39) і (29) в (21) та використовуючи (38), знаходимо

$$b_0(t) \ge K(t)\sqrt{b_{\min}(t)}\, h_{\max}^{-1}(t) \left(C_{27} t^{\frac{\beta-1}{2}} + 1 + C_{28} t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau + \right.$$

$$\left. + C_{29} t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \frac{b(\tau) W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau \right)^{-1}. \tag{40}$$

З оцінки (38) та поведінки $W(t)$ при $t \to +0$ випливає існування такого числа t_2, $0 < t_2 \le T$, що справджується нерівність

$$C_{27} t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{28} t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} W(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau +$$

$$+ C_{29} t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \frac{b(\tau) W^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau \le q, \quad t \in [0, t_2]. \tag{41}$$

Тоді з (40) отримуємо

$$b_0(t) \ge \frac{K(t)}{(1+q) h_{\max}(t)} \sqrt{b_{\min}(t)}$$

або

$$b_{\min}(t) \ge \frac{K_{\min}^2(t)}{(1+q)^2 h_{\max}^2(t)},$$

де $K_{\min}(t) = \min\limits_{0\le\tau\le t} K(\tau)$. Остаточно маємо

$$b(t) \ge A_0 t^{\beta}, \quad t \in [0, t_2], \tag{42}$$

де $A_0 = \dfrac{K_{\min}^2(T)}{(1+q)^2 h_{\max}^2(T)} > 0$.

Оцінимо функцію $W(t)$, підставивши знайдені оцінки $b(t)$ в (31):

$$W(t) \le \frac{C_{32}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{33}}{t^{\frac{\beta}{2}}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} W(\tau) + \tau^{\beta} W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Домножимо обидві частини нерівності на $t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і покладемо $W_1(t) = W(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$. У випадку $\gamma \leq 1$ одержимо

$$W_1(t) = C_{32} + C_{34} t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^\gamma (W_1(\tau)+1)^2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \tag{43}$$

або, позначивши $W_2(t) = W_1(t) + 1$,

$$W_2(t) \leq C_{35} + \frac{C_{34}}{\sqrt{t}} \int\limits_0^t \frac{\tau^\gamma W_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{44}$$

Піднесемо обидві частини (44) до квадрату, використавши при цьому нерівності Коші та Коші – Буняковського:

$$W_2^2(t) \leq C_{36} + C_{37} t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

В останній нерівності замінимо t на σ і, домноживши на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, зінтегруємо її по σ від 0 до t. Матимемо

$$\int\limits_0^t \frac{W_2^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}} d\sigma \leq C_{38}\sqrt{t} + C_{39} t^{\gamma+\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1} W_2^4(\tau) d\tau.$$

Тоді

$$W_2(t) \leq C_{40} + C_{41} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau. \tag{45}$$

Позначимо

$$\chi(t) = C_{40} + C_{41} \int\limits_0^t \frac{W_2^4(\tau)}{\tau^{1-\gamma}} d\tau.$$

Звідси знаходимо

$$\chi'(t) \leq \frac{C_{41}}{t^{1-\gamma}} \chi^4(t).$$

Розв'язуючи дану нерівність, отримуємо

$$\chi(t) \leq \frac{C_{40}\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{\gamma - 3C_{40}^3 C_{41} t^\gamma}}, \quad t \in [0, t_3],$$

де число t_3, $0 < t_3 \leq T$, задовольняє нерівність

$$\gamma - 3C_{40}^3 C_{41} t_3^\gamma > 0.$$

Отже, встановлено оцінку

$$W_2(t) \leq M_2, \quad t \in [0, t_3]. \tag{46}$$

У випадку $\gamma > 1$ нерівність (43) зводиться до вигляду

$$W_1(t) \leq C_{42} + C_{43} t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau (W_1(\tau) + 1)^2}{\sqrt{t - \tau}} d\tau$$

і розв'язується аналогічно до попереднього.

Отже, маємо оцінки

$$\left| w(y,t) \right| \leq \frac{M_2}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \qquad \left| p(t) \right| \leq M_3 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}, \quad y \in [0,1], \quad t \in [0, t_3]. \tag{47}$$

Таким чином, встановлено апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (15), (16), (20) – (22).

