УДК 517.5

Д. С. Скороходов (Днепропетр. нац. ун-т)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО НЕСИММЕТРИЧНОГО (α,β)-СПЛАЙНА, УСРЕДНЕНИЯ КОТОРОГО ПРИНИМАЮТ РАВНЫЕ МИНИМУМЫ В ЗАДАННЫХ ТОЧКАХ

We solve the problem of the existence of an asymmetric spline which is averaged in the Steklov sense and attains equal minimal values at preassigned points.

Розв'язано задачу про існування усередненого за Стєкловим несиметричного сплайна, що набуває однакових мінімальних значень у наперед заданих точках.

Пусть C и L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_p$. Для $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $\mathbf{R}^n_\infty$ пространство $\mathbf{R}^n$, в котором расстояние между точками $x, y \in \mathbf{R}^n_\infty$ находится по правилу

$$\|x - y\| = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Напомним, что сверткой двух функций $K, \varphi \in L_1$ называется функция $K * \varphi$, которая определяется следующим образом:

$$(K * \varphi)(x) := \int_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

При этом функция K называется ядром свертки. Для заданного ядра K положим $\mu = \mu(K) = 1$, если $\int_0^{2\pi} K(t)\,dt = 0$, и $\mu = \mu(k) = 0$, если $\int_0^{2\pi} K(t)\,dt \ne 0$.

Для функций $f, g \in L_1$ обозначим через $f \perp g$ тот факт, что $\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt = 0$.

Будем говорить, что ядро $K \in L_1$ является CVD-ядром (см. [1]), если для любых $a \in \mathbf{R}$ и $\varphi \in C$, $\varphi \perp \mu$, имеет место неравенство

$$\nu(a\mu + K * \varphi) \le \nu(\varphi), \tag{1}$$

где $\nu(g)$ обозначает количество перемен знака функции $g \in C$ на периоде.

Очевидно, что ядра Бернулли D_r (см. [2], § 3.5) являются CVD-ядрами для всех $r \in \mathbf{N}$. Еще одним, но далеко не единственным, важным семейством CVD-ядер является семейство $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ функций, определяемых следующим образом:

$$A_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{\operatorname{ch}(\varepsilon k)}.$$

Как показано в [3], семейство $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ является также дельтаобразным семейством функций при $\varepsilon \to 0$.

Для произвольной измеримой функции g положим

$$g_\pm(t) := \max\{\pm g(t), 0\}.$$

Пусть $\alpha, \beta > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Обозначим через $S^n_{\alpha,\beta}$ множество всех функций f таких, что $\alpha^{-1} f_+(t) - \beta^{-1} f_-(t) \equiv 1$ на периоде, $f \perp 1$ и $\nu(f) \le 2n$. Элементы множества $S^n_{\alpha,\beta}$ будем называть несимметричными (α, β)-сплайнами или просто сплайнами.

Несимметричные (α, β)-сплайны, в частности $(1, 1)$-сплайны, являются исключительно важными функциями, которые нашли многочисленные применения в теории приближений (см., например, [2, 4, 5]). Так, в теории квадратур, как показано в работе [6], вопрос о наилучшей квадратурной формуле на достаточно широком классе функций по существу сводится к решению экстремальной задачи для несимметричных сплайнов.

Пусть $h > 0$. Оператор $S_h \colon L_1 \to C$ такой, что

$$S_h(f)(x) := \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt,$$

называется оператором усреднения по Стеклову. Результат действия этого оператора на функцию $f \in L_1$ будем обозначать через f^h.

Утверждения о существовании функций, принадлежащих некоторому классу и принимающих одинаковые значения в заданных точках,представляют большой интерес для теории квадратур (см., например, [4 – 12]).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha, \beta > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $h \in (0, \pi/n)$ *и* K *— произвольное* CVD*-ядро. Тогда для любого набора чисел* $0 < x_1 < \ldots < x_n < 2\pi$ *существует функция* $f \in S^n_{\alpha,\beta}$ *такая, что для всех* $j = \overline{1, n}$

$$(K * f^h)(x_j) = \min_{t \in [0, 2\pi)} (K * f^h)(t).$$

Для доказательства теоремы 1 применим метод, предложенный в работе [5]. Отметим, что для доказательства подобных утверждений этот метод не является единственным. Существуют методы, опирающиеся на теорему Борсука (см. [13]), а также методы, в которых искомую функцию $f \in S^n_{\alpha,\beta}$ можно найти как решение экстремальной задачи (см., например, [6]). Однако теорему 1 с помощью последних двух методов можно доказать лишь для наперед заданных точек, для которых

