УДК 517.9

О. А. Рудакова (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О Г-СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА РАЗЛИЧНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

We consider weighted Sobolev spaces connected with a sequence of n-dimensional domains. We prove the theorem on the selection from a sequence of integral functionals defined on the given spaces of a subsequence which Γ-converges to an integral functional defined on a "limit" weighted Sobolev space.

Розглянуто вагові простори Соболєва, пов'язані з послідовністю n-вимірних областей. Доведено теорему про вибір із послідовності інтегральних функціоналів, визначених на розглядуваних просторах, підпослідовності, що Γ-збігається до інтегрального функціонала, визначеного на деякому „граничному" ваговому соболєвському просторі.

1. Введение. Г-сходимость — это особая сходимость функционалов, сопровождающаяся во многих важных случаях сходимостью решений соответствующих вариационных задач. Для функционалов с единой областью определения понятие Г-сходимости было введено в статье [1], где также впервые были описаны общие свойства этого вида сходимости и даны его приложения к вариационным задачам. Вопросам Г-сходимости интегральных функционалов с единой областью определения посвящены работы многих итальянских математиков (см., например, [2 – 4] и библиографию в [3, 4]), а также статьи В. В. Жикова [5 – 8]. Основными результатами этих исследований являются теоремы о Г-компактности для последовательностей функционалов вариационного исчисления и интегральном представлении их Г-пределов.

Для функционалов с различными областями определения, в том числе интегральных, понятие Г-сходимости изучалось, например, в работах [9 – 16]. При этом функционалы были определены на невесовых пространствах Соболева.

В настоящей статье рассматриваются весовые пространства Соболева, связанные с последовательностью n-мерных областей, и интегральные функционалы, определенные на этих пространствах. Условие, характеризующее поведение интегрантов данных функционалов (см. далее условие (8)), содержит весовую функцию ν и некоторую, вообще говоря, неограниченную последовательность функций ψ_s. Основной результат работы (теорема 2) дает достаточные условия на вес ν и функцию, в определенном смысле мажорирующую последовательность $\{\psi_s\}$, при которых существует подпоследовательность рассматриваемой последовательности интегральных функционалов, Г-сходящаяся к интегральному функционалу, определенному на некотором „предельном" весовом соболевском пространстве. При доказательстве этого результата используются некоторые идеи работ [8, 14, 17, 18]. Отметим, что одним из существенных элементов доказательства (как, например, и в [14]) является использование специальных локальных характеристик исследуемых функционалов. В невесовом случае подобные характеристики и связанные с ними условия сходимости точек минимума соответствующих интегральных функционалов, определенных на различных соболевских пространствах, изучались Е. Я. Хрусловым [18, 19], а также другими авторами (см., например, [12 – 14, 20, 21]).

Результату о Г-компактности в статье предпослана общая теорема об условиях сходимости решений вариационных задач для функционалов, определенных на различных весовых пространствах Соболева. Одним из таких условий, кроме Г-сходимости функционалов, является сильная связанность рассматриваемых пространств. Вообще, понятие сильной связанности последовательности пространств Соболева (или, в другой терминологии, соответствующих им n-мерных областей) играет важную роль в вопросах усреднения краевых и вариационных задач в областях сложной структуры (см. работу [18], где это понятие было введено, а также [8 – 13, 20, 22, 23]). Сильная связанность пространств, используемых при исследовании сходимости решений краевых и вариационных задач в „переменных" (например, сильноперфорированных) областях, позволяет перейти от последовательности решений, каждое из которых содержится в „своем" пространстве, к ограниченной последовательности в некотором едином пространстве. Это является первым шагом к выделению некоторого предельного элемента исходной последовательности и последующему доказательству того, что этот элемент есть решение соответствующей усредненной задачи. Кроме того, сильная связанность соболевских пространств наряду с другими свойствами ассоциированной с ними последовательности n-мерных областей влечет коэрцитивность Г-предельных функционалов или коэрцитивность и монотонность G-предельных операторов для соответствующих отображений, определенных на этих пространствах (по этому поводу см., например, [10, 22]). Понятие сильной связанности весовых соболевских пространств, используемое в настоящей работе, достаточно подробно исследовано в статье [24].

Что касается Г-сходимости интегральных функционалов, определенных на весовых пространствах Соболева, и в целом усреднения вариационных и краевых задач с вырождениями, отметим, что имеющиеся результаты других авторов относятся либо к функционалам и операторам с единой областью определения (см., например, [17, 25, 26]), либо к операторам задач Дирихле в перфорированных областях [27 – 29]. В последнем случае, например, привлечение понятия сильной связанности последовательности соответствующих весовых пространств Соболева не требуется (такая связанность присутствует „автоматически"). В отличие от этого „переменные" весовые пространства, рассматриваемые в настоящей работе, ориентированы на вариационные задачи „неймановского" типа, и для изучения сходимости решений таких задач требование сильной связанности данных пространств является существенным.

Статья имеет следующую структуру. В п. 2 рассматриваются весовые пространства Лебега и Соболева, используемые в дальнейшем изложении. В п. 3 даются необходимые определения и общая теорема о сходимости решений вариационных задач для функционалов, заданных на рассматриваемых („переменных") весовых соболевских пространствах. Наконец, в п. 4 устанавливается основной результат работы — теорема о Г-компактности для интегральных функционалов. Отметим, что этот результат анонсирован без доказательства в заметке [30].

2. Функциональные пространства. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $p \in (1, n)$. Пусть ν — неотрицательная функция на Ω, причем $\nu > 0$ почти всюду в Ω,

$$\nu \in L^1_{\rm loc}(\Omega), \qquad \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\rm loc}(\Omega). \tag{1}$$

Через $L^p(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех измеримых функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω. $L^p(\nu,\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \nu|u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Заметим, что в силу неравенства Юнга и второго из включений (1) имеем $L^p(\nu,\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Через $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in \in L^p(\nu,\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu,\Omega)$. $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \left(\int\limits_{\Omega} \nu|u|^p dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \nu|D_i u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Полнота пространства $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ устанавливается с использованием второго из включений (1). Рефлексивность этого пространства есть следствие его равномерной выпуклости, что доказывается с помощью неравенств Кларксона (относительно этих неравенств см., например, [31]).

В силу первого из включений (1) имеем $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\nu,\Omega)$. Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega)$. $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с индуцированной нормой пространства $W^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Далее, пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω.

Аналогично пространствам, введенным выше, определим функциональные пространства, соответствующие областям Ω_s.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Через $L^p(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех измеримых функций $u\colon \Omega_s \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω_s. $L^p(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = \left(\int\limits_{\Omega_s} \nu|u|^p dx \right)^{1/p}.$$

В силу второго из включений (1) имеем $L^p(\nu,\Omega_s) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_s)$. Через $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu,\Omega_s)$ таких, что для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu,\Omega_s)$. $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu,s} = \left(\int\limits_{\Omega_s} \nu|u|^p dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega_s} \nu|D_i u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ обозначим множество всех сужений на Ω_s функций из $C_0^\infty(\Omega)$. В силу первого из включений (1) имеем $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s) \subset W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$. Через $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ обозначим замыкание множества $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$.

Заметим, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $u|_{\Omega_s} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$.