4. Доведення існування розв'язку. Введемо функцію $\widetilde{w}(y,t) = w(y,t) t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і подамо систему рівнянь (15), (16), (20) – (22) у вигляді

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)} \frac{\widetilde{w}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}} d\eta d\tau, \tag{48}$$

$$\widetilde{w}(y,t) = w_0(y,t) t^{\frac{\beta-1}{2}} + t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)} \frac{\widetilde{w}(\eta,\tau)}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}} d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{49}$$

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\displaystyle\int_0^1 v(y,t) dy}, \tag{50}$$

$$b(t) \widetilde{w}(0,t) = \frac{\mu_3(t)}{h(t)} t^{\frac{\beta-1}{2}}, \tag{51}$$

$$p(t) = \left(\mu_4'(t) - h(t) \int\limits_0^1 f(yh(t),t) dy - \right.$$
$$\left. - \frac{b(t) h(t) (\widetilde{w}(1,t) - \widetilde{w}(0,t))}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} \right) \mu_2^{-1}(t), \quad t \in [0, t_0], \tag{52}$$

де $v_0(y,t)$, $w_0(y,t)$ визначаються рівностями (18), (19), а $t_0 = \min\{t_1, t_2, t_3\}$. Систему рівнянь (48) – (52) подамо у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v, \widetilde{w}, h, b, p)$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (48) – (52). Визначимо множину $N = \left\{ (v, \widetilde{w}, h, b, p) \in \left(C(\overline{Q}_{t_0}) \right)^2 \times \left(C[0, t_0] \right)^3 : M_0 \leq \right.$ $\leq v(y,t) \leq M_1$, $\left| \widetilde{w}(y,t) \right| \leq M_2$, $H_0 \leq h(t) \leq H_1$, $A_0 \leq \dfrac{b(t)}{t^\beta} \leq A_1$, $|p(t)| \leq$ $\left. \leq M_3 t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} \right\}$. Очевидно, що множина $\mathcal{N}$ замкнена й опукла, а оператор P переводить її в себе. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться, як в [2, 8].

Тоді, згідно з теоремою Шаудера, існує розв'язок системи рівнянь (48) – (52), а отже, і розв'язок задачі (6) – (10).

5. Доведення єдиності розв'язку. Припустимо, що існують два розв'язки $(v_i(y,t), w_i(y,t), h_i(t), b_i(t), p_i(t))$, $i = 1, 2$, системи рівнянь (15), (16), (20) – (22). Позначимо $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$, $w(y,t) = w_1(y,t) - w_2(y,t)$, $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$, $b(t) = b_1(t) - b_2(t)$, $p(t) = p_1(t) - p_2(t)$. Ці функції задовольняють систему рівнянь

$$v(y,t) = v_0^*(y,t) + \int_0^t \int_0^1 \Big(G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau) - G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\Big) \frac{\eta p_2(\tau)}{h_2(\tau)} w_2(\eta,\tau) d\eta d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p_1(\tau)}{h_1(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h_1(\tau)} w_2(\eta,\tau) d\eta d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p_2(\tau) h(\tau)}{h_1(\tau) h_2(\tau)} w_2(\eta,\tau) d\eta d\tau, \tag{53}$$

$$w(y,t) = w_0^*(y,t) + \int_0^t \int_0^1 \Big(G_{1y}^{(1)}(y,t,\eta,\tau) - G_{1y}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\Big) \frac{\eta p_2(\tau)}{h_2(\tau)} w_2(\eta,\tau) d\eta d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^{(1)}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p_1(\tau)}{h_1(\tau)} w(\eta,\tau) d\eta d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^{(1)}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h_1(\tau)} w_2(\eta,\tau) d\eta d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^{(1)}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p_2(\tau) h(\tau)}{h_1(\tau) h_2(\tau)} w_2(\eta,\tau) d\eta d\tau, \quad (y,t) \in Q_T, \tag{54}$$

$$h(t) = -\frac{h_1(t) h_2(t)}{\mu_4(t)} \int_0^1 v(y,t) dy, \tag{55}$$

$$b(t) = -\frac{b_1(t) b_2(t) h_2(t)}{\mu_3(t)} w(0,t) - \frac{b_2(t) h(t)}{h_1(t)}, \tag{56}$$

$$p(t)\mu_2(t) = -h_1(t) b_1(t) (w(1,t) - w(0,t)) -$$

$$- h_1(t) b(t) (w_2(1,t) - w_2(0,t)) - h(t) b_2(t) (w_2(1,t) - w_2(0,t)) -$$

$$- h_1(t) \int_0^1 \big(f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t)\big) dy - h(t) \int_0^1 f(yh_2(t),t) dy, \quad t \in [0,T], \tag{57}$$

де через $G_i^{(j)}$, $i,j=1,2$, позначено функції Гріна i-ї крайової задачі для рівняння

$$v_{jt}=b_j(t)v_{jyy}+f(yh_j(t),t).$$

Для доведення єдиності розв'язку системи рівнянь (53) – (57) виведемо з рівняння (56) з використанням інших рівнянь системи інтегральну нерівність щодо $|b(t)|$, з якої буде випливати $b(t)\equiv 0$. Для цього спочатку проведемо оцінки розв'язків системи рівнянь (53) – (57).

