УДК 519.962.22

**С. М. Жук** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ, ЯКА ОПИСУЄТЬСЯ ЛІНІЙНИМ РІВНЯННЯМ З НЕВІДОМИМИ ПАРАМЕТРАМИ

We investigate a state estimation problem for a dynamical system described by an uncertain linear operator equation in a Hilbert space. For the case of quadratic conditions on unknown parameters, we propose formulae for the a priori mean square and a posteriori linear minimax estimations. We formulate a criterion for the minimax estimation error to be finite. As an example, the principal results are applied to the minimax estimation of the system of linear algebraic differential equations with constant coefficients.

Изучается проблема оценивания состояния динамической системы, описываемой линейным операторным уравнением с неизвестными параметрами в гильбертовом пространстве. Для случая квадратичных ограничений на неизвестные параметры предложены формулы для априорных среднеквадратических и апостериорных линейных минимаксных оценок. Сформулирован критерий конечности минимаксной ошибки. Применение основных результатов проиллюстрировано на примере системы линейных алгебро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

**Вступ.** Однією з проблем сучасної прикладної математики є проблема оцінювання стану динамічної системи, що описується лінійним рівнянням з невизначеними параметрами. Ця проблема належить до широкого кола задач, об’єднаних під назвою „обернені задачі в умовах невизначеності”. Математично цей клас задач можна охарактеризувати так: за заданим елементом (спостереження за станом, виміри виходу тощо) $y$ певного функціонального простору знайти оцінку елемента $l(\theta)$ за умови, що $\theta$ задовольняє співвідношення $g(\theta) = 0$. Змістовні задачі про визначення $l(\theta)$ виникають у тому випадку, коли рівняння $g(\theta) = 0$ має множину розв’язків і при цьому $y = C(\theta)$ для деякого елемента $\theta$ цієї множини. Таким чином, для цього випадку задачу оцінювання ми можемо сформулювати таким чином: по заданому $y = C(\theta)$, $\theta \in \Theta$, $y \in Y$, знайти оцінку $\overline{l(\theta)}$ елемента $l(\theta)$ за умови, що $g(\theta) = 0$ і $C(\cdot)$, $l(\cdot)$ є відомими функціями. Зауважимо, що у випадку існування єдиного розв’язку $\hat{\theta}$ рівняння $y = C(\theta)$ задача оцінювання вироджується в тому сенсі, що єдиною оцінкою $l(\theta)$ буде вираз $l(\hat{\theta})$.

Задачу оцінювання назвемо лінійною, якщо $\Theta$, $Y$ є лінійними просторами, а $C(\cdot)$, $l(\theta)$ — лінійними відображеннями. Поширеним є клас лінійних задач, що визначається функціями

$$C(\theta) = H\varphi + D\eta, \qquad g(\theta) = L\varphi + Bf, \qquad \theta = (x, f, \eta) \subset X \times F \times Y,$$

де $H$, $D$, $L$, $B$ — лінійні оператори. Лінійну задачу оцінювання будемо називати *задачею оцінювання в умовах невизначеності,* якщо $D \neq 0$, $L$ або $B$ відмінні від нуля, і якщо $B = 0$, то $N(L) = \{\varphi : L\varphi = 0\} \neq \{0\}$. Зауважимо, що „тип невизначеності” обумовлює вибір методу розв’язування задачі оцінювання: якщо $f$, $\eta$ є реалізаціями випадкових елементів, то природно застосувати стохастичний підхід. При цьому потрібно мати апріорну інформацію про характеристики розподілу випадкових елементів. Ми будемо вважати, що невизначеність має місце, якщо розподіл випадкових елементів або ж частина детермінованих параметрів частково невідомі. Більш детально ознайомитись з розмаїттям постановок задач оцінювання в умовах невизначеності, об’єднаних під назвою „теорія гарантованого оцінювання”, для різних $l$, $L$, $H$, $B$, $D$ та спеціальних просторів можна, зокрема, за оглядом [1]. Класичні результати теорії гарантованого оцінювання викладено у монографіях [2 – 4].

Для класичної теорії суттєвим є припущення про існування обмеженого оберненого оператора у оператора системи. Лінійна задача оцінювання в умовах невизначеності для рівнянь із неін'єктивним оператором в абстрактному гільбертовому просторі вивчалась, зокрема, в [5], де одержано оцінки для випадку квадратичних обмежень на невідомі параметри. У розробленій методиці суттєво використовуються скінченновимірність ядра та коядра оператора системи, а також його нормальна розв'язність. Відтак оцінки можуть бути записані, зокрема, для крайових задач для систем нормальних звичайних лінійних диференціальних рівнянь. У роботі [6] запропоновано критерій розв'язності нетерових крайових задач для лінійних алгебраїчно-диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (у літературі широко вживається також термін „дескрипторні системи") за умови, що алгебраїчно-диференціальне рівняння зводиться до центральної канонічної форми [7, с. 57]. Ця умова, зокрема, гарантує однозначну розв'язність відповідної задачі Коші [7, с. 67]. Відтак, комбінуючи ці результати з одержаними у [5], можна побудувати зображення оцінок розв'язків нетерових крайових задач для лінійних дескрипторних рівнянь спеціальної структури з невідомими параметрами. З іншого боку, у роботі [8] наведено приклад лінійного дескрипторного рівняння з постійними коефіцієнтами, для якого однорідна задача Коші має лише тривіальний розв'язок, в той час як оператор, індукований задачею Коші [8], має незамкнену множину значень. До таких систем методи оцінювання, запропоновані у [1 – 3, 5], не можна застосувати безпосередньо.

Основним результатом, що пропонується у цій статті, є метод гарантованого оцінювання для рівнянь із лінійним замкненим щільно визначеним оператором у абстрактному гільбертовому просторі. Основною перевагою запропонованого методу є те, що такі властивості оператора системи, як нетеровість і нормальна розв'язність, не є необхідними для його застосування. Метод є розвитком підходу, запропонованого автором у [9, 10] для лінійних алгебраїчно-диференціальних рівнянь у просторі сумовних із квадратом вектор-функцій, і узагальнює результати [1 – 3] на випадок лінійних рівнянь із необмеженим оператором. Для випадку нетерових рівнянь одержані зображення оцінок [11] збігаються з описаними у [5]. Як приклад, наведено застосування запропонованого методу до задачі оцінювання станів лінійного алгебраїчно-диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами. При цьому можливість зведення до центральної канонічної форми не вимагається.

Введемо необхідні позначення: $c(G,\cdot) = \sup\{(z,f),\ f\in G\}$ — опорна функція множини $G$, $\delta(\mathcal{G},\cdot)$ — індикатор $\mathcal{G}$, $\operatorname{dom} f = \{x\in\mathcal{H}: f(x)<\infty\}$ — ефективна множина функції $f$, $f^*(x^*) = \sup_x\{(x^*,x)-f(x)\}$ — перетворення Юнга – Фенхеля або спряжена функція до $f$, $\operatorname{cl} f = f^{**}$ — замикання функції $f$, для власних $f$ збігається з напівнеперервною знизу регуляризацією $f$, $(fL)(x) = f(Lx)$ — образ функції $f$ при лінійному операторі $L$, $(L^*c)(u) = \inf\{c(G,z),\ L^*z=u\}$ — прообраз функції $c(G,\cdot)$ при операторі $L^*$, $\operatorname{Arginf}_u f(u)$ — сукупність точок мінімуму функції $f$, $P_{L^*}$ — оператор ортогонального проектування на $R(L^*)$, $\partial f(x)$ — субдиференціал функції $f$ у точці $x$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток гільбертового простору.

**Постановка задачі.** Нехай вектор $\varphi$ задовольняє умову $L\varphi\in\mathcal{G}$ і задано вектор $y$, пов'язаний із $\varphi$ співвідношенням

$$y = H\varphi+\eta. \tag{1}$$

Оператори $L$, $H$ та множину $\mathcal{G}$ вважаємо заданими, елемент $\eta$ „моделює" невизначеність (скажімо, є випадковим вектором). Наша мета полягає в тому, щоб розв'язати обернену задачу: по заданому $y$ побудувати операцію оцінювання $\overline{l(\varphi)}$ виразу $l(\varphi)$ і обчислити похибку оцінювання $\sigma$. Надамо викладеному строгого змісту.

