УДК 517.5

$\boxed{\text{А. А. Лигун}}$ (Днепродзерж. техн. ун-т),
В. Г. Доронин (Днепропетр. нац. ун-т)

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ L_2-АППРОКСИМАЦИИ НА ПРЯМОЙ

We investigate exact constants in the Jackson-type inequalities in the space L_2 for the approximation of functions on the straight line by a subspace of entire functions of exponential type.

Проведено дослідження точних констант у нерівностях типу Джексона у просторі L_2 для наближення функцій на прямій підпростором цілих функцій експоненціального типу.

Пусть L_2 — пространство вещественнозначных функций f, определенных и измеримых на $(-\infty, \infty)$, которые удовлетворяют условию

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 < \infty;$$

L_2^r, $r \geq 0$, — множество всех функций f, у которых $(r-1)$-я производная на оси локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_2$ (если r не целое, то $f^{(r)}$ — производная в смысле Вейля).

Обозначим через E_σ класс целых функций экспоненциального типа с показателем $\geq \sigma$,

$$B_\sigma = L_2 \cap E_\sigma,$$

$$A_\sigma(f) = \inf\{\|f - g_\sigma\| \mid g_\sigma \in B_\sigma\} \tag{1}$$

— приближение функции $f \in L_2$ множеством B_σ.

Пусть

$$\omega_p(f;t) = \sup\left\{\left\|\Delta_\eta^p f(\cdot)\right\| \,\middle|\, |\eta| \leq t\right\} \tag{2}$$

— p-й интегральный модуль гладкости функции f, где $\Delta_\eta^p f(x)$ — разность порядка p функции f в точке x шагом η.

Как обычно,

$$F(f;\omega) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \exp(-i\omega t)\, f(t)\, dt \tag{3}$$

— трансформация Фурье функции f.

Неравенства вида

$$A_\sigma(f) \leq \frac{\aleph}{\sigma^r}\, \omega_p\left(f^{(r)}; \delta/\sigma\right) \tag{4}$$

называют неравенствами типа Джексона, а наименьшую константу в них

$$\aleph = \aleph_{\sigma,r,p}(\delta) = \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\sigma^r A_\sigma(f)}{\omega_p\left(f^{(r)}; \delta/\sigma\right)} \tag{5}$$

— точной.

Проблема нахождения точных констант в неравенствах типа Джексона в пространстве L_2 изучалась во многих работах (см., например, [1 – 5] и приведенную в них библиографию).

Целью данной работы является распространение точных неравенств типа Джексона для наилучших приближений тригонометрическими полиномами периодических функций в пространстве L_2, исследованных нами в [3, 4], на случай аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа функций на всей оси в пространстве L_2.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При любом* $a > 1$ *для любых* $\sigma > 0$, $r \geq 0$, $p = 1, 2, \ldots$ *и любой ненулевой неотрицательной суммируемой функции* $\theta(t)$, $0 < t < b < \pi$, *имеют место неравенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\sigma^{2r} A_\sigma^2(f)}{\int_0^b \omega_p^2\left(f^{(r)}; t/\sigma\right)\theta(t)\,dt} \leq \frac{a^{2r}}{a^{2r}-1}\left\{2^p \inf_{1 \leq y \leq a} \Phi_{b,r,p}(\theta; y)\right\}^{-1}, \tag{6}$$

где

$$\Phi_{b,r,p}(\theta; y) = y^{2r}\int_0^b (1-\cos yt)^p\, \theta(t)\,dt. \tag{7}$$

Доказательство. Известно [1], что для любой функции $f \in L_2$

$$A_\sigma^2(f) = \int_{|\omega| \geq \sigma} |F(f;\omega)|^2\, d\omega. \tag{8}$$

В силу этого с учетом того, что вследствие вещественнозначности f функция $|F(f;w)|$ четная, для любой функции $f \in L_2^r$ имеем

$$A_\sigma^2(f) = 2\int_\sigma^\infty |F(f;\omega)|^2\, d\omega = \sum_{\mu=0}^\infty \int_{a^\mu\sigma}^{a^{\mu+1}\sigma} 2|F(f;\omega)|^2\, d\omega =$$

$$= \sum_{\mu=0}^\infty \int_{a^\mu\sigma}^{a^{\mu+1}\sigma} 2|F(f;\omega)|^2 \frac{2^p\omega^{2r}\int_0^b\left(1-\cos\frac{\omega}{a^\mu\sigma}t\right)^p\theta(t)\,dt}{2^p\left(a^\mu\sigma\right)^{2r}\left(\frac{\omega}{a^\mu\sigma}\right)^{2r}\int_0^b\left(1-\cos\frac{\omega}{a^\mu\sigma}t\right)^p\theta(t)\,dt}\,d\omega \leq$$