Використовуючи (18), (19), знаходимо

$$v_0^*(y,t)=\int\limits_0^1\big(G_1^{(1)}(y,t,\eta,0)-G_1^{(2)}(y,t,\eta,0)\big)\varphi(\eta h_0)d\eta+\int\limits_0^t\big(G_{1\eta}^{(1)}(y,t,0,\tau)-$$
$$-G_{1\eta}^{(2)}(y,t,0,\tau)\big)b_1(\tau)\mu_1(\tau)d\tau+\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(2)}(y,t,0,\tau)b(\tau)\mu_1(\tau)d\tau-\int\limits_0^t\big(G_{1\eta}^{(1)}(y,t,1,\tau)-$$
$$-G_{1\eta}^{(2)}(y,t,1,\tau)\big)b_1(\tau)\mu_2(\tau)d\tau-\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(2)}(y,t,1,\tau)b(\tau)\mu_2(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau)(f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\big(G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau)-G_1^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\big)f(\eta h_2(\tau),\tau)d\eta d\tau, \tag{58}$$

$$w_0^*(y,t)=h_0\int\limits_0^1\big(G_2^{(1)}(y,t,\eta,0)-G_2^{(2)}(y,t,\eta,0)\big)\varphi'(\eta h_0)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t\big(G_2^{(1)}(y,t,0,\tau)-G_2^{(2)}(y,t,0,\tau)\big)(f(0,\tau)-\mu_1'(\tau))d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\big(G_2^{(1)}(y,t,1,\tau)-G_2^{(2)}(y,t,1,\tau)\big)(\mu_2'(\tau)-f(h_2(\tau),\tau))d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t G_2^{(1)}(y,t,1,\tau)(f(h_1(\tau),\tau)-f(h_2(\tau),\tau))d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2^{(1)}(y,t,\eta,\tau)h_1(\tau)(f_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)-f_\eta(\eta h_2(\tau),\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2^{(1)}(y,t,\eta,\tau)h(\tau)f_\eta(\eta h_2(\tau),\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\big(G_2^{(1)}(y,t,\eta,\tau)-G_2^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\big)h_2(\tau)f(\eta h_2(\tau),\tau)d\eta d\tau. \tag{59}$$

Позначимо $V(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} \big|v(y,t)\big|$, $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} \big|w(y,t)\big|$, $b_0(t) = \dfrac{b(t)}{t^\beta}$, $\widetilde{b}_{\max} = = \max\limits_{0\le\tau\le t} \big|b_0(\tau)\big|$, $\widetilde{h}_{\max} = \max\limits_{0\le\tau\le t} \big|h(\tau)\big|$. Використовуючи формулу Лагранжа

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) = yh(t)\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma \tag{60}$$

та наведені в [2] оцінки, одержуємо

$$\begin{gathered}\big|v_0^*(y,t)\big| \le C_{44}\widetilde{b}_{\max}(t) + C_{45}\widetilde{h}_{\max}(t)t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma},\\ \big|\,w_0^*(y,t)\big| \le C_{46}\frac{\widetilde{b}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + C_{47}\frac{\widetilde{h}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}.\end{gathered} \tag{61}$$

З урахуванням оцінок (61) з рівнянь (53), (54) знаходимо

$$V(t) \le C_{48}\widetilde{b}_{\max}(t) + C_{62}t^{\gamma+1}\widetilde{h}_{\max}(t) + C_{49}\int\limits_0^t\left(\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau) + \frac{|p(\tau)|}{\tau^{\frac{\beta-1}{2}}}\right)d\tau, \tag{62}$$

$$W(t) \le \frac{C_{50}\widetilde{b}_{\max}(t) + C_{51}\widetilde{h}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{52}}{t^{\frac{\beta}{2}}}\int\limits_0^t\frac{\tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}W(\tau) + |p(\tau)|\tau^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \tag{63}$$