Будемо вважати $L$ замкненим оператором, що відображає скрізь щільну підмножину $\mathcal{D}(L)$ гільбертового простору $\mathcal{H}$ у гільбертів простір $\mathcal{F}$, $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Y})$. Умову $L\varphi \in \mathcal{G}$ подамо в еквівалентному вигляді: вважатимемо, що $\varphi$ задовольняє лінійне операторне рівняння

$$L\varphi = f, \tag{2}$$

де права частина $f$ є деяким наперед невідомим елементом $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Таким чином, нам відомо, що один із розв'язків $\varphi$ рівняння (2) при деякому $f \in \mathcal{G}$ визначається заданим вектором $y$ з точністю до елемента $\eta$ та оператора $H: H\varphi = y - \eta$. Нижче вважатимемо, що елемент $\eta$ моделює два типи невизначеності: позначає реалізацію випадкового вектора зі значеннями у $\mathcal{Y}$, нульовим середнім та кореляційним оператором $R_\eta \in \mathcal{R}$, де $\mathcal{R}$ — задана підмножина $\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, $\eta$ — детермінований вектор, і $(f, \eta) \in G$, де $G$ — задана підмножина $\mathcal{F} \times \mathcal{Y}$.

Зауважимо, що реалізація $y$ визначається не лише конкретними $\eta$, $H$ та $f$. У загальному випадку $N(L) = \{\varphi \in \mathcal{D}(L) : L\varphi = 0\}$ є нетривіальним лінійним многовидом, відтак $y = H(\varphi_0 + \varphi) + \eta$, де $\varphi_0$ — довільний елемент необмеженої множини $N(L)$.

Покладемо $l(\varphi) = (l, \varphi)$. Оцінку $\overline{l(\varphi)}$ будемо шукати у класі афінних функціоналів $\overline{l(\varphi)} = (u, y) + c$ від спостережень. Тут ми не припускаємо, що оператори $L$, $H$ мають обмежені обернені, відтак незначні відхилення у правій частині (2) та вимірах (1) можуть спричинити необмежено велику похибку оцінювання. Зважаючи на це, а також на ряд невизначеностей, згаданих вище, побудуємо операцію оцінювання на основі мінімаксного підходу. Це дозволить запропонувати гарантовану похибку оцінювання, яка характеризує найбільше відхилення оцінки від реального значення і для досить широкого набору пар операторів $L$, $H$ буде скінченною.

Зазначимо, що задачу оцінювання можна розглядати у двох різних постановках: апостеріорній і апріорній. Апріорне оцінювання полягає в тому, що під час побудови операції оцінювання ми розраховуємо на „найгіршу" реалізацію $y$, перебираючи всі допустимі кореляційні оператори $R_\eta$ та праві частини $f$. За рахунок цього оптимальна оцінка визначається лише напрямком $l$ та структурою заданих множин обмежень.

**Означення 1.** *Афінний функціонал* $\overline{\overline{l(\varphi)}} = (\hat{u}, \cdot) + \hat{c}$, *який знаходиться з умови*

$$\sigma(l, \hat{u}) = \inf_{u,c} \sigma(l, u), \qquad \sigma(l, u) := \sup_{L\varphi \in \mathcal{G},\, R_\eta \in \mathcal{R}} M\big(l(\varphi) - \overline{\overline{l(\varphi)}}\big)^2,$$

*назвемо апріорною мінімаксною середньоквадратичною оцінкою виразу* $l(\varphi) = (l, \varphi)$. *Мінімаксною середньоквадратичною похибкою у напрямку* $l$ *назвемо число* $\hat{\sigma}(l) = \sigma^{1/2}(l, \hat{u})$.

Натомість апостеріорна операція оцінювання зіставляє конкретній реалізації $y$ „чебишовський центр" множини $\mathcal{X}_y \subset \mathcal{H}$ усіх можливих $\varphi$, кожне з яких на підставі (1), (2) є сумісним із „виміряним" $y$:

$$(L\varphi,\ y - H\varphi) \in G$$

так званої апостеріорної множини. Тому оцінку достатньо шукати лише серед елементів $\mathcal{X}_y$. Зауважимо, що включення $(L\varphi, y - H\varphi) \in G$ передбачає нерівність $\|y\| < C$, де константа $C$ визначається структурою $\mathcal{G}$. Відтак у випадку апостеріорного оцінювання немає сенсу вважати невизначений елемент $\eta$ випадковим процесом, оскільки нерівність $\|R_\eta\| < c$ для норми кореляційного оператора не забезпечує виконання $\|y\| < C$ для конкретної реалізації $\eta$. Тому вважаємо невизначений елемент $\eta$ детермінованим.

**Означення 2.** *Множину*

$$\mathcal{X}_y = \{\varphi \in \mathcal{D}(L) : (L\varphi,\ y - H\varphi) \in \mathcal{G}\}$$

*називають апостеріорною множиною, вектор* $\hat{\varphi}$ *— мінімаксною апостеріорною оцінкою вектора* $\varphi$ *у напрямку* $l$, *якщо*

$$\hat{d}(l) := \inf_{\varphi \in \mathcal{X}_y} \sup_{\psi \in \mathcal{X}_y} |(l, \varphi) - (l, \psi)| = \sup_{\psi \in \mathcal{X}_y} |(l, \hat{\varphi}) - (l, \psi)|,$$

*вираз* $\hat{d}(l)$ *— мінімаксною апостеріорною похибкою у напрямку* $l$.

**Основні результати.** Нижче описано загальний вигляд апріорної мінімаксної середньоквадратичної оцінки та сформульовано критерій скінченності мінімаксної середньоквадратичної похибки оцінювання.

**Твердження 1.** *Нехай* $\mathcal{G}$, $\mathcal{R}$ *є опуклими, замкненими, обмеженими підмножинами відповідно* $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$. *Для заданого* $l \in \mathcal{H}$ *мінімаксна похибка* $\hat{\sigma}(l)$ *є скінченною тоді і лише тоді, коли для деякого* $u \in \mathcal{Y}$

$$l - H^* u \in \operatorname{dom} \operatorname{cl}(L^* c) \bigcap (-1) \operatorname{dom} \operatorname{cl}(L^* c)$$

*і для таких* $u$, $l$

$$\sigma(l, u) = \frac{1}{4}\left[\operatorname{cl}(L^* c)(l - H^* u) + \operatorname{cl}(L^* c)(-l + H^* u)\right]^2 + \sup_{R_\eta \in \mathcal{R}} (R_\eta u, u), \tag{3}$$

*до того ж*

$$R(L^*) \subset \operatorname{dom} \operatorname{cl}(L^* c) \subset \overline{R(L^*)}.$$

*Якщо* $\operatorname{Arginf}_u \sigma(l, u) \neq \varnothing$, *то* $\overline{\overline{l(\varphi)}} = (\hat{u}, y) + \hat{c}$, *де*

$$\hat{u} \in \operatorname{Arginf}_u \sigma(l, u), \qquad \hat{c} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cl}(L^* c)(l - H^* \hat{u}) - \operatorname{cl}(L^* c)(-l + H^* \hat{u})\right).$$

**Теорема 1.** *Нехай* $\mathcal{G}$ *– опукла, замкнена, обмежена, симетрична множина, внутрішність якої містить* 0, *і випадковий елемент* $\eta$ *задовольняє умову*

$$\eta \in \{\eta : M(\eta, \eta) \leq 1\}.$$

*Тоді для заданого* $l \in \mathcal{H}$ *мінімаксна похибка* $\hat{\sigma}(l)$ *є скінченною тоді і лише тоді, коли* $l - H^* u \in R(L^*)$ *для деякого* $u \in \mathcal{Y}$. *Для таких* $l$ *існує єдина мінімаксна середньоквадратична оцінка* $\hat{u} \in \mathcal{U}_l$, *що знаходиться з умови*

$$\begin{gathered} \sigma(l, \hat{u}) = \min_u \sigma(l, u), \\ \sigma(l, u) = (u, u) + \min_z \{c^2(\mathcal{G}, z),\ L^* z = l - H^* u\}. \end{gathered} \tag{4}$$

*Якщо множини* $R(L)$, $H(N(L))$ *є замкненими, то* $\hat{u}$ *визначається з умови*

$$\begin{gathered} \hat{u} - H p_0 \in H\left(\partial I_2(H^* \hat{u})\right), \qquad L p_0 = 0, \\ I_2(w) = \min_z \{c^2(\mathcal{G}, z),\ L^* z = P_{L^*}(l - w)\}. \end{gathered} \tag{5}$$

***Наслідок* 1.** *Нехай*

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} : (f, f) \le 1\}, \qquad \eta \in \{\eta : M(\eta, \eta) \le 1\}$$

*і виконується одна з умов*:

1) *множини* $R(L)$, $H(N(L))$ *є замкненими*:

2) *множина* $R(T) = \{[Lx, Hx],\ x \in \mathcal{D}(L)\}$ *є замкненою.*

*Тоді для* $l \in R(L^*) + R(H^*)$ *і лише для них єдину мінімаксну оцінку* $\hat{u}$ *можна подати у вигляді* $\hat{u} = H\hat{p}$, *де* $\hat{p}$ — *довільний розв'язок системи*

$$\begin{aligned} L^*\hat{z} &= l - H^*H\hat{p}, \\ L\hat{p} &= \hat{z}. \end{aligned} \tag{6}$$

*Мінімаксна середньоквадратична похибка має вигляд*

$$\hat{\sigma}(l) = (l, \hat{p})^{1/2}.$$

***Наслідок* 2.** *Нехай лінійні оператори* $L : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{F}$, $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{Y})$ *задовольняють умову* 1 *або* 2 *наслідку* 1. *Тоді система операторних рівнянь* (6) *має розв'язок* $\hat{z} \in \mathcal{D}(L^*)$, $\hat{p} \in \mathcal{D}(L)$ *лише тоді, коли* $l = L^*z + H^*u$ *для деяких* $z \in \mathcal{D}(L^*)$, $u \in \mathcal{Y}$.