$$x_1 < x_2 - 2h < \ldots < x_n - 2(n-1)h < x_1 + 2\pi - 2nh.$$

Реализация метода из работы [5] наталкивается на трудности, связанные с тем, что оператор усреднения по Стеклову не является CVD-ядром. Однако, имеет место некоторое ослабление условия (1) для операторов S_h, которое дается следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha, \beta > 0$, $n \in \mathbf{N}$ *и сплайны* $s_1, s_2 \in S^n_{\alpha,\beta}$ *таковы, что* $\nu(s_1^h) = \nu(s_2^h) = 2n$. *Кроме того, пусть разность* $s_1 - s_2$ *не имеет нулевых экстремумов. Тогда для всех* $h \in (0, \pi/n)$ *и* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\nu(\lambda + s_1^h - s_2^h) \le \nu(s_1 - s_2).$$

Доказательство этой леммы можно провести аналогично доказательству теоремы 7 в работе [14].

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

Везде ниже будем предполагать ядро K аналитическим на действительной оси. Это можно сделать вследствие того факта, что семейство функций $\{A_\varepsilon * K\}_{\varepsilon > 0}$ — совокупность CVD-ядер, являющихся аналитическими на действительной оси и таких, что

$$A_\varepsilon * K \to K \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Пусть $n \in \mathbf{N}$, $h \in (0, \pi / n)$ и $\alpha, \beta > 0$. Обозначим через KN_n множество функций f, представимых в виде

$$f = K * g^h + a,$$

где $g \in S^n_{\alpha,\beta}$, $a \in \mathbf{R}$ и f имеет ровно $2n$ экстремумов на периоде. Множество KN_n непусто, так как в силу (1) $K * w^h \in KN_n$ для произвольной $2\pi/n$-периодической функции $w \in S^n_{\alpha,\beta}$.

Для сплайна $f \in S^n_{\alpha,\beta}$ через

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{2n} < \xi_1 + 2\pi$$

обозначим его узлы, пронумерованные таким образом, что $f(t) \equiv \alpha$ при $t \in (\xi_1, \xi_2)$. Поскольку $f \perp 1$, несложно видеть, что

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \xi_j = \frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta}.$$

Следовательно, произвольная система точек $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{2n} < \xi_1 + 2\pi$, для которой

$$\frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta} - \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^j \xi_j < \xi_1 + 2\pi,$$

однозначно определяет некоторый сплайн $f \in S^n_{\alpha,\beta}$. Обозначим такую систему точек через ξ $\left(\xi_j = \{\xi_j\}_{j=1}^{2n-1}\right)$ и назовем ее определяющей системой для сплайна f. Сплайн, соответствующий системе точек ξ, обозначим через f_ξ. Для заданной определяющей системы ξ положим

$$\xi_{2n} = \frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta} - \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^j \xi_j \quad \text{и} \quad \xi_{2n+1} = \xi_1 + 2\pi.$$

Пусть $U_\rho(\xi)$ — замкнутый шар с центром в точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n-1})$ радиуса $\rho > 0$ в пространстве $\mathbf{R}^{2n-1}_\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $\xi \in \mathbf{R}^{2n-1}$ *— определяющая система для сплайна* $f_\xi \in S^n_{\alpha,\beta}$. *Тогда найдется* $\rho > 0$ *такое, что произвольная точка* $\eta \in U_\rho(\xi)$ *будет определяющей системой для некоторого сплайна* $f_\eta \in S^n_{\alpha,\beta}$.

Доказательство этой леммы можно провести аналогично доказательству леммы 3.2 из [5].

Пусть сплайн $f \in S^n_{\alpha,\beta}$ таков, что $K * f^h \in KN_n$, и ξ — его определяющая система. Для такого сплайна обозначим через ${}_1\xi < {}_2\xi < \ldots < {}_n\xi < {}_1\xi + 2\pi$ те точки, в которых функция $K * f^h$ достигает своих локальных минимумов. В силу аналитичности на действительной оси и, следовательно, ограниченности ядра K найдется достаточно малое число $\rho > 0$, при котором $K * f^h_\eta \in KN_n$ для всех $\eta \in U_\rho(\xi)$. Рассмотрим произвольный интервал $(a, a + 2\pi)$, содержащий точки ${}_1\eta < {}_2\eta < \ldots < {}_n\eta$. Ясно, что число ρ можно выбрать таким образом, чтобы для любого $\eta \in U_\rho(\xi)$ точки ${}_1\xi < {}_2\xi < \ldots < {}_n\xi$, в которых функция $K * f_\eta^h$ достигает своих локальных минимумов, также принадлежали интервалу $(a, a + 2\pi)$.