З рівняння (57) отримуємо нерівність

$$|\,p(t)| \le C_{53}t^\beta W(t) + C_{54}t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{b}_{\max}(t) + C_{55}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\widetilde{h}_{\max}(t). \tag{64}$$

Для оцінки $h(t)$ підставимо (53), (58) в (55) і розглянемо вираз

$$S_1 \equiv \int\limits_0^1\varphi(\eta h_0)d\eta\int\limits_0^1\big(G_1^{(1)}(y,t,\eta,0) - G_1^{(2)}(y,t,\eta,0)\big)dy.$$

Перетворимо даний вираз, взявши до уваги те, що розв'язком задачі

$$\begin{gathered}v_t = b(t)v_{yy}, \quad (y,t)\in Q_T, \qquad v(y,0)=1, \quad y\in[0,1],\\ v(0,t) = v(1,t) = 1, \quad t\in[0,T],\end{gathered}$$

є функція $v(y,t) = 1$, яку можна подати у вигляді

$$v(y,t) = \int\limits_0^1 G_1(\eta,t,y,0)dy - \int\limits_0^t G_{1y}(\eta,t,0,\tau)b(\tau)d\tau + \int\limits_0^t G_{1y}(\eta,t,1,\tau)b(\tau)d\tau.$$

Звідси

$$\int\limits_0^1 G_1(\eta,t,y,0)dy = 1 - \int\limits_0^t G_{1y}(\eta,t,0,\tau)b(\tau)d\tau + \int\limits_0^t G_{1y}(\eta,t,1,\tau)b(\tau)d\tau.$$

Підставляючи даний вираз в S_1, отримуємо

$$S_1 = \int_0^1 \varphi(\eta h_0)\Bigg(-\int_0^t \big(G_{1y}^{(1)}(\eta,t,0,\tau) -$$

$$- G_{1y}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\big)b_1(\tau)d\tau - \int_0^t G_{1y}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)b(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t \big(G_{1y}^{(1)}(\eta,t,1,\tau) - G_{1y}^{(2)}(\eta,t,1,\tau)\big)b_1(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t G_{1y}^{(2)}(\eta,t,1,\tau)b(\tau)d\tau\Bigg)d\eta = \sum_{i=1}^4 S_1^{(i)}.$$

Використовуючи рівність $G_{1y}(\eta,t,y,\tau) = -G_{2\eta}(\eta,t,y,\tau)$ та інтегруючи частинами, знаходимо

$$S_1^{(1)} = \int_0^1 \varphi(\eta h_0)\left(\int_0^t \big(G_{2\eta}^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_{2\eta}^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\big)b_1(\tau)d\tau\right)d\eta =$$

$$= \int_0^t b_1(\tau)\Big(\big(G_2^{(1)}(1,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(1,t,0,\tau)\big)\varphi(h_0) -$$

$$-\big(G_2^{(1)}(0,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(0,t,0,\tau)\big)\varphi(0)\Big)d\tau -$$

$$-h_0\int_0^t b_1(\tau)\left(\int_0^1 \big(G_2^{(1)}(\eta,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(\eta,t,0,\tau)\big)\varphi'(\eta h_0)d\eta\right)d\tau.$$

Враховуючи оцінки функції Гріна, звідси одержуємо

$$|S_1^{(1)}| \le C_{56}t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{b}_{\max}(t).$$

Оцінки інших виразів, що входять до S_1, проводяться аналогічно, внаслідок чого маємо

$$|S_1| \le C_{57}t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{b}_{\max}(t).$$

Розглянемо ще один вираз, що входить до складу $h(t)$:

$$S_2 = \int_0^1 dy\int_0^t\int_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,\tau)(f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau))d\eta d\tau.$$

Використовуючи (60) та умови теореми, маємо

$$|S_2| \le C_{58}\widetilde{h}_{\max}(t)\int_0^t \tau^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}d\tau \le C_{59}t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma}\widetilde{h}_{\max}(t).$$

Діючи аналогічно, приходимо до оцінки

$$\widetilde{h}_{\max}(t) \le C_{59} t \widetilde{b}_{\max}(t) + C_{60} t^{\frac{\beta+1}{2}} W(t) + C_{61} t^{\gamma} \widetilde{h}_{\max}(t),$$

звідки отримуємо

$$\widetilde{h}_{\max}(t) \le C_{62} t \widetilde{b}_{\max}(t) + C_{63} t^{\frac{\beta+1}{2}} W(t), \quad t \in [0, t_4], \tag{65}$$

де число t_4, $0 < t_4 \le T$, визначається з умови $C_{61} t_4^{\gamma} \le 1/2$.