$$\leq \sum_{\mu=0}^\infty \frac{\int_0^b\left\{\int_{a^\mu\sigma}^{a^{\mu+1}\sigma} 2|F(f;\omega)|^2\, 2^p\omega^{2r}\left(1-\cos\frac{\omega}{a^\mu\sigma}t\right)^p d\omega\right\}\theta(t)\,dt}{\left(a^{2r}\right)^\mu\sigma^{2r}2^p \inf\limits_{1\leq y\leq a} y^{2r}\int_0^b(1-\cos yt)^p\,\theta(t)\,dt} \leq$$

$$\leq \sum_{\mu=0}^\infty \frac{\int_0^b\left\{\int_0^\infty 2|F(f;\omega)|^2\, 2^p\omega^{2r}\left(1-\cos\frac{\omega}{a^\mu\sigma}t\right)^p d\omega\right\}\theta(t)\,dt}{\left(a^{2r}\right)^\mu\sigma^{2r}2^p \inf\limits_{1\leq y\leq a}\Phi_{b,r,p}(\theta; y)}. \tag{9}$$

Используя фундаментальные свойства трансформаций Фурье, получаем

$$F\left(\Delta_\eta^p f^{(r)};\omega\right) = (i\omega)^r\left(e^{i\eta\omega}-1\right)^p F(f;\omega). \tag{10}$$

По теореме Планшереля, так как $\Delta_\eta^p f^{(r)} \in L_2$, то $F\left(\Delta_\eta^p f^{(r)}\right) \in L_2$ и эти функции имеют одинаковые нормы. Поэтому, принимая во внимание (10), находим

$$\left\| \Delta_\eta^p f^{(r)}(\,\cdot\,) \right\|^2 = 2\int_0^\infty |F(f;\omega)|^2\, 2^p \omega^{2r}(1-\cos\eta\omega)^p\, d\omega. \tag{11}$$

Следовательно, учитывая определение (2) модуля гладкости, устанавливаем, что

$$\int_0^\infty 2^{p+1}|F(f;\omega)|^2\,\omega^{2r}(1-\cos x\omega)^p\, d\omega \le \omega_p^2\big(f^{(r)};x\big). \tag{12}$$

Применяя эту оценку в соотношении (9), заключаем, что для любой функции $f \in L_2^r$

$$A_\sigma^2(f) \le \sum_{\mu=0}^\infty \frac{\int_0^b \omega_p^2\big(f^{(r)}; t/a^\mu\sigma\big)\theta(t)\,dt}{(a^{2r})^\mu \sigma^{2r} 2^p \inf\limits_{1\le y\le a} \Phi_{b,r,p}(\theta;y)} \le$$

$$\le \frac{\int_0^b \omega_p^2\big(f^{(r)}; t/\sigma\big)\theta(t)\,dt}{\sigma^{2r} 2^p \inf\limits_{1\le y\le a} \Phi_{b,r,p}(\theta;y)} \sum_{\mu=0}^\infty \left(\frac{1}{a^{2r}}\right)^\mu =$$

$$= \frac{a^{2r}}{a^{2r}-1}\left\{2^p \inf_{1\le y\le a} \Phi_{b,r,p}(\theta;y)\right\}^{-1} \frac{1}{\sigma^{2r}} \int_0^b \omega_p^2\big(f^{(r)}; t/\sigma\big)\theta(t)\,dt. \tag{13}$$

Наконец, переходя в полученном неравенстве к супремуму по $f \in L_2^r$, $f \ne$ $\ne \text{const}$, приходим к неравенству (6).

Теорема 1 доказана.

Пусть $h > 0$, $\alpha_k \ge 0$. Рассмотрим функции

$$\delta_h(t) = \{1/h\,(|t| < h/2);\, 0\,(|t| \ge h/2)\}$$

и

$$\theta_h(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\, \delta_h(t-\xi_k),$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$, $b \ge \xi_n + h/2$.