***Наслідок* 3.** *В умовах наслідку* 1 *для довільного* $l \in R(L^*) + R(H^*)$ *та реалізації* $y(\cdot)$ *має місце зображення* $(\hat{u}, y) = (l, \hat{\varphi})$, *де* $\hat{\varphi}$ *знаходиться з системи*

$$\begin{aligned} L^*\hat{q} &= H^*(y - H\hat{\varphi}), \\ L\hat{\varphi} &= \hat{q}. \end{aligned} \tag{7}$$

Розглянемо апостеріорні оцінки.

**Твердження 2.** *Нехай* $\mathcal{G}$ — *опукла, замкнена, обмежена підмножина* $\mathcal{Y} \times \mathcal{F}$. *Мінімаксна апостеріорна похибка у напрямку* $l$ *є скінченною лише тоді, коли* $l \in \operatorname{dom} c(\mathcal{X}_y, \cdot) \bigcap (-1)\operatorname{dom} c(\mathcal{X}_y, \cdot)$ *і*

$$R(L^*) + R(H^*) \subset \operatorname{dom} c(\mathcal{X}_y, \cdot) \bigcap (-1)\operatorname{dom} c(\mathcal{X}_y, \cdot) \subset \overline{R(L^*) + R(H^*)}. \tag{8}$$

*Для таких* $l$ *оцінка і похибка зображуються у вигляді*

$$(l, \hat{\varphi}) = \frac{1}{2}\big(c(\mathcal{X}_y, l) - c(\mathcal{X}_y, -l)\big), \qquad \hat{d}(l) = \frac{1}{2}\big(c(\mathcal{X}_y, l) + c(\mathcal{X}_y, -l)\big).$$

**Теорема 2.** *Нехай*

$$\mathcal{G} = \left\{(f, \eta) : \|f\|^2 + \|\eta\|^2 \le 1\right\}$$

*і оператори* $L$, $H$ *задовольняють умову* 1 *або* 2 *наслідку* 1. *Тоді для* $l \in R(L^*) + R(H^*)\mathcal{G}_1$ *і лише для них мінімаксна апостеріорна оцінка* $\hat{\varphi}$ *вектора* $\varphi$ *у напрямку* $l$ *існує і знаходиться з ситеми (7). Апостеріорна похибка задається виразом*

$$\hat{d}(l) = \big(1 - (y, y - H\hat{\varphi})\big)^{1/2}\hat{\sigma}(l). \tag{9}$$

***Наслідок* 4.** *Нехай в умовах теореми* 2 $\overline{l(\varphi)} = (l, \hat{\varphi})$ *для довільного напрямку* $l$, *де* $\hat{\varphi}$ *знаходиться з* (7). *Тоді вектор* $\hat{\varphi}$ *є мінімаксною оцінкою вектора* $\varphi$ *у тому сенсі, що*

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{X}_y}\sup_{x\in\mathcal{X}_y}\|\varphi - x\| = \sup_{x\in\mathcal{X}_y}\|\hat{\varphi} - x\| = \big(1-(y,\, y-H\hat{\varphi})\big)^{1/2}\max_{\|l\|=1}\hat{\sigma}(l).$$

Продемонструємо застосування наслідку 4. Не зменшуючи загальності (див. лему про сингулярний розклад [8]) вважатимемо, що матриці $F$, $C$ визначаються набором блоків

$$F = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

узгодженої розмірності.

**Твердження 3.** *Нехай* $t \mapsto x(t)\in\mathbb{R}^n$ *знаходиться як розв'язок рівняння*

$$\frac{d}{dt}Fx(t) - Cx(t) = f(t), \qquad Fx(t_0) = 0,$$

*і множина* $\mathcal{G}$ *має вигляд*

$$\mathcal{G} = \left\{(f,\eta): \int_{t_0}^{T}\big(\|f(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2\big)dt \le 1\right\}.$$

*Тоді мінімаксна апостеріорна оцінка функції* $x(\cdot)$ *за спостереженнями* $y(t) = x(t) + \eta(t)$, $t_0 \le t \le T$, *задається виразом* $\hat{x}(\cdot)$, *де* $\hat{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]$, *функції* $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ *знаходяться з рівнянь*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= (C_1 - C_2(E + C_4'C_4)^{-1}C_4'C_3)x_1(t) + (C_2(E + C_4'C_4)^{-1}C_2' + E)q_1(t) + \\
&\quad + C_2(E + C_4'C_4)^{-1}y_2(t), \qquad x_1(t_0) = 0,\\
\dot{q}_1(t) &= (-C_1' + C_3'C_4(E + C_4'C_4)^{-1}C_2')q_1(t) + C_3'C_4(E + C_4'C_4)^{-1}y_2(t) - y_1(t) + \\
&\quad + (C_3'(E - C_4(E + C_4'C_4)^{-1}C_4')C_3 + E)x_1(t), \qquad q_1(T) = 0,\\
x_2(t) &= -(E + C_4'C_4)^{-1}C_4'C_3x_1(t) + (E + C_4'C_4)^{-1}(C_2'q_1(t) + y_2(t)),\\
q_2(t) &= -(E - C_4(E + C_4'C_4)^{-1}C_4')C_3x_1(t) - C_4(E + C_4'C_4)^{-1}(C_2'q_1(t) + y_2(t)).
\end{aligned} \tag{10}$$

*Мінімаксна похибка має вигляд*

$$\sup_{\mathcal{X}_y}\|x - \hat{x}\| = \left(1 - \int_{t_0}^{T}(y,\, y - \hat{x})dt\right)^{1/2}\max_{\|l\|=1}\left(\int_{t_0}^{T}(l, p)dt\right)^{1/2},$$

*де функція* $p(\cdot)$ *визначається з* (10), *якщо покласти* $y(t) = l(t)$.

Твердження залишається справедливим і для нестаціонарної матриці $C(t)$.

**Допоміжні результати і доведення.** Введемо множини

$$\mathcal{U}_l = \{u\in Y: L^*z = l - H^*u\}, \qquad D = \{l\in\mathcal{H}: \mathcal{U}_l \ne \varnothing\},$$

де після ототожнення гільбертових просторів $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$ з їхніми спряженими оператор $L^*$ діє з $\mathcal{F}$ у $\mathcal{H}$. Існування єдиного спряженого $L^*$ забезпечується [12, с. 40] щільною визначеністю $L$. Нагадаємо, що індикатор $\delta(\mathcal{G},\cdot)$ множини $\mathcal{G}$ визначається так: $\delta(\mathcal{G}, f) = 0$, $f\in\mathcal{G}$, і $\delta(\mathcal{G}, f) = +\infty$, $f\notin\mathcal{G}$.

Наступна лема лежить в основі доведення теорем про існування, єдиність та зображення мінімаксних оцінок.

**Лема 1.** *Нехай* $\mathcal{G}$ — *опукла, обмежена, замкнена підмножина* $\mathcal{F}$, $L$ — *лінійний, щільно визначений, замкнений оператор з* $\mathcal{H}$ *у* $\mathcal{F}$. *Тоді*

$$(L^*c)^* = (\delta L), \quad (L^*c)^{**} = (\delta L)^*, \quad R(L^*) \subset \operatorname{dom}(\delta L)^* \subset \overline{R(L^*)}.$$

*Якщо внутрішність* $\mathcal{G}$ *має спільні точки з* $R(L)$, *то* $\operatorname{dom}(\delta L)^* = \operatorname{dom}(L^*c) = R(L^*)$, *функціонал* $(L^*c)$ *є власним,* $L^*c = (L^*c)^{**}$ *і*

$$(L^*c)(x) = c(\mathcal{G}, z_0) = \inf\{c(\mathcal{G}, z) \,|\, L^*z = x\}, \quad x \in R(L^*).$$

Лема залишається справедливою, якщо індикатор опуклої множини замінити опуклою власною функцією [9].