Оцінка (65) дає змогу звести (62), (63) до системи

$$V(t) \le C_{64} \widetilde{b}_{\max}(t) + C_{65} t^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma} W(t) + C_{66} \int\limits_0^t \tau^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma} W(\tau) d\tau, \tag{66}$$

$$W(t) \le C_{67} \frac{\widetilde{b}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + C_{68} t W(t) + \frac{C_{69}}{t^{\frac{\beta}{2}}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma} W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \tag{67}$$

Вибираючи число t_5, $0 < t_5 \le T$, так, щоб $1 - C_{68} t_5 \ge \dfrac{1}{2}$, із (67) знаходимо

$$W(t) \le C_{70} \frac{\widetilde{b}_{\max}(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + \frac{C_{71}}{t^{\frac{\beta}{2}}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{\beta+1}{2}+\gamma} W(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_5].$$

Отриману нерівність домножимо на $t^{\frac{\beta-1}{2}}$ і позначимо $W_1(t) = W(t) t^{\frac{\beta-1}{2}}$:

$$W_1(t) \le C_{72} \widetilde{b}_{\max}(t) + C_{73} t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma} W_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_5]. \tag{68}$$

У нерівності (68) покладемо $t = \sigma$ і, домноживши на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, зінтегруємо її по σ від 0 до t:

$$W_1(t) \le C_{74} \widetilde{b}_{\max}(t) + C_{75} t^{\gamma-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1} W_1(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_5]. \tag{69}$$

З (69) випливає оцінка $W_1(t) \le C_{76} \widetilde{b}_{\max}(t)$, або

$$W(t) \le \frac{C_{76}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} \widetilde{b}_{\max}(t), \quad t \in [0, t_5]. \tag{70}$$

Згідно з (65), (66) отримуємо

$$\widetilde{h}_{\max}(t) \le C_{77} t \widetilde{b}_{\max}(t), \quad V(t) \le C_{78} \widetilde{b}_{\max}(t), \quad t \in [0, t_5]. \tag{71}$$

Перейдемо до оцінки $|w(0,t)|$. Розглянемо вираз

$$R_1 \equiv \int\limits_0^t \left| G_2^{(1)}(0,t,0,\tau) - G_2^{(2)}(0,t,0,\tau) \right| (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \left| \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \right| (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} \exp\left(-\frac{n^2}{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \exp\left(-\frac{n^2}{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)} \right) \right| (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) d\tau \equiv$$

$$\equiv R_1^{(1)} + R_1^{(2)}.$$

Доданок $R_1^{(2)}$ подамо у вигляді

$$R_1^{(2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t (f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)) \left| \int\limits_{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}^{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi z}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{z} \right) \right) dz \right| d\tau,$$

звідки, врахувавши обмеженість підінтегрального виразу та нерівність

$$|\theta_1(t) - \theta_1(\tau) - \theta_2(t) + \theta_2(\tau)| \le \int\limits_\tau^t |b_0(\sigma)| \sigma^\beta d\sigma \le \frac{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}{\beta+1} \widetilde{b}_{\max}(t), \qquad (72)$$

отримаємо

$$R_1^{(2)} \le C_{79} t^{\beta+2} \widetilde{b}_{\max}(t).$$

З (42) випливає оцінка

$$\theta_i(t) - \theta_i(\tau) = \int\limits_\tau^t b_i(\sigma) d\sigma \ge \frac{K_{\min}^2(t)}{(1+q)^2 h_{imax}^2(t)} \frac{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}{\beta+1},$$

використавши яку, матимемо

$$R_1^{(1)} \le \frac{\sqrt{\beta+1}(1+q)^3 \widetilde{b}_{\max}(t) h_{1\max}(t) h_{2\max}(t)}{K_{\min}^3(t) \left(\frac{1}{h_{1\max}(t)} + \frac{1}{h_{2\max}(t)} \right)} \int\limits_0^t \frac{f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau \le$$

$$\le \frac{(1+q)^3 h_{1\max}^2(t) h_{2\max}^2(t) \mu_3(t)}{t^\beta K_{\min}^4(t) (h_{1\max}(t) + h_{2\max}(t))} \widetilde{b}_{\max}(t).$$