Из теоремы 1, полагая в ней $\theta(t) = \theta_h(t)$, предельным переходом по $h \to 0$ получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *При любом* $a > 1$ *для любых* $\sigma > 0$, $r \ge 0$, $p = 1, 2, \ldots$, $\alpha_k \ge$ ≥ 0, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$ *имеют место неравенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r \\ f \ne \text{const}}} \frac{\sigma^{2r} A_\sigma^2(f)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k\, \omega_p^2\big(f^{(r)}; \xi_k/\sigma\big)} \le$$

$$\le \frac{a^{2r}}{a^{2r}-1}\left\{2^p \inf_{1\le y\le a} y^{2r} \sum_{k=1}^n \alpha_k (1-\cos\xi_k y)^p\right\}^{-1}. \tag{14}$$

Заметим, что предельный переход в (6) и (14) по $a \to \infty$ позволяет установить справедливость соответственно следующих неравенств:

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\sigma^{2r} A_\sigma^2(f)}{\int_0^b \omega_p^2\left(f^{(r)}; t/\sigma\right)\theta(t)\,dt} \;\le\; \left\{2^p \inf_{y\ge 1} y^{2r}\,\Phi_{b,r,p}(\theta; y)\right\}^{-1}, \tag{15}$$

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{\sigma^{2r} A_\sigma^2(f)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k\, \omega_p^2\left(f^{(r)}; \xi_k/\sigma\right)} \;\le\; \left\{2^p \inf_{y\ge 1} y^{2r} \sum_{k=1}^n \alpha_k (1-\cos\xi_k y)^p\right\}^{-1}. \tag{16}$$

Впрочем, эти результаты вполне согласуются с результатами [5] (оценки сверху в следствиях 1 и 2).

Положим

$$c_{r,p} \;=\; \left(4-2^{-2r/p}\right)^{-p/2} \tag{17}$$

и

$$\xi \;=\; \xi_{r,p} \;=\; \frac{2}{\pi}\arcsin 2^{-(r/p)-1}. \tag{18}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $r \ge p$ *таковы, что для каждой несократимой дроби* l/L *выполняются неравенства*

$$|\xi - l/L| \;\ge\; 4L^{-(r/p)-1}. \tag{19}$$

Тогда для любого $\sigma>0$ *при любом* $\delta \ge (1+\xi)\pi$ *имеют место неравенства*

$$\aleph_{\sigma,r,p}(\delta) \;\le\; c_{r,p}. \tag{20}$$

Доказательство. Выберем

$$a \;=\; \xi + \frac{r}{p\pi}\operatorname{tg}(\pi\xi), \tag{21}$$

$$\alpha_1 \;=\; (1+\alpha)/2, \qquad \alpha_2 \;=\; (1-\alpha)/2, \tag{22}$$

$$\xi_1 \;=\; (1-\xi)\pi, \qquad \xi_2 \;=\; (1+\xi)\pi. \tag{23}$$

Тогда из правого неравенства в соотношении (14) следует, что для любой функции $f\in L_2^r$ и любого $a>1$

$$\sigma^{2r} A_\sigma^2(f) \;\le\; \frac{a^{2r}}{a^{2r}-1}\,\frac{\alpha_1\omega_p^2\left(f^{(r)};\xi_1/\sigma\right)+\alpha_2\,\omega_p^2\left(f^{(r)};\xi_2/\sigma\right)}{2^p \inf\limits_{1\le y\le a} y^{2r}\left\{\alpha_1(1-\cos\xi_1 y)^p \;+\; \alpha_2(1-\cos\xi_2 y)^p\right\}} \;\le$$

$$\le\; \frac{a^{2r}}{a^{2r}-1}\,\frac{\alpha_1\omega_p^2\left(f^{(r)};(1-\xi)\pi/\sigma\right)+\alpha_2\,\omega_p^2\left(f^{(r)};(1+\xi)\pi/\sigma\right)}{2^p \inf\limits_{1\le y\le a}\theta_{r,p}(y)} \;\le$$

$$\le\; \frac{a^{2r}}{a^{2r}-1}\,\frac{\omega_p^2\left(f^{(r)};(1+\xi)\pi/\sigma\right)}{2^p \inf\limits_{1\le y\le a}\theta_{r,p}(y)}, \tag{24}$$

где

$$\theta_{r,p}(y) \;=\; y^{2r}\left\{\alpha_1\left(1-\cos(1-\xi)\pi y\right)^p \;+\; \alpha_2\left(1-\cos(1+\xi)\pi y\right)^p\right\}. \tag{25}$$

Отсюда предельным переходом по $a\to\infty$ получаем, что для любой функции $f\in L_2^r$

$$\sigma^{2r} A_\sigma^2(f) \;\le\; \frac{\omega_p^2\big(f^{(r)};(1+\xi)\pi/\sigma\big)}{2^p \inf\limits_{y\ge 1}\theta_{r,p}(y)}. \tag{26}$$