3. Основные определения и общая теорема о сходимости решений вариационных задач. Введем обозначение: если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такое, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность пространств* $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ *сильно связана с пространством* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, *если существует последовательность линейных непрерывных операторов* $l_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *такая, что*: $\sup\limits_{s\in\mathbb{N}} \|l_s\| < +\infty$; *для любых* $s \in \mathbb{N}$ *и* $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ *имеем* $q_s(l_s u) = u$ *почти всюду на* Ω_s.

Предложение 1. *Пусть вложение* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *в* $L^p(\nu,\Omega)$ *компактно и последовательность пространств* $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ *сильно связана с пространством* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$, *причем последовательность норм* $\|u_s\|_{1,p,\nu,s}$ *ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность* $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *такие, что* $\lim\limits_{j\to\infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu,\Omega_{s_j})} = 0$.

Доказательство этого предложения изложено в статье [24].

Определение 2. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ I_s — *функционал на* $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$, I — *функционал на* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. *Будем говорить, что последовательность* $\{I_s\}$ Γ-*сходится к функционалу* I, *если выполняются условия*:

1) *для любой функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *существует последовательность* $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ *такая, что* $\lim\limits_{s\to\infty} \|w_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0$, $\lim\limits_{s\to\infty} I_s(w_s) = I(u)$;

2) *для любой функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *и любой последовательности* $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ *такой, что* $\lim\limits_{s\to\infty} \|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0$, *имеем* $\liminf\limits_{s\to\infty} I_s(u_s) \geqslant I(u)$.

Теорема 1. *Пусть вложение* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *в* $L^p(\nu,\Omega)$ *компактно и последовательность пространств* $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ *сильно связана с пространством* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ I_s — *функционал на* $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$, I — *функционал на* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *и последовательность* $\{I_s\}$ Γ-*сходится к функционалу* I. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ *функция* u_s *минимизирует функционал* I_s *на* $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$, *причем последовательность норм* $\|u_s\|_{1,p,\nu,s}$ *ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность* $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ *такие, что функция* u *минимизирует функционал* I *на* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, $\lim\limits_{j\to\infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu,\Omega_{s_j})} = 0$ *и* $\lim\limits_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) = I(u)$.

Доказательство. В силу предложения 1 существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ такие, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu,\Omega_{s_j})} = 0$. Тогда в силу Γ-сходимости последовательности $\{I_s\}$ к функционалу I имеем

$$\liminf_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \geqslant I(u). \tag{2}$$

Пусть теперь $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Поскольку последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функционалу I, существует последовательность $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такая, что

$\lim\limits_{s\to\infty} I_s(w_s) = I(w)$. Отсюда и из того, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функция u_s минимизирует функционал I_s на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, выводим неравенство

$$\limsup_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \leqslant I(w). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что функция u минимизирует функционал I на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Кроме того, полагая в (3) $w = u$, из (3) и (2) получаем $\lim\limits_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) = I(u)$.

Теорема доказана.

Отметим, что в невесовом случае результаты, подобные теореме 1, были установлены в [10, 11, 14].

Сделаем несколько замечаний относительно выполнения условий теоремы 1. Что касается компактности вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в пространство $L^p(\nu, \Omega)$, то справедливы следующие предложения.

Предложение 2. *Пусть* $t \geqslant 1/(p-1)$, $t > n/p$, $t_1 > nt/(tp-n)$, *и* $1/\nu \in L^t(\Omega)$, $\nu \in L^{t_1}(\Omega)$. *Тогда вложение* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ *в* $L^p(\nu, \Omega)$ *компактно.*

Предложение 3. *Пусть функция* ν *есть сужение на* Ω *некоторой функции из класса Макенхаупта* A_p. *Тогда вложение* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ *в* $L^p(\nu, \Omega)$ *компактно.*

Подробные доказательства этих предложений даны в работе [24]. Отметим, что при условиях на весовую функцию такого типа, как в предложении 2, вложения весовых пространств Соболева в невесовые и весовые пространства Лебега рассматривались, например, в [17, 32 – 35]. Относительно определения класса Макенхаупта A_p см. [36]. Этому классу принадлежат, например, функции вида $w(x) = |x|^\gamma$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, где $\gamma \in (-n, n(p-1))$.

Сильная связанность последовательности пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ имеет место, например, в случае специальной перфорированной структуры областей Ω_s и определенного поведения функции ν в окрестностях „дырок” (подробности см. в [24]). Одно из основных условий теоремы 1 — Г-сходимость функционалов. С точки зрения приложений наибольший интерес представляет исследование Г-сходимости интегральных функционалов. Установление Г-сходимости таких функционалов и получение эффективного представления для интегранта соответствующего Г-предела возможно, например, в случае определенной периодичности интегрантов исходных функционалов по пространственной переменной или периодичности структуры областей Ω_s (см., например, [6, 8, 12] относительно интегральных функционалов, определенных на невесовых соболевских пространствах). В общем же случае особый интерес заключается в теоремах о Г-компактности. Наконец, условие теоремы 1 об ограниченности последовательности норм минимизантов функционалов I_s выполняется, если, например, последовательность $\{I_s(0)\}$ ограничена и для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ имеем $I_s(u) \geqslant \Phi(\|u\|_{1,p,\nu,s})$, где $\Phi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $\Phi(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Для интегральных функционалов указанные требования выполняются, если их интегранты удовлетворяют соответствующим условиям роста и коэрцитивности.

4. Теорема о Г -компактности для интегральных функционалов. Пусть $b \in L^1(\Omega)$, $b \geqslant 0$ в Ω, и $\{\psi_s\}$ — последовательность функций, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\psi_s \geqslant 0$ в Ω_s;

2) для любого открытого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ имеем $\limsup\limits_{s\to\infty} \displaystyle\int_{Q\cap\Omega_s} \psi_s dx \leqslant \int_{Q\cap\Omega} b dx.$

Пусть $c_1,\ c_2 > 0$ и $f_s\colon \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, — последовательность функций такая, что:

3) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на Ω_s;

4) для любого $s \in \mathbb{N}$ и почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$;

5) для любого $s \in \mathbb{N}$, почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1\nu(x)|\xi|^p - \psi_s(x) \leqslant f_s(x,\xi) \leqslant c_2\nu(x)|\xi|^p + \psi_s(x). \tag{4}$$

В силу условий 4 и 5 для любого $s \in \mathbb{N}$ и почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Отсюда и из условия 3 следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функция f_s удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда в силу условия 5 для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ функция $f_s(x, \nabla u)$ суммируема на Ω_s.

Введем обозначение: если $s \in \mathbb{N}$, то J_s — функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такой, что для любой функции $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$

$$J_s(u) = \int\limits_{\Omega_s} f_s(x, \nabla u) dx. \tag{5}$$

Кроме того, через $\mathcal{F}$ обозначим множество всех функций $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot, \xi)$ измерима на Ω; для почти всех $x \in \Omega$ функция $f(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$; для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $-b(x) \leqslant f(x,\xi) \leqslant c_2\nu(x)|\xi|^p + b(x)$.

Легко видеть, что для любых $f \in \mathcal{F}$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ функция $f(x, \nabla u)$ суммируема на Ω.