***Зауваження.*** Умова $\operatorname{int}\mathcal{G} \cap R(L) \neq \varnothing$ леми 1 є суттєвою, бо можна вказати оператор $L$ і множину $\mathcal{G}$ так, що $R(L) \neq \overline{R(L)}$, $\operatorname{int}\mathcal{G} = \varnothing$, $\operatorname{dom}(L^*c) = R(L)$, $\operatorname{dom}(\delta L)^* = \overline{R(L)}$ і $(L^*c)(x) > (\delta L)^*(x)$ для $x \in \overline{R(L)} / R(L)$. Справді, покладемо

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(t) \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

і визначимо оператор $x \mapsto Lx \in (\mathbb{L}_2[0,1])^2$ способом, описаним у доведенні твердження 3. Рівняння $Lx = 0$ є еквівалентним системі алгебраїчно-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1(t) - x_1(t) + x_2(t) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad -x_1(t) = 0,$$

звідки знаходимо $x_{1,2}(t) = 0$ на $[0, 1]$, відтак $N(L) = \{0\}$, тому $\overline{R(L^*)} = (\mathbb{L}_2[0,1])^2$. З іншого боку, для розв'язності алгебраїчно-диференціального рівняння

$$-\dot{z}_1(t) - z_1(t) - z_2(t) = f_1(t), \quad z_1(1) = 0, \quad z_1(t) = f_2(t),$$

необхідно, щоб $f_2(\cdot)$ була абсолютно неперервною, тому $R(L^*)$ і $R(L)$ не є замкненими. Покладемо

$$\mathcal{G} = \left\{ f = (f_1, f_2) : \int_0^1 f_1^2(s)\,ds \leq 1, \ f_2 = 0 \right\}.$$

Тоді $\operatorname{int}\mathcal{G} = \varnothing$ в $(\mathbb{L}_2[0,1])^2$. Оскільки $Lp \in \mathcal{G} \Leftrightarrow p_1 = 0, \ \|p_2\| \leq 1$, то

$$(\delta L)^*(x) = \sup\{(x, p) - \delta(\mathcal{G}, Lp)\} = \sup\left\{ (p_2, x_2), \ \int_0^1 p_2^2(s)\,ds \leq 1 \right\} = \|x_2\|.$$

Отже, $\operatorname{dom}(\delta L)^* = \overline{R(L^*)} = (\mathbb{L}_2[0,1])^2$. З іншого боку,

$$c(\mathcal{G}, z) = c(P\mathcal{S}_1(0), z) = c(\mathcal{S}_1(0), P^*z) = \|z_1\|,$$

$$S_1(0) = \left\{ f \in \mathbb{L}_2^2[0,1] : \|f\| \leq 1 \right\},$$

де символом $P$ позначено оператор множення на матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ у просторі $\mathbb{L}_2^2[0,1]$. Зазначимо, що внаслідок ін'єктивності $L^*$

$$(L^*c)(x) = \inf\left\{ c(\mathcal{G}, z) : L^*z = x \right\} = \|x_2\|, \quad x_{1,2} \in \mathbb{W}_2^1[0,1].$$

Якщо ж

$$x_n = (x_1, x_{2,n}) \to x = (x_1, x^*), \quad x^* \notin \mathbb{W}_2^1[0,1],$$

то

$$(L^*c)(x_n) \to \|x^*\| = (\delta L)^*(x),$$

але $(L^*c)(x) = +\infty$.

***Доведення леми.*** Нехай $p \in \mathcal{D}(L)$. Оскільки $p \in \mathcal{D}(L)$, то лінійний функціонал $z \mapsto p(z) = (p, L^*z)$ є обмеженим, відтак його можна поширити на весь простір $\mathcal{F}$ за неперервністю. Звідси

$$(L^*c)^*(p) = \sup_{x \in R(L^*)} \left\{(p, x) - \inf\left\{c(\mathcal{G}, z) \mid L^*z = x\right\}\right\} =$$

$$= \sup_{x \in R(L^*)} \sup_{z \in L^{*-1}(x)} \left\{(p, x) - c(\mathcal{G}, z)\right\} = \sup_{z \in \mathcal{D}(L^*)} \left\{(p, L^*z) - c(\mathcal{G}, z)\right\} =$$

$$= \sup_{z \in \mathcal{F}} \left\{(Lp, z) - c(\mathcal{G}, z)\right\} = c^*(\mathcal{G}, \cdot)(Lp) = \delta(\mathcal{G}, Lp).$$

Розглянемо випадок $p \notin \mathcal{D}(L)$. За означенням спряженого до обмеженого лінійного оператора [12, с. 39] лінійний функціонал $z \mapsto p(z) = (p, L^*z)$ є необмеженим. Це означає, що знайдеться послідовність $\{z_n\}$ така, що $\|z_n\| \le 1$, $z_n \in \mathcal{D}(L^*)$ і $p(z_n) \to +\infty$. З іншого боку, опорна функція $c(\mathcal{G}, \cdot)$ обмеженої опуклої множини є обмеженою в околі довільної точки $z \in \mathcal{F}$ і тому неперервною [13, с. 21]. Але тоді $\sup_n c(\mathcal{G}, z_n) = M < +\infty$ і

$$(L^*c)^*(p) = \sup_{z \in \mathcal{D}(L^*)} \left\{(p, L^*z) - c(\mathcal{G}, z)\right\} \ge \sup_n \left\{p(z_n) - M\right\} = +\infty.$$

З іншого боку, за означенням $(\delta L)(p) = +\infty$. Ми показали, що $(L^*c)^*(p) = (\delta L)(p)$ для всіх $p$, звідки $(L^*c)^{**} = (\delta L)^*$.

Нехай $x \notin N(L)^\perp$ і $Lp \in \mathcal{G}$ для деякого $p \in \mathcal{D}(L)$. Знайдеться $p_0 \in N(L)$ таке, що $n(p_0, x) > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Але тоді

$$(\delta L)^*(x) = \sup_{q \in \mathcal{D}(L)} \left\{(q, x) - \delta(\mathcal{G}, Lq)\right\} \ge \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{n(p_0, x)\right\} = +\infty.$$

Тому $\operatorname{dom}(\delta L)^* \subset N(L)^\perp = \overline{R(L^*)}$.

З іншого боку, якщо $x = L^*z$, то

$$(\delta L)^*(x) = \sup_{q \in \mathcal{D}(L)} \left\{(Lq, z) - \delta(\mathcal{G}, Lq)\right\} \le$$

$$\le \sup_{f \in \mathcal{F}} \left\{(f, z) - \delta(\mathcal{G}, f)\right\} = c(\mathcal{G}, x) < +\infty$$

внаслідок обмеженості $\mathcal{G}$, відтак $R(L^*) \subset \operatorname{dom}(\delta L)^* \subset \overline{R(L^*)}$.

Нехай тепер $\operatorname{int}\mathcal{G} \cap R(L) \neq \varnothing$. Покажемо, що цього достатньо для $(L^*c) \le (\delta L)^*$. Справді,

$$x^* \in \operatorname{dom}(\delta L)^*, \quad x \in \mathcal{D}(L) \Rightarrow (x^*, x) - (\delta L)^*(x^*) \le \delta L(x) < +\infty$$

на підставі нерівності Юнга – Фенхеля [14]. Зафіксувавши $x^* \in \operatorname{dom}(\delta L)^*$, введемо множину

$$\mathcal{M}(x^*) = \{(z, \mu) \mid Lx = z,\ \mu = (x^*, x) - (\delta L)^*(x^*)\}.$$

Зауважимо, що

$$\mathcal{W} := \operatorname{int}\operatorname{epi}(\delta(\mathcal{G},\cdot)) = \operatorname{int}\mathcal{G} \times \left\{\mu \in \mathbb{R}^1 : \mu > 0\right\} \bigcap \mathcal{M}(x^*) = \varnothing.$$

Дійсно, якщо $(z,\mu) \in \mathcal{W} \bigcap \mathcal{M}$, то

$$\delta(\mathcal{G}, Lx) < \mu = (x^*, x) - (\delta L)^*(x^*), \qquad Lx = z,$$

що суперечить нерівності Юнга – Фенхеля.