Застосовуючи аналогічні міркування, знаходимо

$$\big| w(0,t) \big| \le C_{80} \widetilde{b}_{\max}(t) +$$

$$+ \frac{(1+q)^3 h_{1\max}^2(t) h_{2\max}^2(t) \mu_3(t)}{t^\beta K_{\min}^4(t) (h_{1\max}(t) + h_{2\max}(t))} \widetilde{b}_{\max}(t) + C_{81} t^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}} \widetilde{b}_{\max}(t). \qquad (73)$$

Поділимо рівність (56) на t^β. Використовуючи (38), отримуємо

$$\big| b_0(t) \big| \le \frac{K_{\max}^4(t) t^\beta h_{2\max}(t)}{(1-q)^4 h_{1\min}^2(t) h_{2\min}^2(t) \mu_3(t)} |w(0,t)| + C_{82} \widetilde{h}_{\max}(t),$$

або, враховуючи (73), (71),

$$\widetilde{b}_{\max}(t) \le \left(C_{83} t^{\frac{\beta-1}{2}} + \frac{K_{\max}^4(t) h_{1\max}^2(t) h_{2\max}^3(t)(1+q)^4}{K_{\min}^4(t) h_{1\min}^2(t) h_{2\min}^2(t)(h_{1\max}(t)+h_{2\max}(t))(1-q)^4} + \right.$$
$$\left. + C_{84} t^{\gamma} + C_{85} t \right) \widetilde{b}_{\max}(t), \quad t \in [0, t_5]. \tag{74}$$

З того, що $\lim\limits_{t\to+0} K_{\max}(t) = \lim\limits_{t\to+0} K_{\min}(t)$, $\lim\limits_{t\to+0} h_{i\max}(t) = \lim\limits_{t\to+0} h_{i\min}(t) = h_0$, $i = 1, 2$, випливає, що для заданого q, $0 < q < 1$, існує таке число t_6, $0 < t_6 \le T$, що

$$\frac{K_{\max}^4(t) h_{1\max}^2(t) h_{2\max}^3(t)}{K_{\min}^4(t) h_{1\min}^2(t) h_{2\min}^2(t)(h_{1\max}(t)+h_{2\max}(t))} \le \frac{1+q}{2}, \quad t \in [0, t_8],$$

$$C_{83} t^{\frac{\beta-1}{2}} + C_{84} t^{\gamma} + C_{85} t \le q, \quad t \in [0, t_6].$$

Зафіксуємо число q так, щоб $0 < q < \dfrac{\sqrt[5]{2}-1}{\sqrt[5]{2}+1}$. Тоді

$$C_{83} t^{\frac{\beta-1}{2}} + \frac{K_{\max}^4(t) h_{1\max}^2(t) h_{2\max}^3(t)(1+q)^4}{K_{\min}^4(t) h_{1\min}^2(t) h_{2\min}^2(t)(h_{1\max}(t)+h_{2\max}(t))(1-q)^4} +$$
$$+ C_{84} t^{\gamma} + C_{85} t \le \frac{(1+q)^5}{2(1-q)^4} + q < 1.$$

Враховуючи останню нерівність в (74), отримуємо, що $\widetilde{b}_{\max}(t) \le 0,\ t \in [0, t_6]$, що неможливо. Отже,

$$\widetilde{b}_{\max}(t) \equiv 0,\ t \in [0, T_0],$$

де $T_0 = \min\{t_0, t_4, t_5, t_6\}$. Звідси

$$b(t) \equiv 0, \quad h(t) \equiv 0, \quad p(t) \equiv 0, \quad t \in [0, T_0],$$

$$v(y,t) \equiv 0, \quad w(y,t) \equiv 0, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0, T_0].$$

Теорему доведено.

1. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901 – 910.
2. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Там же. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1487 – 1500.
3. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1987. – № 3. – С. 27 – 29.
4. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функцион. анализа в уравнениях мат. физики. – Новосибирск, 1987. – С. 66 – 71.
5. *DiBenedetto E., Showalter R. E.* A free-boundary problem for a degenerate parabolic system // J. Different. Equat. – 1983. – **50**, № 1. – P. 1 – 19.
6. *Гринців Н.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 28 – 40.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
8. *Ivanchov M.* Inverse problem for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003.
9. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965.

Одержано 28.09.07