Наконец, введем следующее обозначение: если $f \in \mathcal{F}$, то J^f — функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такой, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$

$$J^f(u) = \int\limits_{\Omega} f(x, \nabla u) dx. \tag{6}$$

Теорема 2. *Предположим, что существует последовательность непустых открытых множеств $\Omega^{(k)}$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что*:

а) *для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{\Omega^{(k)}} \subset \Omega^{(k+1)} \subset \Omega$*;

б) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{meas}\big(\Omega \setminus \Omega^{(k)}\big) = 0$;

в) *для любого $k \in \mathbb{N}$ функции ν и b ограничены на $\Omega^{(k)}$*.

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $f \in \mathcal{F}$ такие, что последовательность $\{J_{s_j}\}$ Γ-сходится к функционалу J^f.

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов. Прежде всего дадим их краткое описание. На первом шаге вводятся некоторые локальные характеристики функционалов J_s и устанавливаются их свойства, используемые в дальнейшем. Следующие четыре шага доказательства содержат построения, позволяющие перейти от указанных локальных характеристик к предельным функциям, с помощью которых определяется некоторая функция $f \in \mathcal{F}$. В результате шестого и седьмого шагов устанавливается одно важное предельное соотношение, связанное с функцией f. Следующие четыре шага заключаются в непосредственном доказательстве

Г-сходимости некоторой подпоследовательности последовательности $\{J_s\}$ к функционалу J^f. При этом с использованием результатов предыдущих шагов соответствующие свойства из определения Г-сходимости сначала устанавливаются для функций из $C_0^\infty(\Omega)$, а затем уже и для функций из $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Перейдем теперь к детальному изложению описанных шагов доказательства теоремы.

Шаг 1. Введем некоторые локальные характеристики функционалов J_s. Для любых $y\in\mathbb{R}^n$ и $t\in\mathbb{N}$ положим $Q_t(y)=\big\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x_i-y_i|<1/(2t),\ i=1,\ldots,n\big\}$, и пусть для любого $t\in\mathbb{N}$ $Y_t=\big\{y\in\mathbb{R}^n\colon ty_i\in\mathbb{Z},\ i=1,\ldots,n\big\}$.

Заметим, что $\forall t\in\mathbb{N}$: $\bigcup\limits_{y\in Y_t}\overline{Q_t(y)}=\mathbb{R}^n$; $\forall t\in\mathbb{N}\ \forall y,y'\in Y_t,\ y\neq y'$: $Q_t(y)\cap$ $\cap\, Q_t(y')=\varnothing$.

Далее, для любого $t\in\mathbb{N}$ положим $Y_t'=\big\{y\in Y_t\colon \overline{Q_t(y)}\subset\Omega\big\}$. Ясно, что существует $t_0\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, множество Y_t' непусто.

Пусть для любых $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, $s\in\mathbb{N}$ и $y\in Y_t'$

$$V_{t,s}(y)=\left\{u\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)\colon \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s}\nu|u|^p dx\leqslant t^{-n-3p}\right\}. \tag{7}$$

Теперь для любых $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, $s\in\mathbb{N}$, $y\in Y_t'$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ положим

$$F_{t,s}(y,\xi)=t^n\inf_{u\in V_{t,s}(y)}\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x,\xi+\nabla u)dx. \tag{8}$$

Числа $F_{t,s}(y,\xi)$ представляют собой определенные локальные характеристики функционалов J_s.

В силу условия 5 для любых $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, $s\in\mathbb{N}$, $y\in Y_t'$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ имеем

$$-t^n\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s}\psi_s dx\leqslant F_{t,s}(y,\xi)\leqslant c_2|\xi|^p t^n\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s}\nu dx+t^n\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s}\psi_s dx. \tag{9}$$

Кроме того, справедливы следующие свойства:

$(*_1)$ если $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, $s\in\mathbb{N}$, $y\in Y_t'$, $\xi,\ \xi'\in\mathbb{R}^n$ и $\tau\in[0,1]$, то $F_{t,s}\big(y,(1-$ $-\tau)\xi+\tau\xi'\big)\leqslant(1-\tau)F_{t,s}(y,\xi)+\tau F_{t,s}(y,\xi')$;

$(*_2)$ если $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, $s\in\mathbb{N}$, $y\in Y_t'$ и $\xi,\ \xi'\in\mathbb{R}^n$, то $\big|F_{t,s}(y,\xi)-F_{t,s}(y,\xi')\big|\leqslant$ $\leqslant 2^p c_2\left(1+|\xi|+|\xi'|\right)^{p-1}|\xi-\xi'|t^n\int_{Q_t(y)\cap\Omega_s}\nu dx+2|\xi-\xi'|t^n\int_{Q_t(y)\cap\Omega_s}\psi_s dx.$

Свойство $(*_1)$ есть следствие условия 4. Оно устанавливается аналогично доказательству леммы 1 из [14]. Свойство $(*_2)$ вытекает из (9) и свойства $(*_1)$.

Шаг 2. Используя условие 2, оценку (9) и свойство $(*_2)$, устанавливаем, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\}\subset\mathbb{N}$ и последовательность функций $\Phi_t\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ такие, что для любых $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, $y\in Y_t'$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{j\to\infty}F_{t,s_j}(y,\xi)=\Phi_t(y,\xi). \tag{10}$$

В силу условия 2, оценки (9) и (10) для любых $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant t_0$, $y\in Y_t'$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ имеем

$$-t^n \int\limits_{Q_t(y)} b dx \leqslant \Phi_t\,(y,\xi) \leqslant c_2|\xi|^p t^n \int\limits_{Q_t(y)} \nu dx + t^n \int\limits_{Q_t(y)} b dx. \tag{11}$$

Кроме того, из свойства $(*_1)$ и (10) следует, что для любых $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, $y \in Y'_t$, ξ, $\xi' \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \in [0,1]$

$$\Phi_t(y,(1-\tau)\xi + \tau\xi') \leqslant (1-\tau)\Phi_t(y,\xi) + \tau\Phi_t(y,\xi'). \tag{12}$$

Шаг 3. Пусть для любых $t \in \mathbb{N}$ и $y \in \Omega$ таких, что $\overline{Q_t(y)} \subset \Omega$, $\chi_{t,y} : \Omega \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества $Q_t(y)$.

Для любых $k, t \in \mathbb{N}$ положим $Y_{k,t} = \{y \in Y_t \colon Q_t(y) \subset \Omega^{(k)}\}$.

Дадим следующее определение: если $k, t \in \mathbb{N}$ и $Y_{k,t} \neq \varnothing$, то $H_t^{(k)}$ — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой пары $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ $H_t^{(k)}(x,\xi) = \sum_{y \in Y_{k,t}} \chi_{t,y}(x)\Phi_t(y,\xi)$; если $k, t \in \mathbb{N}$ и $Y_{k,t} = \varnothing$, то $H_t^{(k)}$ — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой пары $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ $H_t^{(k)}(x,\xi) = 0$.

Далее, для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $n_k = \sup\limits_{x \in \Omega^{(k)}} \nu(x)$, $m_k = \sup\limits_{x \in \Omega^{(k)}} b(x)$. В силу условия в) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $n_k, m_k \in [0, +\infty)$.