Отже, опуклі множини $\operatorname{epi}(\delta(\mathcal{G},\cdot))$, $\mathcal{M}(x^*)$ можна розділити ненульовим лінійним неперервним функціоналом $(z^0, \beta_0)$

$$\sup\left\{(z^0, z) + \beta_0\alpha \,\middle|\, (z,\alpha) \in \mathcal{W}\right\} \le \inf\left\{(z^0, z) + \beta_0\alpha \,\middle|\, (z,\alpha) \in \mathcal{M}(x^*)\right\}. \tag{11}$$

Легко пересвідчитись, що $\beta_0 < 0$. Дійсно, якщо $\beta_0 > 0$, то супремум у (11) дорівнює $+\infty$. З іншого боку, супремум у (11) завжди є відмінним від $-\infty$, що гарантує скінченність інфімуму в (11). Якщо $\beta_0 = 0$, то згідно з (11) $\mathcal{G}$ та $R(L)$ розділяються функціоналом $(z^0, \cdot)$, але тоді $\operatorname{int}\mathcal{G} \bigcap R(L) = \varnothing$.

За означенням $\mathcal{M}(x^*)$

$$-\infty < (\mathcal{G}, z^0) = \sup\left\{(z^0, z) - \beta_0\delta(\mathcal{G}, z)\right\} \le$$

$$\le \inf\left\{(z^0, Lx) - |\beta_0|(x^*, x)\right\} + |\beta_0|(\delta L)^*(x^*),$$

звідки

$$-\infty < \inf_x\left\{(z^0, Lx) - \beta_0(x^*, x)\right\} \quad\Rightarrow\quad \left[-|\beta_0|x^*, z^0\right] \perp \{[x, Lx],\ x \in \mathcal{D}(L)\}.$$

Тому, зважаючи на вигляд [12, с. 40] ортогонального доповнення графіка $L$, отримуємо

$$z_0 \in \mathcal{D}(L^*), \qquad L^* z_0 = |\beta_0| x^* \quad\Rightarrow\quad (L^*c)(x^*) \le c(\mathcal{G}, \beta_0^{-1} z^0) \le (\delta L)^*(x^*).$$

Ми показали, що на $\operatorname{dom}(\delta L)^*$ виконано $(L^*c) = (\delta L)^*$ і $\operatorname{dom}(\delta L)^* \subset R(L^*)$. За означенням $R(L^*) \subset \operatorname{dom}(L^*c)$. Раніше було доведено, що $R(L^*) \subset$ $\subset \operatorname{dom}(\delta L)^*$. Оскільки, взагалі кажучи, $(L^*c) \ge (L^*c)^{**} = (\delta L)^*$, то $\operatorname{dom}(\delta L)^* \subset$ $\subset \operatorname{dom}(L^*c)$. Отже,

$$(L^*c) = (\delta L)^*, \qquad \operatorname{dom}(\delta L)^* = \operatorname{dom}(L^*c) = R(L^*).$$

За теоремою Фенхеля – Моро $(L^*c) = (L^*c)^{**} = (\delta L)^*$ тоді і лише тоді, коли $(L^*c)$ має замкнений надграфік, що для власних опуклих функціоналів еквівалентно напівнеперервності знизу [14, с. 178].

Лему доведено.

***Доведення твердження* 1.** Беручи до уваги рівність $M\xi^2 = M(\xi - M\xi)^2 +$ $+ (M\xi)^2$ та (1), знаходимо

$$M\big((l,\varphi) - (u,y) - c\big)^2 = \big[(l - H^*u, \varphi) - c\big]^2 + M(u,\eta)^2,$$

відтак

$$\sup_{\varphi \in L^{-1}(\mathcal{G}),\, R_\eta \in \mathcal{R}} M\big((l,\varphi) - (u,y) - c\big)^2 = \sup_{\varphi \in L^{-1}(\mathcal{G})} \big[(l - H^*u, \varphi) - c\big]^2 + \sup_{R_\eta \in \mathcal{R}} (R_\eta u, u).$$

Перетворимо перший доданок:

$$\sup_{\varphi\in L^{-1}(\mathcal{G})}\Big[(l-H^*u,\varphi)-c\Big] = \frac{1}{2}\Big((\delta L)^*(l-H^*u) + (\delta L)^*(-l+H^*u)\Big) +$$

$$+ \left|c - \frac{1}{2}\Big((\delta L)^*(l-H^*u) - (\delta L)^*(-l+H^*u)\Big)\right|. \qquad (12)$$

Зважаючи на формулу (12), виводимо, що для заданих $l$, $u$, $c$

$$\sup_{\varphi\in L^{-1}(\mathcal{G})}\Big[(l-H^*u,\varphi)-c\Big] < +\infty \quad\Leftrightarrow\quad l-H^*u \in \operatorname{dom}(\delta L)^* \bigcap -\operatorname{dom}(\delta L)^*.$$

Множина $\operatorname{dom}(\delta L)^*$ є опуклим конусом з вершиною в нулі, відтак $\operatorname{dom}(\delta L)^* \bigcap$ $\bigcap -\operatorname{dom}(\delta L)^*$ є найбільшим лінійним многовидом, що міститься в $\operatorname{dom}(\delta L)^*$. Якщо покласти

$$c = \frac{1}{2}\Big((\delta L)^*(l-H^*u) - (\delta L)^*(-l+H^*u)\Big),$$

то з (12) та леми 1 дістанемо вираз для $\sigma(l,u)$.

Вираз $\sup_{R_\eta\in\mathcal{R}}(R_\eta u,u)$ є скінченним для довільного $u$. Справді,

$$(R_\eta u,u) \le \|R_\eta\|\|u\|^2 \le \|u\|^2, \qquad R_\eta\in\mathcal{R},$$

тому $\sigma(l,u) < +\infty$. Для завершення доведення залишається застосувати означення мінімаксної середньоквадратичної оцінки.

***Доведення теореми* 1.** Згідно з твердженням 1 для заданого $l\in\mathcal{H}$ мінімаксна похибка є скінченною тоді і лише тоді, коли

$$l-H^*u \in \operatorname{dom}(\delta L)^* \bigcap -\operatorname{dom}(\delta L)^*.$$

Оскільки $0\in\mathcal{G}\bigcap R(L)$, то виконано умови леми 1, звідки $\operatorname{dom}(\delta L)^* = R(L^*)$ і

$$I_1^{1/2}(u) := \operatorname{cl}(L^*c)(l-H^*u) = (L^*c)(l-H^*u).$$

Застосовуючи твердження 1, дістаємо твердження теореми щодо скінченності мінімаксної похибки. Обчислимо

$$(R_\eta u,u) = M(\eta,u)^2 \le M(\eta,\eta)(u,u) \quad\Rightarrow\quad \sup_{R_\eta\in\mathcal{R}}(R_\eta u,u) = (u,u).$$

Тоді з (3) отримуємо

$$\sigma(l,u) = I_1(u) + (u,u),$$

і формула (4) є правильною. Зазначимо, що $U_l = \left\{u : l-H^*u\in R(L^*)\right\}$ згідно з означенням $U_l$. Функціонал $I_1$ є опуклим і слабконапівнеперервним знизу, як це випливає з леми 1, відтак $u\mapsto\sigma(l,u)$ є слабконапівнеперервним, строго опуклим та коерцитивним. Оскільки $I_1(u) = +\infty$ у доповненні $U_l$, то для довільної мінімізуючої послідовності $\{u_n\}$ виконано $u_n\in\mathcal{U}_l$. Ця послідовність є обмеженою внаслідок коерцитивності $u\mapsto\sigma(l,u)$. Виділимо слабкозбіжну підпослідовність $\{u_n\}$. Внаслідок слабкої напівнеперервності точна нижня грань $u\mapsto\sigma(l,u)$ досягається на слабкій границі послідовності $\{u_n\}$. Отже, множина точок мінімуму є непорожньою і внаслідок строгої опуклості складається з єдиної точки $\hat{u}$. Оскільки $I_1(u) = +\infty$ для $u\notin U_l$, то виконується включення $l-H^*\hat{u}\in R(L^*)$. Отже, ми довели існування та єдиність мінімаксної оцінки.