Отображение $\tau : U_\rho(\xi) \to \mathbf{R}^{2n-1}$ определим следующим образом. Для каждой точки $\eta \in U_\rho(\xi)$ положим

$$\tau(\eta) = \left\{ {}_1\eta, \ldots, {}_n\eta, (K * f_\eta^h)({}_2\eta) - (K * f_\eta^h)({}_1\eta), \ldots, (K * f_\eta^h)({}_n\eta) - (K * f_\eta^h)({}_1\eta) \right\}.$$

Несложно убедиться в том, что отображение τ будет непрерывным.

Лемма 3. *Существует* $\rho' \in (0, \rho)$ *такое, что сужение отображения* τ *на шар* $U_{\rho'}(\xi)$ *является инъективным отображением.*

Доказательство. Пусть $a \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{2n} < a + 2\pi$ — точки, в которых функция $K * f_\xi^h$ достигает своих локальных экстремумов. Положим

$$m_j := (K * f_\xi^h)(t_j), \qquad j = \overline{1, 2n}.$$

Через w_0 обозначим наименьшее число, удовлетворяющее равенству

$$\omega(K * f_\xi^h; w) = \frac{1}{2} \min_{j = \overline{1,2n}} \left| m_{j+1} - m_j \right|,$$

где $m_{2n+1} = m_1$ и $\omega(g; t)$ — модуль непрерывности функции $g \in C$.

Пусть $\theta := \dfrac{1}{4n} \min\limits_{j=\overline{1,2n}} \left| \xi_{j+1} - \xi_j \right|$. Для каждого $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{8} \min\limits_{j=\overline{1,2n}} \left| m_{j+1} - m_j \right| \right)$ число ρ' выберем таким образом, чтобы $\rho' < \min\left\{ \rho; \dfrac{w_0}{2}; \dfrac{\theta}{2} \right\}$ и для произвольного $\eta \in U_{\rho'}(\xi)$ расстояние между функциями $K * f_\eta^h$ и $K * f_\xi^h$ в L_∞-метрике не превышало ε. Из определения чисел ε и w_0 следует, что расстояние между точками, в которых функция $K * f_\eta^h$, $\eta \in U_{\rho'}(\xi)$, достигает своих локальных экстремумов, не меньше w_0.

Покажем, что сужение отображения τ на $U_{\rho'}(\xi)$ будет инъективным отображением.

Предположим противное, т. е. найдутся две точки η, $\zeta \in U_{\rho'}(\xi)$, $\eta \ne \zeta$, такие, что $\tau(\eta) = \tau(\zeta)$. Поскольку f_η и f_ζ принадлежат множеству KN_n, несложно видеть, что

$$\nu(f_\eta^h) = \nu(f_\zeta^h) = 2n. \tag{2}$$

Пусть $a < {}_1\eta < \ldots < {}_n\eta < a + 2\pi$ и $a < {}_1\zeta < \ldots < {}_n\zeta < a + 2\pi$ — точки, в которых функции $K * f_\eta^h$ и $K * f_\zeta^h$ достигают своих локальных минимумов соответственно. Тогда, в силу предположения, ${}_j\eta = {}_j\zeta$ и

$$(K * f_\eta^h)({}_j\eta) - (K * f_\eta^h)({}_1\eta) = (K * f_\zeta^h)({}_j\zeta) - (K * f_\zeta^h)({}_1\zeta)$$

для всех $j = \overline{1, n}$.

Без ограничения общности можем считать, что $|\zeta_1 - \eta_1| = \|\zeta - \eta\|$. Положим $u := \zeta_1 - \eta_1$ и рассмотрим функцию $f_\eta(t - u)$. Дальнейшие исследования проведем для случая $u > 0$ (случай $u < 0$ рассматривается аналогично).