Легко видеть, что для любых $k, t \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $H_t^{(k)}(\cdot,\xi)$ измерима на Ω. Кроме того, в силу оценки (11) для любых $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$-m_k \leqslant H_t^{(k)}(x,\xi) \leqslant c_2|\xi|^p n_k + m_k. \tag{13}$$

Отсюда и из (12) следует, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, $x \in \Omega$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$

$$\left|H_t^{(k)}(x,\xi) - H_t^{(k)}(x,\xi')\right| \leqslant 2^p c_2 n_k (1 + |\xi| + |\xi'|)^{p-1}|\xi - \xi'| + 2m_k|\xi - \xi'|. \tag{14}$$

Шаг 4. Через $\mathbb{Q}^n$ обозначим множество всех элементов из $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами. Используя оценку (13), устанавливаем, что существуют возрастающая последовательность $\{t_i\} \subset \mathbb{N}$ и функции $h_\xi^{(k)} \in L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{Q}^n$, такие, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{Q}^n$ имеем

$$H_{t_i}^{(k)}(\cdot,\xi) \to h_\xi^{(k)} \quad \text{слабо в} \;\; L^2(\Omega). \tag{15}$$

Через E обозначим пересечение множеств лебеговых точек функций ν, b и $h_\xi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{Q}^n$. Заметим, что $\operatorname{meas} E = \operatorname{meas} \Omega$.

Для любых $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{Q}^n$ и $z \in E$ имеем

$$-b(z) \leqslant h_\xi^{(k)}(z) \leqslant c_2\nu(z)|\xi|^p + b(z). \tag{16}$$

Действительно, пусть $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{Q}^n$ и $z \in E$. Зафиксируем $\tau_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\overline{Q_{\tau_0}(z)} \subset \Omega$. Пусть теперь $\tau \in \mathbb{N}$, $\tau > \tau_0$. В силу (15)

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{Q_\tau(z)} H_{t_i}^{(k)}(\cdot,\xi) dx = \int\limits_{Q_\tau(z)} h_\xi^{(k)} dx. \tag{17}$$

Пусть $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant \max\{t_0, 2\tau^2\}$. Предположим, что $Y_{k,t} \neq \varnothing$. Положим $Y = \{y \in Y_{k,t} : Q_t(y) \cap Q_\tau(z) \neq \varnothing\}$ и будем считать, что $Y \neq \varnothing$. В силу определения функции $H_t^{(k)}$

$$\int\limits_{Q_\tau(z)} H_t^{(k)}(\cdot,\xi)dx = \sum_{y\in Y} \int\limits_{Q_t(y)\cap Q_\tau(z)} H_t^{(k)}(\cdot,\xi)dx =$$
$$= \sum_{y\in Y} \Phi_t(y,\xi)\operatorname{meas}\big[Q_t(y)\cap Q_\tau(z)\big].$$

Отсюда, используя оценку (11) и то, что для любого $y \in Y$ $Q_t(y) \subset Q_{\tau-1}(z)$, выводим

$$-\int\limits_{Q_{\tau-1}(z)} b dx \leqslant \int\limits_{Q_\tau(z)} H_t^{(k)}(\cdot,\xi)dx \leqslant c_2|\xi|^p \int\limits_{Q_{\tau-1}(z)} \nu dx + \int\limits_{Q_{\tau-1}(z)} b dx. \tag{18}$$

Легко видеть, что это неравенство выполняется и в случае $Y = \varnothing$, а также если $Y_{k,t} = \varnothing$. В силу (17) и (18) имеем

$$-\tau^n \int\limits_{Q_{\tau-1}(z)} b dx \leqslant \tau^n \int\limits_{Q_\tau(z)} h_\xi^{(k)} dx \leqslant c_2|\xi|^p\tau^n \int\limits_{Q_{\tau-1}(z)} \nu dx + \tau^n \int\limits_{Q_{\tau-1}(z)} b dx.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\tau \to \infty$, получаем неравенство (16).

Аналогично, используя (15), (11) и (12), устанавливаем, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{Q}^n$ и $z \in E$

$$\left|h_\xi^{(k)}(z) - h_{\xi'}^{(k)}(z)\right| \leqslant 2^p c_2 \nu(z)(1 + |\xi| + |\xi'|)^{p-1}|\xi - \xi'| + 2b(z)|\xi - \xi'|. \tag{19}$$

Шаг 5. В силу (19) для любых $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in E$ существует число $\tilde{h}_\xi^{(k)}(x)$ такое, что из $\{\xi^{(l)}\} \subset \mathbb{Q}^n$ и $\xi^{(l)} \to \xi$ в $\mathbb{R}^n$ следует, что $h_{\xi^{(l)}}^{(k)}(x) \to \tilde{h}_\xi^{(k)}(x)$.

Пусть для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ $g_\xi^{(k)}$ — функция на Ω такая, что $g_\xi^{(k)}(x) = \tilde{h}_\xi^{(k)}(x)$, если $x \in E$, и $g_\xi^{(k)}(x) = 0$, если $x \in \Omega \setminus E$.

Ясно, что справедливо следующее утверждение:

если $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in E$, $\{\xi^{(l)}\} \subset \mathbb{Q}^n$ и $\xi^{(l)} \to \xi$ в $\mathbb{R}^n$, то

$$h_{\xi^{(l)}}^{(k)}(x) \to g_\xi^{(k)}(x). \tag{20}$$

Далее, пусть $\widetilde{\Omega}$ — объединение всех множеств $\Omega^{(k)}$, $\chi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$ и $\bar{k}$ — отображение Ω в $\mathbb{N}$ такое, что $\bar{k}(x) = \min\{k \in \mathbb{N}\colon x \in \Omega^{(k)}\}$, если $x \in \widetilde{\Omega}$, и $\bar{k}(x) = 1$, если $x \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$.

Пусть теперь f — функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой пары $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ $f(x,\xi) = \chi(x) g_\xi^{(\bar{k}(x))}(x)$. Используя (20), нетрудно убедиться в том, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot,\xi)$ измерима на Ω. Кроме того, в силу (20) и оценок (16) и (19) для любых $x \in \Omega$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$-b(x) \leqslant f(x,\xi) \leqslant c_2\nu(x)|\xi|^p + b(x), \tag{21}$$

$$\big|f(x,\xi) - f(x,\xi')\big| \leqslant 2^p c_2 \nu(x)(1 + |\xi| + |\xi'|)^{p-1}|\xi - \xi'| + 2b(x)|\xi - \xi'|. \tag{22}$$

В силу второго из этих неравенств для любого $x \in \Omega$ функция $f(x,\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Таким образом, функция f удовлетворяет условиям Каратеодори. Заметим еще, что в силу (12), (15) и (20) для любого $x \in \Omega$ функция $f(x,\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$. Теперь ясно, что $f \in \mathcal{F}$.