Величина

$$\inf_{y\ge 1}\theta_{r,p}(y)$$

исследована в работе [4], где установлено, что

$$\inf_{y\ge 1}\theta_{r,p}(y) \;=\; \theta_{r,p}(1) \;=\; 2^p\big(1-2^{-2(r/p)-2}\big)^p. \tag{27}$$

С учетом этого из соотношения (26) получаем, что для любой функции $f \in L_2^r$ при любом $\delta \ge (1+\xi)\pi$ имеют место соотношения

$$\sigma^{2r} A_\sigma^2(f) \;\le\; \frac{2^{2r+2p}}{2^{2p}\left(2^{2(r/p)+2}-1\right)^p}\,\omega_p^2\big(f^{(r)};(1+\xi)\pi/\sigma\big) \;\le\; c_{r,p}^2\,\omega_p^2\big(f^{(r)};\delta/\sigma\big). \tag{28}$$

Отсюда следует, что выполняется неравенство (20).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для любых* $\sigma > 0$, $r \ge 0$, $p = 1, 2, \ldots$, $\delta > 0$ *имеют место неравенства*

$$\aleph_{\sigma,r,p}(\delta) \;\ge\; \sup_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m} \frac{\sum_{k=1}^m \beta_k^2}{2^p \max\limits_{|t|\le\delta} \sum_{k=1}^m k^{2r}\beta_k^2(1-\cos kt)^p}. \tag{29}$$

Доказательство. В условиях теоремы выберем любой вектор $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ и рассмотрим последовательность четных функций $f_{n,B} \in L_2$:

$$f_{n,B}(x) \;=\; \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \cos k(\sigma+\alpha_n)x, & 0 \le x \le 2n\pi, \\ \psi_n(x)\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \cos k(\sigma+\alpha_n)x, & 2n\pi \le x \le (2n+1)\pi, \\ 0, & x \ge (2n+1)\pi, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$\psi_n(x) \;=\; H_r \int\limits_x^{(2n+1)\pi} \sum_{k=1}^m \beta_k \cos^r k\left(y - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)dy,$$

константа H_r определена условием $\psi_n(2n\pi) = 1$ и, наконец, $\alpha_n = 1/\sqrt{n}$.

По аналогии с [1], предварительно построив $F(f_{n,B};\,\omega)$ — трансформацию Фурье последовательности $f_{n,B}(x)$ и применив затем формулу (8), получим асимптотическое равенство

$$A_\sigma^2(f_{n,B}) \;=\; 2n\pi \sum_{k=1}^m \beta_k^2\{1+o(1)\}, \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Намереваясь далее оперировать величиной $\omega_p^2\big(f_{n,B}^{(r)};\ \delta/\sigma\big)$, мы, естественно, сначала (шаг за шагом по p) строим функцию $\Delta_\eta^p f_{n,B}^{(r)}(x)$ и затем устанавливаем, что для каждого $p = 1, 2, \ldots$ при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\left\| \Delta_\eta^p f_{n,B}^{(r)}(\,\cdot\,) \right\|^2 =$$

$$= 2^{p+1} n\pi(\sigma+\alpha_n)^{2r}\{1+o(1)\}\left[\sum_{k=1}^{m} k^{2r}\beta_k^2(1-\cos k(\sigma+\alpha_n)\eta)^p + o(1)\right]. \qquad (32)$$

Отсюда следует, что при любых фиксированных σ, B, r, p, η равномерно по σ, $0 \le \sigma \le \pi$, выполняется соотношение

$$\left\| \Delta_\eta^p f_{n,B}^{(r)} \right\|^2 = 2^{p+1} n\pi\{1+o(1)\}\sigma^{2r} \sum_{k=1}^{m} k^{2r}\beta_k^2(1-\cos k\sigma\eta)^p, \quad n\to\infty. \qquad (33)$$

Теперь, учитывая определение (5) точной константы в неравенстве типа Джексона, на основании соотношений (31) и (33) для любого вектора $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_m)$ получаем

$$\aleph_{\sigma,r,p}(\delta) \ge \frac{\sigma^{2r} A_\sigma^2\left(f_{n,B}^{(r)}\right)}{\omega_p^2\left(f_{n,B}^{(r)}; \delta/\sigma\right)} = \frac{\sigma^{2r}\, 2n\pi \sum_{k=1}^{m}\beta_k^2\{1+o(1)\}}{\max\limits_{|\eta|\le\delta/\sigma}\left\| \Delta_\eta^p f_{n,B}^{(r)} \right\|^2} =$$

$$= \frac{\sigma^{2r}\, 2n\pi \sum_{k=1}^{m}\beta_k^2\{1+o(1)\}}{\max\limits_{|t|\le\delta}\left\| \Delta_{t/\sigma}^p f_{n,B}^{(r)} \right\|^2} =$$