Очевидно, что система $\{\zeta_1, \eta_2 + u, \ldots, \eta_{2n-1} + u\}$ является определяющей системой для сплайна $f_\eta(t-u)$. Поскольку $|u| \le 2\rho' < 2\theta$, имеют место неравенства

$$\zeta_1 < \zeta_2 \le \eta_2 + u < \zeta_3 \le \eta_3 + u < \ldots < \zeta_{2n-1} \le \eta_{2n-1} + u < \eta_{2n} + u \le \zeta_{2n}.$$

Из этой цепочки неравенств следует, что функция $f_\eta(t-u) - f_\zeta(t)$ имеет не более $2n-1$ перемен знака на периоде и все ее экстремумы не являются нулевыми. Положим

$$g_1(t) := (K * f_\eta^h)(t-u) - (K * f_\eta^h)({}_1\eta),$$

$$g_2(t) := (K * f_\zeta^h)(t) - (K * f_\zeta^h)({}_1\eta).$$

Покажем, что разность $g_1(t) - g_2(t)$ имеет не меньше двух перемен знака на каждом интервале $[{}_j\eta, {}_{j+1}\eta]$, $j = \overline{1,n}$. Действительно, так как $|u| \le 2\rho' < 2w_0$, то

$$g_1({}_j\eta) - g_2({}_j\eta) > 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Кроме того,

$$g_1({}_j\eta + u) - g_2({}_j\eta + u) < 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Таким образом,

$$\nu(g_1 - g_2) \ge 2n. \tag{3}$$

В случае, когда $\mu = \mu(K) = 1$, получаем

$$\nu(g_1 - g_2) = \nu\Big((K * f_\zeta^h)({}_1\eta) - (K * f_\eta^h)({}_1\eta) + (K * f_\eta^h)(\cdot - u) - (K * f_\zeta^h)(\cdot)\Big) \le$$

$$\le \nu\Big(f_\eta^h(\cdot - u) - f_\zeta^h(\cdot)\Big).$$

В силу равенства (2) видно, что условия леммы 1 выполнены для функций $f_\eta(t-u)$ и $f_\zeta(t)$. Следовательно,

$$\nu(g_1 - g_2) \le \nu\Big(f_\eta^h(\cdot - u) - f_\zeta^h(\cdot)\Big) \le \nu\Big(f_\eta(\cdot - u) - f_\zeta(\cdot)\Big) \le 2n - 2.$$

Однако это противоречит неравенству (3).

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu = \mu(K) = 0$. Пусть $\lambda \in \mathbf{R}$ — такое число, что $\lambda\int_0^{2\pi} K(t)dt = (K * f_\zeta^h)({}_1\eta) - (K * f_\eta^h)({}_1\eta)$. В этом случае

$$\nu(g_1 - g_2) = \nu\Big((K * f_\zeta^h)({}_1\eta) - (K * f_\eta^h)({}_1\eta) + (K * f_\eta^h)(\cdot - u) - (K * f_\zeta^h)(\cdot)\Big) \le$$

$$\le \nu\Big(f_\eta^h(\cdot - u) - f_\zeta^h(\cdot) + \lambda\Big).$$

С учетом леммы 1 и того факта, что $f_\eta(t-u) - f_\zeta(t)$ имеет не более $2n-2$ ненулевых локальных экстремума, получаем

$$\nu(g_1 - g_2) \le \nu\Big(f_\eta^h(\cdot - u) - f_\zeta^h(\cdot) + \lambda\Big) \le \nu\Big(f_\eta(\cdot - u) - f_\zeta(\cdot)\Big) \le 2n - 2.$$

Однако это снова противоречит неравенству (3). Следовательно, сужение отображения τ на $U_{\rho'}(\xi)$ будет инъективным, что и завершает доказательство леммы.

Таким образом, из леммы 3 и непрерывности отображения τ следует, что τ — гомеоморфизм из $U_{\rho'}(\xi)$ в $\mathbf{R}^{2n-1}$.

Пусть E — множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ таких, что $0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < 2\pi$. Очевидно, что E — связное множество. Пусть E_0 — такое подмножество множества E, что для каждой точки $x \in E_0$ найдется сплайн $f \in S^n_{\alpha,\beta}$, для которого $K * f^h \in KN_n$ и $K * f^h$ достигает своих локальных минимумов в точках $0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Множество E_0 не пусто, так как оно содержит точку $\left(\frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$. Действительно, для произвольной $\frac{2\pi}{n}$-периодической функции $K * f^h \in KN_n$ можно выбрать число b такое, что функция $K * f^h(\cdot + b)$ достигает своих локальных минимумов в точках $\frac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Лемма 4. *Множество* E_0 *— открытое подмножество множества* E.