Шаг 6. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\eta \in \mathbb{Q}^n$ и $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. Пусть еще $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$, и $z \in \Omega^{(m)} \cap E$. Зафиксируем $\tau \in \mathbb{N}$, $\tau > 1$, такое, что $Q_{\tau-1}(z) \subset \Omega^{(m)}$, и пусть $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2\tau^2$. Имеем $Y_{m,t} \neq \varnothing$. Кроме того, в силу условия a) теоремы $\Omega^{(m)} \subset \Omega^{(k)}$ и, следовательно, $Y_{m,t} \subset Y_{k,t}$. Используя это, получаем, что $H_t^{(k)}(\cdot,\eta) = H_t^{(m)}(\cdot,\eta)$ на $Q_\tau(z)$. Тогда, учитывая (15), устанавливаем, что $h_\eta^{(k)}(z) = h_\eta^{(m)}(z)$. Отсюда и из (20) следует, что для любого $x \in \Omega^{(k)} \cap E$ справедливо равенство $h_\eta^{(k)}(x) = f(x,\eta)$. Тогда, учитывая (15), получаем, что интегралы функций $H_{t_i}^{(k)}(\cdot,\eta)\varphi$ по $\Omega^{(k)}$ сходятся при $i \to \infty$ к интегралу функции $f(\cdot,\eta)\varphi$ по $\Omega^{(k)}$.

Отсюда и из (14) и (22) выводим, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega^{(k)}} H_{t_i}^{(k)}(\cdot,\xi)\varphi dx = \int\limits_{\Omega^{(k)}} f(\cdot,\xi)\varphi dx. \tag{23}$$

Шаг 7. Введем обозначения: если $k,t \in \mathbb{N}$ и $Y_{k,t} \neq \varnothing$, то $E_{k,t} = \bigcup\limits_{y\in Y_{k,t}} Q_t(y)$; если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $k,t \in \mathbb{N}$ и $Y_{k,t} \neq \varnothing$, то $\lambda_t^{(k)}(u) = \sum_{y\in Y_{k,t}} \Phi_t(y,\nabla u(y))t^{-n}$; если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $k,t \in \mathbb{N}$ и $Y_{k,t} = \varnothing$, то $\lambda_t^{(k)}(u) = 0$.

Покажем, что для любых $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_{t_i}^{(k)}(u) = \int\limits_{\Omega^{(k)}} f(x,\nabla u)dx. \tag{24}$$

Действительно, пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим $\mu = \sup\limits_{x\in\Omega} |\nabla u(x)|$ и зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,1)$. Очевидно, что существует $\delta \in (0,\varepsilon)$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''| \leqslant \delta$, имеем $|\nabla u(x') - \nabla u(x'')| \leqslant \varepsilon$. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что существует $\tau \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau > 2^{n+2}n\delta^{-1}$, $Y_{k,\tau} \neq \varnothing$ и $\operatorname{meas}(\Omega^{(k)} \setminus E_{k,\tau}) \leqslant \delta \operatorname{meas}\Omega$. Положим $G_\tau = \bigcup\limits_{z\in Y_{k,\tau}} [Q_{\tau-1}(z) \setminus Q_{\tau+1}(z)]$. Поскольку $2^{n+2}n/\tau < \delta$, имеем $\operatorname{meas} G_\tau \leqslant \delta \operatorname{meas}\Omega$. Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant \max\{t_0, 2\tau(\tau+1)\}$. Легко видеть, что $Y_{k,t} \neq \varnothing$. Для любого $z \in Y_{k,\tau}$ положим $X(z) = \{y \in Y_{k,t} : Q_t(y) \subset Q_\tau(z)\}$. Пусть теперь для любого $z \in Y_{k,\tau}$ $R(z) = Q_\tau(z) \setminus \bigcup\limits_{y\in X(z)} Q_t(y)$. Поскольку почти все точки множества $\bigcup\limits_{z\in Y_{k,\tau}} R(z)$ принадлежат множеству G_τ, имеем

$$\operatorname{meas}\Bigg(\bigcup_{z\in Y_{k,\tau}} R(z)\Bigg) \leqslant \delta \operatorname{meas}\Omega. \tag{25}$$

Положим $X = Y_{k,t} \setminus \bigcup\limits_{z\in Y_{k,\tau}} X(z)$. Будем считать, что $X \neq \varnothing$. Имеем $\bigcup\limits_{y\in X} Q_t(y) \subset (\Omega^{(k)} \setminus E_{k,\tau}) \cup G_\tau$. Отсюда и из вышеприведенных оценок мер множеств $\Omega^{(k)} \setminus E_{k,\tau}$ и G_τ получаем

$$\operatorname{meas}\Bigg(\bigcup_{y\in X} Q_t(y)\Bigg) \leqslant 2\delta \operatorname{meas}\Omega. \tag{26}$$

Далее, имеем

$$\lambda_t^{(k)}(u) = \sum_{z\in Y_{k,\tau}} \int\limits_{Q_\tau(z)} H_t^{(k)}(\cdot, \nabla u(z))dx - \sum_{z\in Y_{k,\tau}} \int\limits_{R(z)} H_t^{(k)}(\cdot, \nabla u(z))dx +$$

$$+ \sum_{z\in Y_{k,\tau}} \sum_{y\in X(z)} \int\limits_{Q_t(y)} \Big\{H_t^{(k)}(\cdot, \nabla u(y)) - H_t^{(k)}(\cdot, \nabla u(z))\Big\}dx +$$

$$+ \sum_{y\in X} \int_{Q_t(y)} H_t^{(k)}(\cdot, \nabla u(y))dx,$$

$$\int_{\Omega^{(k)}} f(x, \nabla u)dx = \sum_{z\in Y_{k,\tau}} \int\limits_{Q_\tau(z)} f(\cdot, \nabla u(z))dx +$$

$$+ \sum_{z\in Y_{k,\tau}} \int\limits_{Q_\tau(z)} \{f(x, \nabla u) - f(\cdot, \nabla u(z))\}dx + \int\limits_{\Omega^{(k)}\setminus E_{k,\tau}} f(x, \nabla u)dx.$$

Из этих равенств, используя (13), (14), (21), (22), (25), (26), а также неравенство $n/\tau < \delta$, имеющуюся оценку для меры множества $\Omega^{(k)} \setminus E_{k,\tau}$ и свойства числа δ, выводим

$$\left|\lambda_t^{(k)}(u) - \int\limits_{\Omega^{(k)}} f(x, \nabla u)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{z\in Y_{k,\tau}} \left|\int\limits_{Q_\tau(z)} H_t^{(k)}(\cdot, \nabla u(z))dx - \int\limits_{Q_\tau(z)} f(\cdot, \nabla u(z))dx\right| +$$

$$+ 8^p(1+\mu)^p(1+c_2)(n_k+m_k)\varepsilon \operatorname{meas}\Omega. \tag{27}$$

Ясно, что это верно и в случае $X = \varnothing$. Теперь из (27) и (23) получаем (24).

Перейдем к непосредственному доказательству Г-сходимости последовательности $\{J_{s_j}\}$ к функционалу J^f. Через c_i, $i = 3, 4, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, $\operatorname{meas}\Omega$, c_1, c_2 и $\|b\|_{L^1(\Omega)}$.