Нехай виконано умову другої частини теореми. Тоді

$$U_l = \left\{u : P_{N(L)} H^* u = P_{N(L)} l\right\},$$

де через $P_{N(L)}$ позначено ортопроектор на $N(L)$. Розглянемо функціонал

$$I_2(w) = \min_z \left\{c^2(\mathcal{G}, z),\ L^* z = P_{L^*}(l - w)\right\}.$$

За лемою 1 $I_2(\cdot)$ досягає мінімуму $\hat{z}(w)$ у кожній точці $w$, тому на підставі властивостей опорної функції

$$I_2^{1/2}(w) = c(\mathcal{G}, \hat{z}(w)) \le c(\mathcal{G}, z(w)) + c^2(\mathcal{G}, z_0),$$

де $L^* z_0 = 0$, $L^* z(w) = P_{L^*}(l - w)$, $z(w) \in R(L)$. Ліва частина попередньої нерівності не залежить від $z_0$, тому

$$I_2^{1/2}(w) \le c(\mathcal{G}, z(w)) + \min_{z_0 \in N(L^*)} c(\mathcal{G}, z_0) = c(\mathcal{G}, z(w)),$$

оскільки $c(\mathcal{G}, \cdot) \ge 0$, $c(\mathcal{G}, 0) = 0$. Тепер для довільного $w$ обмеженість $I_2(\cdot)$ у деякому околі $V(w)$ випливає з того, що $z(w)$ неперервно залежить від $w$ ($L$ є нормально розв'язним) та властивостей множини $\mathcal{G}$. Отже, $I_2(\cdot)$ є неперервною функцією. Але тоді

$$\partial I_3(\hat{u}) = H \partial I_2(H^* \hat{u}), \qquad I_3(u) = I_2(H^* u),$$

за теоремою про субдиференціал образу опуклої функції при лінійному операторі [14, с. 212]. З іншого боку, на $U_l$

$$P_{L^*}(l - H^* u) = l - H^* u \quad \Rightarrow \quad I_1(u) = I_2(H^* u) = I_3(u),$$

тому точка мінімуму $\hat{u}$ функціонала $\sigma(l, \cdot)$ є водночас розв'язком задачі умовної оптимізації

$$I_4(u) = (u, u) + I_3(u) \quad \to \quad \min, \quad u \in U_l.$$

Оскільки афінний многовид $\mathcal{U}_l$ є паралельним лінійному підпростору $\mathcal{U}_0 = \left\{u : P_{N(L)} H^* u = 0\right\}$, то необхідна і достатня умова екстремуму [14, с. 89] $I_4$ на $U_l$ має вигляд

$$\partial I_4(\hat{u}) \cap (\mathcal{U}_0)^\perp \ne \varnothing.$$

За теоремою Моро – Рокафеллара $\partial I_4(\hat{u}) = \partial I_3(\hat{u}) + \{2\hat{u}\}$. З іншого боку, згідно з умовою теореми

$$(\mathcal{U}_0)^\perp = N^\perp(P_{N(L)} H^*) = \overline{R(P_{N(L)} H^*)^*} = H(N(L)).$$

Таким чином, знайдеться таке $p_0 : Lp_0 = 0$, що

$$\hat{u} - Hp_0 \in H \partial I_2(H^* \hat{u}),$$

$$I_2(w) = \min_z \left\{c^2(\mathcal{G}, z),\ L^* z = P_{L^*}(l - w)\right\}, \qquad \hat{u} \in \mathcal{U}_l.$$

Теорему доведено.

***Доведення наслідку* 1.** Зазначимо, що множини $\mathcal{G}$, $\{\eta : M(\eta, \eta) \le 1\}$ задовольняють умови теореми 1, відтак існує єдина мінімаксна середньоквадратична оцінка $\hat{u} \in \mathcal{U}_l$. Нехай виконано умову 1. Тоді за теоремою 1

$$\hat{u} - \hat{H}p \in H(\partial I_2(\hat{u})), \quad \hat{u} \in U_l, \quad I_2(w) = \min_z \left\{c^2(\mathcal{G}, z),\ L^* z = P_{L^*}(l - w)\right\}.$$

Обчислимо субдиференціал $I_2$. Введемо додаткові позначення. Символом $\tilde{L}_1^*$ позначимо лінійний оператор, визначений на $R(L^*)$ за правилом

$$\tilde{L}_1^* w = z, \qquad z \in R(L) \cap \mathcal{D}(L^*), \qquad L^* z = w.$$

Покажемо, що $\tilde{L}_1^*$ є замкненим оператором. Справді, нехай

$$w_n \to w, \qquad w_n \in R(L^*), \qquad \tilde{L}_1^* w_n = z_n \to z.$$

Тоді $w \in R(L^*)$ і $L^* z_n = w_n \to w$, $z_n \to z$. Оскільки $z_n \in R(L)$ за означенням $\tilde{L}_1^*$, то $z \in R(L)$. Використавши замкненість $L^*$, дістанемо $z \in R(L) \cap \mathcal{D}(L^*)$ і $L^* z = w$, тобто $w \in \mathcal{D}(\tilde{L}_1^*)$ і $\tilde{L}_1^* w = z$.

Тепер, з огляду на теорему про замкнений графік [12], виводимо обмеженість $\tilde{L}_1^*$. Продовжимо $\tilde{L}_1^*$ на увесь $\mathcal{F}$ таким чином:

$$L_1^* w = \tilde{L}_1^* (I - P_{N(L)}) w, \qquad w \in \mathcal{F}.$$

Зіставимо оператор $L_1$ оператору $L$ по аналогії з побудовою $L_1^*$. Дістанемо $(L_1)^* = L_1^*$. Справді, для довільних $p \in \mathcal{F}$, $w \in \mathcal{H}$ маємо

$$(L_1^* w, p) + (L_1 p, w) = (z, p) + (q, w) = (z, Lq) + (q, L^* z) = 0,$$

де $z \in R(L) \cap \mathcal{D}(L^*)$, $L^* z = w$ і $q \in R(L^*) \cap \mathcal{D}(L)$, $Lq = p$.

Зазначимо, що $c(\mathcal{G}, z) = \|z\|$, і тому для $l - w \in R(L^*)$ за означенням $L_1^*$ виконується рівність

$$I_2^{1/2}(w) = \left\| L_1^*(l - w) \right\| = \min_z \left\{ c(\mathcal{G}, z),\ L^* z = P_{L^*}(l - w) \right\}.$$

Якщо покласти $k(q) = \left\| L_1^* l - q \right\|^2$, то

$$I_2(w) = \left\| L_1^*(l - w) \right\|^2 = k(L_1^* w) = (k L_1^*)(w).$$

Зауважимо, що $q \mapsto k(q)$ є опуклим неперервним функціоналом на всьому просторі $\mathcal{F}$ і відтак задовольняє умови теореми [14, с. 212] про субдиференціал образу опуклого функціонала при лінійному неперервному операторі, тому

$$\partial(k L_1^*)(w) = L_1 \partial k(L_1^* w) = L_1 \partial \left\| L_1^*(l - w) \right\|^2.$$

Покладемо $w = H^* \hat{u}$. Оскільки $\hat{u} \in \mathcal{U}_l$, то $L^* \hat{z} = l - H^* \hat{u}$, де $\hat{z} = L_1^*(l - H^* \hat{u})$. Отже,

$$\partial I_2(H^* \hat{u}) = \partial(k L_1^*)(H^* \hat{u}) = L_1 \partial \|\hat{z}\|^2 = 2\|\hat{z}\| L_1(\overline{\mathcal{G}}_1(\hat{z})),$$

де $\overline{\mathcal{G}}_1(z) = \{ f \in \mathcal{G} : (f, z) = \|z\| \}$.

Якщо $\hat{z} = 0$, то

$$0 = L_1^*(l - H^* \hat{u}) = \tilde{L}_1^*(l - H^* \hat{u}),$$

і внаслідок ін'єктивності $\tilde{L}_1^*$ виводимо $l = H^* \hat{u}$. Умова (5) набере вигляду $H p_0 = \hat{u}$, $L p_0 = 0$, відтак $0 = l - H^* H p_0$, $L p_0 = 0$, отже, $\hat{u}$ виражається через розв'язки (6).

Нехай $\hat{z} \neq 0$. Тоді за означенням оператора $L_1$

$$H L_1(\overline{\mathcal{G}}_1(\hat{z})) = \left\{ Hp,\ Lp = \frac{\hat{z}}{\|\hat{z}\|},\ p \in R(L^*) \right\}.$$

Отже, умова (5) набирає вигляду

$$\hat{u} - Hp_0 = 2\|\hat{z}\|Hp,$$
$$L^*\hat{z} = l - H^*\hat{u}, \qquad \hat{z} \in R(L), \tag{13}$$
$$Lp = \frac{\hat{z}}{\|\hat{z}\|}, \qquad p \in R(L^*),$$

для деякого $p_0 \in N(L)$. Покладемо $\tilde{p} = 2\|\hat{z}\|^{-1}p$. Тоді з (13) знаходимо $\hat{u} = H(\tilde{p} + p_0)$, де

$$L(\tilde{p} + p_0) = \hat{z}, \qquad Lp_0 = 0,$$
$$L^*\hat{z} = l - H^*H(\tilde{p} + p_0).$$

Якщо тепер покласти $\hat{p} = \tilde{p} + p_0$ для $\tilde{p}$, $p_0$, то $\hat{p}$, $\hat{z}$ задовольняють (6). Відповідно $\hat{u} = H\hat{p}$.