Доказательство. В силу определения множества E_0 для произвольной точки $x \in E_0$ найдется сплайн $f \in S^n_{\alpha,\beta}$ такой, что функция $K * f^h$ достигает своих локальных минимумов в точках $0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Пусть ξ — определяющая система для сплайна f. В силу леммы 3 существует замкнутый шар $U_{\rho'}(\xi)$ такой, что отображение $\tau : U_{\rho'}(\xi) \to \mathbf{R}^{2n-1}$ будет гомеоморфизмом. Тогда по теореме об инвариантности открытого множества (см. [15]) следует, что точка $\tau(\xi) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ будет внутренней точкой множества $\tau(U_{\rho'}(\xi))$. Следовательно, найдется окрестность $U(x)$ точки x такая, что для произвольной точки $y \in U(x)$

$$(0, y_1, \ldots, y_{n-1}, 0, \ldots, 0) \in \tau(U_{\rho'}(\xi)).$$

Таким образом, найдется точка $\eta \in U_{\rho'}(\xi)$ такая, что $\tau(\eta) = (0, y_1, \ldots \ldots, y_{n-1}, 0, \ldots, 0)$. Это и завершает доказательство леммы.

Лемма 5. *Множество* E_0 *является замкнутым подмножеством в* E.

Доказательство. Пусть $x \in E$ и последовательность $\{x^m\}_{m=1}^{\infty} \subset E_0$ сходится к элементу x при $m \to \infty$. По определению множества E_0 для каждой точки x^m найдется сплайн $f_m \in S^n_{\alpha,\beta}$ с определяющей системой $\xi^m = \{\xi_j^m\}_{m=1}^{2n-1}$ такой, что

$$(K * f_m^h)(0) = (K * f_m^h)(x_j^m),$$

$$(K * f_m^h)'(0) = (K * f_m^h)'(x_j^m), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Несложно увидеть, что найдется подпоследовательность $\{\xi^{m_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\xi \in \mathbf{R}^{2n-1}$ при $k \to \infty$. Очевидно, что ξ — определяющая система для сплайна $f \in S^n_{\alpha,\beta}$. Следовательно, $\left\| f_{m_k} - f \right\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, последовательность $\{K * f_{m_k}^h\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $K * f$, а последовательность $\left\{(K * f_{m_k}^h)'\right\}_{k=1}^{\infty}$ — к $(K * f)'$. Отсюда следует, что

$$(K * f_{m_k}^h)(x_j^{m_k}) \to (K * f^h)(x_j) \quad \text{и} \quad (K * f_{m_k}^h)'(x_j^{m_k}) \to (K * f^h)'(x_j)$$

при $k \to \infty$ для всех $j = \overline{1, n-1}$ и

$$(K * f_{m_k}^h)(0) \to (K * f^h)(0) \quad \text{и} \quad (K * f_{m_k}^h)'(0) \to (K * f^h)'(0)$$

при $k \to \infty$. Таким образом,

$$(K * f^h)(x_j) = (K * f^h)(0),$$

$$(K * f^h)'(x_j) = (K * f^h)'(0) = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

и функция $K * f^h$ достигает равных локальных минимумов в точках $0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}$. Это и завершает доказательство леммы.

Итак, мы доказали, что подмножество E_0 непустое, открытое и замкнутое в связном множестве E. Это означает, что $E_0 = E$. Следовательно, теорема 1 доказана.

Автор выражает благодарность В. Ф. Бабенко за помощь в обсуждении данной работы.

1. *Karlin S.* Total positivity. – Stanford Univ. Press, 1968.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207 – 256.
4. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы на некоторых классах функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**. – С. 913 – 926.
5. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ на некоторых классах периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **38**. – С. 583 – 614.
6. *Babenko V. F.* Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrangement invariant sets of derivatives // Anal. Math. – 1987. – **13**. – P. 15 – 28.
7. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // Докл. АН СССР. – 1983. – **272**. – С. 1038 – 1041.
8. *Бабенко В. Ф.* О задаче оптимизации приближенного интегрирования // Изучение современных вопросов суммирования и приближения функций и их приложение. – Днепропетровск, 1984. – С. 3 – 13.
9. *Женсыкбаев А. А.* Наилучшая квадратурная формула на некоторых классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**. – С. 1110 – 1124.
10. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**. – С. 107 – 159.
11. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988.
12. *Motornyi V. P.* On the best quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative // E. J. Approxim. – 1998. – **4**. – P. 459 – 478.
13. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971.
14. *Бабенко В. Ф., Скороходов Д. С.* Об оптимальных интервальных квадратурных формулах на классах периодических дифференцируемых функций // Вестн. Днепропетр. ун-та. Математика. – 2007. – **8**. – С. 16 – 25.
15. *Александров П. С.* Комбинаторная топология. – М., 1956.

Получено 15.05.08