Шаг 8. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ и

$$\lim_{s\to\infty} \|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0. \tag{28}$$

Покажем, что

$$\liminf_{j\to\infty} J_{s_j}(u_{s_j}) \geqslant J^f(u). \tag{29}$$

Пусть a — предельная точка последовательности $\{J_{s_j}(u_{s_j})\}$. В силу условий 2 и 5 имеем $a \in (-\infty, +\infty]$. Если $a = +\infty$, то, очевидно, $a \geqslant J^f(u)$. Пусть теперь $a \neq +\infty$. Ясно, что существует возрастающая последовательность $\{r_l\} \subset \{s_j\}$ такая, что

$$J_{r_l}(u_{r_l}) \to a. \tag{30}$$

Отсюда, учитывая, что $a \in \mathbb{R}$, и используя условия 2 и 5, получаем, что существует постоянная $c \geqslant 1$ такая, что для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_{r_l}} \nu|\nabla u_{r_l}|^p dx \leqslant c. \tag{31}$$

Далее, пусть $\varepsilon \in (0,1)$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, $\operatorname{meas} G \leqslant \varepsilon_1$, имеем $\int_G b dx \leqslant \varepsilon$. Кроме того, в силу условия б) теоремы существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega^{(k)}) \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}, \qquad \left| \int\limits_{\Omega\setminus\Omega^{(k)}} f(x,\nabla u) dx \right| \leqslant \varepsilon. \tag{32}$$

Учитывая первое из этих неравенств, находим, что существует $t' \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t'$, множество $Y_{k,t}$ непусто и

$$\operatorname{meas}(\Omega \setminus E_{k,t}) \leqslant \varepsilon_1. \tag{33}$$

Очевидно также, что существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| \leqslant \delta$, имеем $|\nabla u(x') - \nabla u(x'')| \leqslant \varepsilon n_k^{-1/p}$.

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant \max\{t_0, t', n/\delta\}$. В силу условия 2, неравенства (33) и свойства числа ε_1 имеем

$$\limsup_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s\setminus E_{k,t}} \psi_s dx \leqslant \int\limits_{\Omega\setminus E_{k,t}} b dx \leqslant \varepsilon. \tag{34}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $v_s = u_s - q_s u$. В силу (28) найдется $s' \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s'$, и $y \in Y_{k,t}$ имеем $v_s \in V_{t,s}(y)$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s'$, выполняется неравенство

$$\sum_{y\in Y_{k,t}} F_{t,s}(y,\nabla u(y)) t^{-n} \leqslant \sum_{y\in Y_{k,t}} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, \nabla u(y) + \nabla v_s) dx. \tag{35}$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s'$, и пусть $y \in Y_{k,t}$. Используя условия 4, 5 и свойство числа δ, получаем, что для почти всех $x \in Q_t(y) \cap \Omega_s$

$$\begin{gathered} f_s(x, \nabla u(y) + \nabla v_s(x)) = \\ = f_s(x, (1-\varepsilon)\nabla u_s(x) + \varepsilon(\nabla u_s(x) + \varepsilon^{-1}(\nabla u(y) - \nabla u(x)))) \leqslant \\ \leqslant (1-\varepsilon) f_s(x, \nabla u_s(x)) + \varepsilon f_s(x, \nabla u_s(x) + \varepsilon^{-1}(\nabla u(y) - \nabla u(x))) \leqslant \\ \leqslant f_s(x,\nabla u_s(x)) + 2^p \varepsilon c_2 \nu(x) |\nabla u_s(x)|^p + 2^p \varepsilon c_2 + 2\varepsilon \psi_s(x). \end{gathered}$$

Отсюда с учетом условия 5 и неравенства (35) выводим, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s'$,

$$\sum_{y\in Y_{k,t}} F_{t,s}(y,\nabla u(y)) t^{-n} \leqslant J_s(u_s) + 2^p\varepsilon c_2 \int\limits_{\Omega_s} \nu |\nabla u_s|^p dx + 2\varepsilon \int\limits_{\Omega_s} \psi_s dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_s\setminus E_{k,t}} \psi_s dx + 2^p \varepsilon c_2 \operatorname{meas}\Omega.$$

Используя этот результат, а также условие 2 и (10), (30), (31), (34), устанавливаем, что $\lambda_t^{(k)}(u) \leqslant a + \varepsilon c c_3$. Отсюда, учитывая (24) и второе из неравенств (32), получаем $a \geqslant J^f(u)$. Следовательно, неравенство (29) выполняется.

Шаг 9. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ и верно равенство (28). Покажем, что имеет место неравенство (29).

Действительно, пусть $\{u^{(l)}\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty} \|u^{(l)} - u\|_{1,p,\nu} = 0. \tag{36}$$

Для любых $l, s \in \mathbb{N}$ положим $u_s^{(l)} = u_s + q_s(u^{(l)} - u)$. В силу (28) и результата, установленного на предыдущем шаге, для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\liminf_{j\to\infty} J_{s_j}(u_{s_j}^{(l)}) \geqslant J^f(u^{(l)}). \tag{37}$$

Кроме того, используя условия 4, 5, получаем, что для любых $l, s \in \mathbb{N}$

$$J_s(u_s^{(l)}) \leqslant J_s(u_s) +$$
$$+ c_4 \left(1 + \int\limits_{\Omega_s} \psi_s dx + \int\limits_{\Omega_s} \nu |\nabla u_s|^p dx + \|u^{(l)} - u\|_{1,p,\nu}^p\right) \|u^{(l)} - u\|_{1,p,\nu}.$$

Отсюда, учитывая условия 2, 5 и (36), (37), а также непрерывность функционала J^f, выводим, что если a — конечная предельная точка последовательности $\{J_{s_j}(u_{s_j})\}$, то $a \geqslant J^f(u)$. Это доказывает, что неравенство (29) имеет место.

Шаг 10. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Покажем, что существует последовательность $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такая, что

$$\lim_{s\to\infty} \|w_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0, \qquad \limsup_{j\to\infty} J_{s_j}(w_{s_j}) \leqslant J^f(u). \tag{38}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Учитывая изложенное в соответствующем месте восьмого шага доказательства, а также условие 2 и (24), получаем, что существуют числа $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $t \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall x',\ x'' \in \Omega, \quad |x' - x''| \leqslant \delta\colon \quad \big|\nabla u(x') - \nabla u(x'')\big| \leqslant \varepsilon n_k^{-1/p}, \tag{39}$$

$$t \geqslant \max\{t_0, 1/\varepsilon, n/\delta\}, \qquad Y_{k,t} \neq \varnothing, \tag{40}$$

$$\lambda_t^{(k)}(u) \leqslant J^f(u) + 2\varepsilon, \tag{41}$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus E_{k,t}} \nu |\nabla u|^p dx \leqslant \varepsilon, \qquad \limsup_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s\setminus E_{k,t}} \psi_s dx \leqslant \varepsilon, \tag{42}$$

$$\begin{gathered} \sum_{y\in Y_{k,t}} \int\limits_{Q_t(y)\setminus Q_{t+1}(y)} \nu |\nabla u|^p dx \leqslant \varepsilon, \\ \limsup_{s\to\infty} \sum_{y\in Y_{k,t}} \int\limits_{[Q_t(y)\setminus Q_{t+1}(y)]\cap\Omega_s} \psi_s dx \leqslant \varepsilon. \end{gathered} \tag{43}$$