Покажемо, що $\hat{p}$ може обиратись як довільний розв'язок (6). Справді, введемо лінійний оператор $Tx = [Lx, Hx]$ з $\mathcal{H}$ у декартовий добуток $\mathcal{F} \times \mathcal{Y}$. Зрозуміло, що $N(T) = N(L) \bigcap N(H)$ і $T^*(u, z) = L^*z + H^*u$. Нехай $(p_0, z_0)$ знаходиться з умов

$$Lp_0 = z_0,$$
$$L^*z_0 + H^*Hp_0 = 0. \tag{14}$$

Покладемо $u_0 = Hp_0$. Тоді $T^*(u_0, z_0) = 0$ і $Tp_0 = [z_0, u_0]$, відтак $Tp_0 \in N(T^*)$. Але ж $R(T) \bigcap N(T^*) = \{0\}$, звідки $p_0 \in N(T) = N(L) \bigcap N(H)$, тобто $u_0 = 0$. Залишилось зауважити, що два довільних розв'язки $(p_1, z_1)$, $(p_2, z_2)$ лінійного рівняння (6) розрізняються між собою на розв'язок (14), тому $H(p_1 - p_2) = 0$ за доведеним.

Нехай тепер виконано умову 2. Тоді єдиний розв'язок $[u^*, z^*]$ задачі оптимізації

$$\|[z, u]\|^2 \to \inf, \qquad T^*[z, u] = l \tag{15}$$

ортогональний до нуль-многовиду $T^*$ і тому належить множині значень оператора $T$, тобто водночас

$$[u^*, z^*] = Tx, \qquad T^*[u^*, z^*] = l,$$

звідки за означенням $T$ знаходимо

$$Lx = z^*, \qquad Hx = u^*, \qquad L^*z^* + H^*u^* = l.$$

Звідси в свою чергу

$$u^* \in \mathcal{U}_l \quad \Rightarrow \quad \sigma(\hat{u}, l) \le \sigma(u^*, l).$$

З іншого боку, $l = L^*\hat{z} + H^*\hat{u}$ і $Lp = \hat{z}$ внаслідок (6) для деякого $p \in \mathcal{D}(L)$, відтак $T^*[\hat{u}, \hat{z}] = l$, і тому на підставі (15)

$$\sigma(l, \hat{u}) = \|[\hat{u}, \hat{z}]\|^2 \ge \left\|[u^*, z^*]\right\|^2.$$

Але за формулою (15)

$$\sigma(u^*, l) = (u^*, u^*) + \min_z \left\{\|z\|^2,\ L^*z = l - H^*u^*\right\} \le (u^*, u^*) + (z^*, z^*) \le \sigma(\hat{u}, l).$$

Тому $\sigma(l,\hat{u}) = \sigma(l,u^*)$, звідки внаслідок строгої опуклості $u^* = \hat{u}$.

З урахуваннням (6) знайдемо $\sigma(l,u) = (\hat{z},\hat{z}) + (\hat{u},\hat{u}) = (l,p)$, звідки $\hat{\sigma}(l) = (l,\hat{p})^{1/2}$.

Наслідок 1 доведено.

***Доведення наслідку* 2.** Якщо система операторних рівнянь (6) має розв'язок $\hat{z}\in\mathcal{D}(L^*)$, $\hat{p}\in\mathcal{D}(L)$, то $l = L^*z + H^*u$ для $\hat{z}$, $\hat{u}$, $\hat{u} = H\hat{p}$.

Нехай тепер виконано умови наслідку і $l\in R(L^*)+R(H^*)$. Тоді оператори $L$, $H$ та вектор $l$ задовольняють умови наслідку 1. Тому мінімаксна оцінка $\hat{u}$ зображується як $\hat{u} = H\hat{p}$, де $\hat{p}$ знаходиться як розв'язок (6).

Наслідок 2 доведено.

***Доведення наслідку* 3.** Насамперед зазначимо, що (7) має непорожню множину розв'язків $(q,\varphi)$. Це випливає з того, що для довільного $y\in\mathcal{Y}$ вектор $H^*y$ належить множині $R(L^*)+R(H^*)$ і наслідку 2. Нехай тепер $\hat{u} = H\hat{p}$, де $\hat{p}$ знаходиться як розв'язок (6), $\hat{\varphi}$ — як розв'язок (7). Безпосереднім обчисленням легко встановити рівність $(\hat{u},y) = (l,\hat{\varphi})$.

Наслідок 3 доведено.

***Доведення твердження* 2.** Запишемо

$$-c(\mathcal{X}_y,-l) \le (l,\psi) \le c(\mathcal{X}_y,l), \qquad \psi\in\mathcal{X}_y,$$

звідки

$$|(l,\psi)| \le \frac{1}{2}\Big(c(\mathcal{X}_y,l)+c(\mathcal{X}_y,-l)\Big), \qquad \psi\in\mathcal{X}_y,$$

відтак

$$\sup_{\psi\in\mathcal{X}_y}|(l,\varphi)-(l,\psi)| = \frac{1}{2}\Big(c(\mathcal{X}_y,l)+c(\mathcal{X}_y,-l)\Big) + \\ + \left|(l,\varphi)-\frac{1}{2}\Big(c(\mathcal{X}_y,l)-c(\mathcal{X}_y,-l)\Big)\right|. \tag{16}$$

Вираз (16) має сенс лише тоді, коли $l\in\operatorname{dom}c(\mathcal{X}_y,\cdot)\bigcap(-1)\operatorname{dom}c(\mathcal{X}_y,\cdot)$. Покажемо, що

$$R(L^*) + R(H^*) \subset \operatorname{dom}c(\mathcal{X}_y,\cdot) \subset \overline{R(L^*) + R(H^*)}.$$

Перше включення є наслідком того, що для довільного $l = L^*z + H^*u$ маємо

$$c(\mathcal{X}_y,l) = \sup_{x\in\mathcal{X}_y}\{(Lx,z)-(u,y-Hx)\} + (u,y) \le c(\mathcal{G},[z,u]) + (u,y) < +\infty$$

внаслідок обмеженості $\mathcal{G}$.

З іншого боку,

$$c(\mathcal{X}_y,l) \ge \sup\{(l,x),\ Lx = 0,\ Hx = 0\} = +\infty$$

для кожного $l\notin\overline{R(L^*) + R(H^*)}$. Отже, вираз (16) не позбавлений сенсу лише тоді, коли виконано умову (8), яку далі вважаємо виконаною. Із (16) видно, що

$$\sup_{\psi\in\mathcal{X}_y}|(l,\varphi)-(l,\psi)| \ge \frac{1}{2}\Big(c(\mathcal{X}_y,l)+c(\mathcal{X}_y,-l)\Big)$$

для довільного $\varphi\in\mathcal{X}_y$ і рівність досягається для

$$(l, \hat{\varphi}) = \frac{1}{2}\Big(c(\mathcal{X}_y, l) - c(\mathcal{X}_y, -l)\Big), \qquad \hat{\varphi} \in \mathcal{X}_y,$$

внаслідок опуклості $\mathcal{G}$ та неперервності скалярного добутку.

Твердження 2 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Припустимо, що оператори $L$, $H$ задовольняють умови теореми. Тоді задача проектування

$$\mathcal{I}(x) = (Lx, Lx) + (y - Hx, y - Hx) \quad \to \quad \min_{x \in \mathcal{D}(L)} \tag{17}$$

має розв'язок $\hat{\varphi}$. Справді, для довільного $y \in \mathcal{Y}$ множина розв'язків (17) є водночас [15, с. 23] сукупністю розв'язків варіаційної рівності

$$-(L\varphi, Lx) + (y - H\varphi, Hx) = 0, \qquad x \in \mathcal{D}(L), \tag{18}$$

яка містить, зокрема, $\hat{\varphi}$-розв'язок сумісної (див. наслідок 2) системи

$$L^*\hat{q} = H^*(y - H\hat{\varphi}),$$
$$L\hat{\varphi} = \hat{q}.$$

Покладемо

$$\mathcal{X}_0 = \big\{x : \mathcal{I}_1(x) + \mathcal{I}(\hat{\varphi}) \le 1\big\}, \qquad \mathcal{I}_1(x) = (Lx, Lx) + (Hx, Hx).$$

Зазначимо, що

$$\mathcal{I}(\hat{\varphi} - x) = \mathcal{I}_1(x) + \mathcal{I}(\hat{\varphi}) - 2(L\hat{\varphi}, Lx) + 2(y - H\hat{\varphi}, Hx) = \mathcal{I}_1(x) + \mathcal{I}(\hat{\varphi})$$

для $x \in \mathcal{D}(L)$ за рівністю (18).