$$= \frac{\sigma^{2r}\, 2n\pi \sum_{k=1}^{m}\beta_k^2\{1+o(1)\}}{\max\limits_{|t|\le\delta} 2^{p+1} n\pi\{1+o(1)\}\,\sigma^{2r}\sum_{k=1}^{m} k^{2r}\beta_k^2(1-\cos kt)^p} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{m}\beta_k^2}{2^p \max\limits_{|t|\le\delta}\sum_{k=1}^{m} k^{2r}\beta_k^2(1-\cos kt)^p}\{1+o(1)\}, \quad n\to\infty. \qquad (34)$$

Переходя к верхней грани по $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, получаем утверждение теоремы 3.

Теорема 4. *Для любых* $\sigma > 0$, $r \ge 0$, $p = 1, 2, \ldots$ *при любом* $\delta \ge (1-\xi)\pi$ *имеют место неравенства*

$$\aleph_{\sigma,r,p}(\delta) \ge c_{r,p}. \qquad (35)$$

Доказательство. В теореме 3 положим $(\beta_1, \beta_2) = (1, \beta)$. Тогда, на основании (30), для любых $\delta \ge (1-\xi)\pi$ имеют место соотношения

$$\aleph_{\sigma,r,p}(\delta) \ge \sup_\beta \frac{1+\beta^2}{2^p \max\limits_{|t|\le\delta}\left[(1-\cos t)^p + 2^{2r}\beta^2(1-\cos 2t)^p\right]} =$$

$$= \sup_\beta \frac{1+\beta^2}{2^p \max\limits_{u\in[u_\delta, 1]}\Psi_\beta(u)}, \qquad (36)$$

где $u = \cos t$,

$$u_\delta = \begin{Bmatrix} \cos\delta, & (1-\xi)\pi \le \delta \le \pi \\ -1, & \delta \ge \pi \end{Bmatrix}$$

и, наконец,

$$\Psi_\beta(u) = (1-u)^p\left[1+2^{2r+p}\beta^2(1+u)^p\right]. \tag{37}$$

В работе [4], в частности, доказано, что при $\beta = \beta_{r,p}$,

$$\beta_{r,p}^{-2} = 2\left(2^{2(r/p)+1}-1\right), \tag{38}$$

функция $\Psi_{\beta_{r,p}}(u)$ равна нулю в точке $u_* \in [u_\delta, 1]$, где

$$u_* = \cos(1-\xi)\pi = 2^{-2(r/p)-1} - 1. \tag{39}$$

На основании этого получаем

$$\max_{u\in[u_\delta,1]}\Psi_{\beta_{r,p}}(u) = \Psi_{\beta_{r,p}}(u_*) = \frac{\left(2^{2(r/p)+2}-1\right)}{2^{2r+p+1}\left(2^{2(r/p)+1}-1\right)}. \tag{40}$$

Наконец, в силу (36) и (40) имеем

$$\aleph_{\sigma,r,p}(\delta) \geq \frac{1+\beta_{r,p}^2}{2^p\max\limits_{u\in[u_\delta,1]}\Psi_{\beta_{r,p}}(u)} =$$

$$= \frac{1+\beta_{r,p}^2}{2^p\,\Psi_{\beta_{r,p}}(u_*)} = \left[1+\left(2\left(2^{2(r/p)+1}-1\right)\right)^{-1}\right]\frac{2^{2r+p+1}\left(2^{2(r/p)+1}-1\right)}{2^p\left(2^{2(r/p)+2}-1\right)^{p+1}} =$$

$$= \frac{2^{2r}}{\left(2^{2(r/p)+2}-1\right)^p} = c_{r,p}^2.$$

Теорема 4 доказана.

Сопоставляя теорему 2 с теоремой 4, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда при всех* $\delta \geq (1+\xi)\pi$ *имеют место равенства*

$$\aleph_{\sigma,r,p}(\delta) = c_{r,p}.$$

1. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратичных приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1972. – **121**, № 6. – С. 65 – 73.
2. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785 – 792.
3. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Там же. – 1988. – **43**, № 6. – С. 757 – 769.
4. *Doronin V., Ligun A.* On the exact constants in Jackson's type inequalities in the space L_2 // East J. Approxim. – 1995. – **1**, № 2. – P. 189 – 196.
5. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О точных неравенствах типа Джексона для целых функций в L_2 // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007. – № 8. – С. 89 – 93.

Получено 18.02.08,
после доработки — 07.07.08