Далее, пусть для любого $y \in Y_{k,t}$ φ_y — функция из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leqslant \varphi_y \leqslant 1$ на Ω, $\varphi_y = 1$ в $Q_{t+1}(y)$, $\varphi_y = 0$ на $\Omega \setminus Q_t(y)$ и $|\nabla\varphi_y| \leqslant c_0 t^2$ на Ω ($c_0 > 0$ зависит только от n), а для любых $y \in Y_{k,t}$ и $s \in \mathbb{N}$ $w_{y,s}$ — функция из $V_{t,s}(y)$ такая, что

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, \nabla u(y) + \nabla w_{y,s})dx \leqslant F_{t,s}(y, \nabla u(y))t^{-n} + \varepsilon t^{-n}. \tag{44}$$

Заметим, что в силу условия 5 и (39), (40), (44) для любых $y \in Y_{k,t}$ и $s \in \mathbb{N}$

$$c_1 \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} \nu|\nabla u(y) + \nabla w_{y,s}|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^p c_2 \int\limits_{Q_t(y)} \nu|\nabla u|^p dx + 2 \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} \psi_s dx + (2^p c_2 + 1)t^{-n}. \tag{45}$$

Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $w_s = q_s u + \sum_{y\in Y_{k,t}} w_{y,s}\varphi_y$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$. Кроме того, в силу включений $w_{y,s} \in V_{t,s}(y)$ ($y \in Y_{k,t}$, $s \in \mathbb{N}$) и неравенства $t \geqslant 1/\varepsilon$ для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|w_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} \leqslant \varepsilon(\operatorname{meas}\Omega)^{1/p}. \tag{46}$$

Ясно также, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$J_s(w_s) = \int\limits_{\Omega_s\setminus E_{k,t}} f_s(x, \nabla u)dx + \sum_{y\in Y_{k,t}} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, \nabla w_s)dx. \tag{47}$$

В силу условия 5 и неравенств (42) выполняется неравенство

$$\limsup_{s\to\infty} \int\limits_{\Omega_s\setminus E_{k,t}} f_s(x, \nabla u)dx \leqslant (c_2 + 2)\varepsilon. \tag{48}$$

Используя условия 4, 5, неравенства (39), (40) и свойства функций φ_y, $y \in Y_{k,t}$, получаем, что если $s \in \mathbb{N}$, $y \in Y_{k,t}$ и $\operatorname{meas}(Q_t(y) \cap \Omega_s) > 0$, то для почти всех $x \in Q_t(y) \cap \Omega_s$

$$f_s(x, \nabla w_s(x)) \leqslant (1-\varepsilon) f_s(x, \nabla u(y) + \varphi_y(x)\nabla w_{y,s}(x)) +$$
$$+ \varepsilon f_s(x, \nabla u(y) + \varphi_y(x)\nabla w_{y,s}(x) + \varepsilon^{-1}(\nabla u(x) - \nabla u(y) + w_{y,s}(x)\nabla\varphi_y(x))) \leqslant$$
$$\leqslant f_s(x, \nabla u(y) + \nabla w_{y,s}(x)) + 4^{p+1}c_2(1 - \varphi_y(x))\nu(x)|\nabla u(x)|^p +$$
$$+ 2(1 - \varphi_y(x))\psi_s(x) + 2\varepsilon\psi_s(x) +$$
$$+ 4^p c_2 \varepsilon \nu(x)|\nabla u(y) + \nabla w_{y,s}(x)|^p + 4^p c_0^p t^{3p} c_2 \varepsilon \nu(x)|w_{y,s}(x)|^p + 8^{p+1}c_2\varepsilon.$$

Тогда, учитывая свойства функций φ_y, $y \in Y_{k,t}$, включения $w_{y,s} \in V_{t,s}(y)$ ($y \in Y_{k,t}$, $s \in \mathbb{N}$), условие 2, (10) и (43)–(45), находим

$$\limsup_{j\to\infty} \sum_{y\in Y_{k,t}} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_{s_j}} f_{s_j}(x, \nabla w_{s_j})dx \leqslant \lambda_t^{(k)}(u) + c_5\varepsilon \int\limits_\Omega \nu|\nabla u|^p dx + c_6\varepsilon.$$

Используя это неравенство, а также (41), (47) и (48), устанавливаем, что

$$\limsup_{j\to\infty} J_{s_j}(w_{s_j}) \leqslant J^f(u) + c_7\varepsilon \left(1 + \int\limits_{\Omega} \nu|\nabla u|^p dx\right). \tag{49}$$

Учитывая (46) и (49), заключаем, что если $l \in \mathbb{N}$, то существуют последовательность $w_s^{(l)} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ и число $j^{(l)} \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N}: \quad \|w_s^{(l)} - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} \leqslant l^{-1}, \tag{50}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad j \geqslant j^{(l)}: \quad J_{s_j}(w_{s_j}^{(l)}) \leqslant J^f(u) + l^{-1}. \tag{51}$$

Для любого $l \in \mathbb{N}$ положим $s^{(l)} = l + \max\limits_{1\leqslant r\leqslant l} s_{j^{(r)}}$. Очевидно, что $\{s^{(l)}\}$ — возрастающая последовательность. Пусть теперь $\{w_s\}$ — такая последовательность, что $w_s = w_s^{(1)}$, если $s \leqslant s^{(1)}$, и $w_s = w_s^{(l)}$, если $s^{(l)} < s \leqslant s^{(l+1)}$, $l = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$. Кроме того, используя (50) и (51), получаем, что справедливы соотношения (38).

Шаг 11. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Очевидно, что существует последовательность $\{u^{(l)}\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем $\|u^{(l)} - u\|_{1,p,\nu} \leqslant 1/(2l)$, $J^f(u^{(l)}) \leqslant J^f(u) + 1/(2l)$. Отсюда и из результата, установленного на предыдущем шаге доказательства, выводим, что если $l \in \mathbb{N}$, то существуют последовательность $v_s^{(l)} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ и числа $s_1^{(l)}$, $j_1^{(l)} \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad s \geqslant s_1^{(l)}: \quad \|v_s^{(l)} - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} \leqslant l^{-1}, \tag{52}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad j \geqslant j_1^{(l)}: \quad J_{s_j}(v_{s_j}^{(l)}) \leqslant J^f(u) + l^{-1}. \tag{53}$$

Для любого $l \in \mathbb{N}$ положим $\bar{s}^{(l)} = l + \max\limits_{1\leqslant r\leqslant l} s_1^{(r)} + \max\limits_{1\leqslant r\leqslant l} s_{j_1^{(r)}}$. Ясно, что $\{\bar{s}^{(l)}\}$ — возрастающая последовательность. Пусть теперь $\{v_s\}$ — такая последовательность, что $v_s = v_s^{(1)}$, если $s \leqslant \bar{s}^{(1)}$, и $v_s = v_s^{(l)}$, если $\bar{s}^{(l)} < s \leqslant \bar{s}^{(l+1)}$, $l = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $v_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$. Кроме того, в силу (52) и (53) справедливы соотношения $\lim\limits_{s\to\infty} \|v_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = 0$, $\limsup\limits_{j\to\infty} J_{s_j}(v_{s_j}) \leqslant J^f(u)$.

Полученный результат и результат, установленный на девятом шаге доказательства, позволяют заключить, что последовательность $\{J_{s_j}\}$ Г-сходится к функционалу J^f.