Нехай $x \in \mathcal{X}_0$. Тоді $\mathcal{I}(\hat{\varphi} - x) = \mathcal{I}_1(x) + \mathcal{I}(\hat{\varphi}) \le 1$, відтак

$$\hat{\varphi} + (-1)\mathcal{X}_0 = \hat{\varphi} + \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_y.$$

Навпаки, якщо $x \in \mathcal{X}_y$, то $\tilde{x} := \hat{\varphi} - x \in \mathcal{D}(L)$ і

$$1 \ge \mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(\hat{\varphi} - \tilde{x}) = \mathcal{I}_1(\hat{\varphi} - x) + \mathcal{I}(\hat{\varphi}),$$

тому

$$-x + \hat{\varphi} \in \mathcal{X}_0, \quad x \in \mathcal{X}_y \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}_y \subset \hat{\varphi} + \mathcal{X}_0.$$

Отже,

$$c(\mathcal{X}_y, l) = (l, \hat{\varphi}) + c(\mathcal{X}_0, l).$$

Зауважимо, що

$$c(\mathcal{X}_0, l) = \sup_x \big\{(l, x) - \delta(S^0_\beta, Tx)\big\} = \inf\big\{c(S^0_\beta, [z, u]) \,\big|\, L^*z + H^*u = l\big\}, \tag{19}$$

де $Tx = [Lx, Hx]$, $\delta(S^0_\beta, \cdot)$ — індикатор кулі

$$S^0_\beta = \big\{[p, q] : s(p, q) \le \beta\big\}, \qquad s(p, q) = (p, p) + (q, q), \qquad \beta = 1 - \mathcal{I}(\hat{\varphi}) \ge 0.$$

Справді, за означенням

$$x \in \mathcal{X}_0 \quad \Leftrightarrow \quad s(Tx) \le \beta \quad \Leftrightarrow \quad \delta(S^0_\beta, Tx) \le 0.$$

Отже, опуклий функціонал $x \mapsto \delta T(x) = \delta(S^0_\beta, Tx)$ є індикатором $\mathcal{X}_0$. Оскільки лінійний оператор $T$ і множина $S^0_\beta$ задовольняють умови леми 1, то

$$c(\mathcal{X}_0, \cdot) = (\delta T)^*(\cdot) = T^* c(S^0_\beta, \cdot),$$

де $c(S^0_\beta, w) = (w, w)^{1/2}\beta^{1/2}$ згідно з нерівністю Шварца. Таким чином, згідно з (19) маємо

$$c(\mathcal{X}_y, l) = (l, \hat{\varphi}) + \beta^{1/2}\Big[\inf\Big\{\|z\|^2 + \|u\|^2,\ L^* z + H^* u = l\Big\}\Big]^{1/2}$$

для довільного $l \in \mathcal{H}$. Але $\inf\{\cdot\}$ у правій частині останньої рівності є ні чим іншим, як мінімаксною апріорною похибкою (див. міркування, викладені при розв'язанні задачі оптимізації (15)). Тому

$$c(\mathcal{X}_y, l) = (l, \hat{\varphi}) + \beta^{1/2}\hat{\sigma}(l).$$

Для завершення доведення залишилось зауважити (див. формулу (9)), що

$$\beta = 1 - \mathcal{I}(\hat{\varphi}) = 1 - (y, y - H\hat{\varphi}),$$

і застосувати твердження 2.

***Доведення наслідку* 4.** За теоремою 2

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{X}_y} \sup_{x \in \mathcal{X}_y} \|\varphi - x\| = \inf_{\varphi \in \mathcal{X}_y} \sup_{x \in \mathcal{X}_y} \sup_{\|l\|=1} |(l, \hat{\varphi} - x)| \geq$$

$$\geq \sup_{\|l\|=1} \inf_{\varphi \in \mathcal{X}_y} \sup_{x \in \mathcal{X}_y} \|\varphi - x\| = \sup_{\|l\|=1} \hat{d}(l) = \big(1 - (y, y - H\hat{\varphi})\big)^{1/2} \max_{\|l\|=1} \hat{\sigma}(l).$$

Зрозуміло, що

$$\sup_{x \in \mathcal{X}_y} \|\hat{\varphi} - x\| \geq \inf_{\varphi \in \mathcal{X}_y} \sup_{x \in \mathcal{X}_y} \|\varphi - x\|,$$

звідки згідно з умовами наслідку

$$\sup_{x \in \mathcal{X}_y} \|\hat{\varphi} - x\| = \sup_{\|l\|=1} \sup_{x \in \mathcal{X}_y} |(l, \hat{\varphi} - x)| = \sup_{\|l\|=1} \hat{d}(l) \geq \inf_{\varphi \in \mathcal{X}_y} \sup_{x \in \mathcal{X}_y} \|\varphi - x\|.$$

Наслідок 4 доведено.

***Доведення твердження* 3.** Оператор, породжений [8] лінійним дескрипторним рівнянням з матрицями $F$, $C$, позначимо через $\mathcal{D}$. Оператор $H$ у цьому випадку діє як $Hx = x$. Тоді оператори $\mathcal{D}$, $H$ та множина $\mathcal{G}$ задовольняють умову 2, тому згідно з теоремою 2 мінімаксна апостеріорна оцінка $\hat{x}$ розв'язку $x$ дескрипторного рівняння у напрямку $l$ існує для довільного $l \in$ $\in R(L^*) + R(H^*) = \mathbb{L}_2^n(t_0, T)$ і знаходиться з операторного рівняння

$$\begin{aligned} L^*\hat{q} &= H^*(y - H\hat{x}), \\ L\hat{x} &= \hat{q}. \end{aligned} \tag{20}$$

Апостеріорна похибка задається виразом

$$\hat{d}(l) = \big(1 - (y, y - H\hat{x})\big)^{1/2}(l, \hat{p})^{1/2}.$$

Зазначимо, що (20) еквівалентна системі алгебраїчно-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + q_1(t), \qquad x_1(t_0) = 0, \\ 0 &= C_3 x_1(t) + C_4 x_2(t) + q_2(t), \\ \dot{q}_1(t) &= -C_1' q_1(t) - C_3' q_2(t) + x_1(t) - y_1(t), \qquad q_1(T) = 0, \\ 0 &= -C_2' q_1(t) - C_4' q_2(t) + x_2(t) - y_2(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Справді, зважаючи на блочну структуру матриць $F$, $C$, записуємо $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2)$. Тоді

$$Fx(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F'z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Cx(t) = \begin{pmatrix} C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \\ C_3x_1(t) + C_4x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Тепер, беручи до уваги конкретний вигляд $L$, $L^*$, виводимо еквівалентність (20) та (21).

Запишемо алгебраїчні рівняння з (21) у вигляді

$$\begin{pmatrix} C_4 & E \\ E & -C_4' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_3x_1(t) \\ C_2'q_1(t) + y_2(t) \end{pmatrix},$$

звідки, помноживши попередню рівність зліва на

$$\begin{pmatrix} (E + C_4'C_4)^{-1}C_4' & (E + C_4'C_4)^{-1} \\ E - C_4(E + C_4'C_4)^{-1}C_4' & -C_4(E + C_4'C_4)^{-1} \end{pmatrix},$$

одержимо наведені у твердженні зображення для $x_2$, $q_2$. Вирази для $x_1$, $q_1$ знаходимо підстановкою одержаних зображень у (21).


1. *Наконечний О. Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності // Наук. зап. КНУ ім. Т. Шевченка. – 2004. – **7**. – С. 102 – 111.
2. *Красовский Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
4. *Наконечний О. Г.* Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях з частинними похідними: навч. пос. – ВПЦ “Київ. ун-т”, 2004. – 103 с.
5. *Подлипенко Ю.* Минимаксное оценивание правых частей нетеровых уравнений в гильбертовом пространстве в условиях неопределенности // Доп. НАН України. – 2005. – № 12. – С. 36 – 44.
6. *Бойчук О., Шегда Л.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303 – 312.
7. *Самойленко А., Шкіль М., Яковець В.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
8. *Жук С. М.* Замкненість та нормальна розв’язність оператора, породженого виродженим лінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 4. – С. 464 – 480.
9. *Жук С. М.* Мінімаксні задачі спостереження для лінійних дескрипторних диференціальних рівнянь // Журн. прикл. математики. – 2005. – **2**. – С. 39 – 46.
10. *Жук С. М.* Задачі мінімаксного спостереження для лінійних дескрипторних систем: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2006.
11. *Жук С. М., Демиденко С., Наконечний О. Г.* До проблеми мінімаксного оцінювання розв’язків одновимірних крайових задач // Тавр. вісн. інформатики і математики. – 2007. – **1**. – С. 7 – 24.
12. *Лянце В., Сторож О.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 344 с.
13. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы: Пер. с франц. – М.: Мир, 1979. – 396 с.
14. *Иоффе А., Тихомиров В.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 477 с.
15. *Балакришнан А.* Прикладной функциональный анализ: Пер. с англ. – М.: Наука, 1980. – 384 с.


Одержано 22.05.08