Теорема доказана.

В завершение приведем несколько замечаний. Прежде всего отметим, что условия а) – в) теоремы 2 выполняются, если, например, функции ν и b ограничены в Ω или непрерывны в Ω, за исключением замкнутого множества меры нуль. Кроме того, при дополнительных условиях к требованиям теоремы 2, включающих так называемую регулярную сильную связанность последовательности пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, интегрант f Г-предельного функционала для последовательности функционалов $\{J_{s_j}\}$ коэрцитивен, т. е. с некоторой константой $c' > 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $f(x, \xi) \geqslant c'\nu(x)|\xi|^p - b(x)$. Этот результат установлен в статье [37]. В свою очередь, упомянутые дополнительные условия выполняются в случае весовой функции ν вида $\nu(x) = |x|^\gamma$, $x \in \Omega \setminus \{0\}$, с $\gamma \in (-n, n(p-1))$ и областей Ω_s

специальной перфорированной структуры (по этому поводу см. [24]). Отметим также, что на основе результатов о Γ-сходимости или Γ-компактности для функционалов J_s могут быть получены аналогичные результаты для функционалов вида $I_s = J_s + G_s$, где $G_s(u) = \int_{\Omega_s} g(x,u)dx$, $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, причем при надлежащих условиях роста и коэрцитивности относительно функции g (например, если $g(x,\eta) = a_0\nu(x)|\eta|^p - g_0(x)\eta$, $a_0 > 0$ и $g_0(1/\nu)^{1/p} \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$) последовательность норм минимизантов функционалов I_s будет ограниченной (это подчеркивается в связи с изложенным в конце п. 3). Наконец, заметим, что если ψ — неотрицательная функция из $L^1(Q_1(0))$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ ψ_s — неотрицательная функция на Ω_s такая, что $\psi_s(x) = \psi(s(x-z))$ при $x \in Q_s(z) \cap \Omega_s$, $z \in Y_s$, то выполняются условия 1 и 2, причем функция b принимает на Ω постоянное значение, равное интегралу функции ψ по кубу $Q_1(0)$.

Автор благодарит А. А. Ковалевского за внимание к работе и полезные рекомендации.

1. *De Giorgi E., Franzoni T.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. – 1975. – **58**, № 6. – P. 842 – 850.
2. *Sbordone C.* Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale // Ann. Scuola norm. super. Pisa Cl. Sci. – 1975. – **2**. – P. 617 – 638.
3. *Dal Maso G.* An introduction to Γ-convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. – 337 p.
4. *Braides A., Defranceschi A.* Homogenization of multiple integrals // Oxford Lect. Ser. Math. and Appl. – New York: Clarendon Press, 1998. – **12**. – 298 p.
5. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для одного класса функционалов вариационного исчисления // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 3. – С. 524 – 528.
6. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционала вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 5. – С. 961 – 998.
7. *Жиков В. В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Там же. – 1986. – **50**, № 4. – С. 675 – 710.
8. *Жиков В. В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 8. – С. 47 – 84.
9. *Ковалевский А. А.* Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 8. – С. 6 – 9.
10. *Ковалевский А. А.* О связанности подмножеств соболевских пространств и Γ-сходимости функционалов с переменной областью определения // Нелинейные граничные задачи. – 1989. – Вып. 1. – С. 48 – 54.
11. *Ковалевский А. А.* О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Совр. анализ и его прил.: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 62 – 70.
12. *Ковалевский А. А.* Условия Γ-сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР. – 1991. – № 4. – С. 5 – 8.
13. *Ковалевский А. А.* О необходимых и достаточных условиях Γ-сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – Вып. 4. – С. 29 – 39.
14. *Ковалевский А. А.* О Γ-сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 614 – 628.
15. *Pankratov L. S.* Γ-convergence of nonlinear functionals in thin reticulated structures // C.r. Acad. sci. Paris, Ser. I. – 2002. – **335**, № 3. – P. 315 – 320.
16. *Amaziane B., Goncharenko M., Pankratov L.* Γ_D-convergence for a class of quasilinear elliptic equations in thin structures // Math. Methods Appl. Sci. – 2005. – **28**, № 15. – P. 1847 – 1865.
17. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On the convergence of solutions of degenerate nonlinear elliptic high order equations // Nonlinear Anal., Theory, Methods, Appl. – 2002. – **49**. – P. 335 – 360.

18. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 4. – С. 604 – 621.
19. *Хруслов Е. Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабо связанных областях // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 129 – 173.
20. *Берлянд Л. В., Чудинович И. Ю.* Усреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами // Докл. АН СССР. – 1983. – **272**, № 4. – С. 777 – 780.
21. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных задач в слабо связанных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-тех. ин-т низких температур; 53.88).
22. *Ковалевский А. А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Изв. РАН. Сер. мат. – 1994. – **58**, № 3. – С. 3 – 35.
23. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наук. думка, 2005. – 550 с.
24. *Ковалевский А. А., Рудакова О. А.* О сильной связанности весовых пространств Соболева и компактности последовательностей их элементов // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2006. – **12**. – С. 85 – 99.
25. *De Arcangelis R., Donato P.* Homogenization in weighted Sobolev spaces // Ric. mat. – 1985. – **34**. – P. 289 – 308.
26. *De Arcangelis R., Serra Cassano F.* On the convergence of solutions of degenerate elliptic equations in divergence form // Ann. mat. pura ed appl. – 1994. – **167**. – P. 1 – 23.
27. *Скрыпник И. В., Ларин Д. В.* Принцип аддитивности в усреднении вырождающихся нелинейных задач Дирихле // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 118 – 135.
28. *Ларин Д. В.* О сходимости решений вырождающейся квазилинейной задачи Дирихле при измельчении границы области // Доп. НАН України. – 1998. – № 8. – С. 37 – 41.
29. *Larin D. V.* Homogenization of degenerate nonlinear Dirichlet problems in perforated domains of general structure // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып. 10. – С. 117 – 122.
30. *Ковалевский А. А., Рудакова О. А.* О Г-компактности интегральных функционалов с вырожденными интегрантами // Нелинейные граничные задачи. – 2005. – Вып. 15. – С. 149 – 153.
31. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
32. *Murthy M. K. V., Stampacchia G.* Boundary value problem for some degenerate elliptic operators // Ann. mat. pura ed appl. – 1969. – **80**. – P. 1 – 122.
33. *Guglielmino F., Nicolosi F.* Sulle W-soluzioni dei problemi al contorno per operatori ellittici degeneri // Ric. mat. – 1987. – **36**. – P. 59 – 72.
34. *Cirmi G. R., Porzio M. M.* L^{∞}-solutions for some nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations // Ann. mat. pura ed appl. – 1995. – **169**. – P. 67 – 86.
35. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order // Appl. Anal. – 1997. – **65**. – P. 225 – 249.
36. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. – Oxford: Clarendon Press, 1993. – 363 p.
37. *Рудакова О. А.* О коэрцитивности интегранта Г-предельного функционала последовательности интегральных функционалов, определенных на различных весовых пространствах Соболева // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2007. – **15**. – С. 171 – 180.

Получено 26.02.08,
после доработки — 07.05.08