УДК 517.538

А. Г. Бакан (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПОЛНОТЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$

We prove that the theorem on polynomial incompleteness in the space C_w^0 established by Lui de Branges in 1959 fails to be true for the space $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ provided that the support of the measure μ is sufficiently dense.

Доведено, що встановлена Луї де Бранжем у 1959 році теорема про поліноміальну неповноту у просторі C_w^0 не є правильною для простору $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, якщо носій міри μ є достатньо щільним.

1. Предварительные сведения и основной результат. ***1.1. Теорема де Бранжа.*** Пусть $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ обозначает конус конечных борелевских мер на действительной оси $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ — множество мер $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ со всеми конечными моментами $s_n(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$, $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, и неограниченным носителем $\operatorname{supp}\mu := \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : \mu(x-\varepsilon, x+\varepsilon) > 0\}$, $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ — множество мер $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, для которых $\operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$, $C(\mathbb{R})$ — линейное пространство всех действительнозначных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, $\mathcal{P}$ — множество всех алгебраических многочленов с действительными коэффициентами, $\mathcal{P}^s[D]$ — множество тех многочленов из $\mathcal{P}$, все корни которых простые и принадлежат множеству $D \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — семейство борелевских подмножеств $\mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{P}}$ — совокупность линейных топологических пространств действительнозначных функций на $\mathbb{R}$, для которых $\mathcal{P}$ является плотным подмножеством, и $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ — множество полунепрерывных сверху функций $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ с $\|x^n\|_w < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, где $\|f\|_w := \sup_{x \in \mathbb{R}} w(x)|f(x)|$. Для $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ пространство C_w^0 определяется как линейное множество всех функций $f \in C(\mathbb{R})$, для которых $\lim_{|x| \to \infty} w(x) f(x) = 0$, оснащенное полунормой $\|\cdot\|_w$. В этом смысле функции $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ также называются *весами*. Если $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ и $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то сужением меры μ на множество D называется мера $\mu\restriction_D$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ по формуле $\mu\restriction_D(A) := \mu(A \cap D)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Для целой функции f определим $M_f(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$, $r \geq 0$, и пусть Λ_f обозначает множество всех нулей f. Говорят, что f имеет *минимальный экспоненциальный тип,* если $\overline{\lim}_{r \to +\infty} r^{-1} \log M_f(r) = 0$. Обозначим через $\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[D]$ семейство действительных на действительной оси трансцендентных целых функций f минимального экспоненциального типа, все корни которых простые и принадлежат множеству $D \subset \mathbb{R}$, а через $\mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[D]$ множество тех

$f \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[D]$, для которых $\lim_{|\lambda|\to\infty, \lambda\in\Lambda_f} |\lambda|^m / |f'(\lambda)| = 0$ при любом $m \in \in \mathbb{N}_0$.

В 1924 г. С. Н. Бернштейн [1] сформулировал проблему о нахождении условий на вес $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, при которых алгебраические многочлены плотны в пространстве C_w^0. В 1959 г. Луи де Бранж получил решение этой проблемы [2] (см. также [3 – 5]), которое в 1996 г. было модифицировано М. Л. Содиным и П. М. Юдитским [6] и формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема А. *Пусть для* $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ *множество* $S_w := \{x \in \mathbb{R} \mid w(x) > 0\}$ *является неограниченным. Алгебраические многочлены* $\mathcal{P}$ *плотны в* C_w^0 *тогда и только тогда, когда для любой функции* $B \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[S_w]$ *имеет место*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_B} \frac{1}{w(\lambda)|B'(\lambda)|} = +\infty. \tag{1}$$

Рассмотрим условие (1) более подробно. Если $f \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[S_w] \setminus \mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[S_w]$, то существует такое $m_0 \in \mathbb{N}_0$, что $\overline{\lim}_{|\lambda|\to\infty, \lambda\in\Lambda_f} |\lambda|^{m_0} / |f'(\lambda)| > 0$, и потому из определения класса $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ получаем $\underline{\lim}_{|\lambda|\to\infty, \lambda\in\Lambda_f} w(\lambda)|f'(\lambda)| = 0$, т. е. равенство (1) верно для $B = f$. Таким образом, требование $B \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[S_w]$ в теореме А можно заменить эквивалентным $B \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[S_w]$.

Предположим, что множество S_w дискретно и существует такая функция $E \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]$, что $S_w = \Lambda_E$. Тогда из выполнения (1) для $B = E$ следует, что для любой целой функции G, удовлетворяющей требованию $E/G \in \mathcal{P}$, $G \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]$ и выполняется условие (1) для $B = G$.

Действительно, так как $E(z)/G(z) = P(z) = p_0 z^n + \ldots + p_n$, где $n \in \mathbb{N}$, $p_k \in \in \mathbb{R}$, $0 \le k \le n$, $p_0 \ne 0$, то $G(z) = E(z)/P(z)$ и существует такое число $R \ge 1$, что $|P(z)| \ge 2^{-1}|p_0||z|^n$ для произвольного $z \in \mathbb{C}$, $|z| \ge R$. Поэтому $\log M_G(r) \le \log M_E(r) - \log|p_0|/2 - n\log r$ при $r \ge R$ и, значит, G имеет минимальный экспоненциальный тип. Таким образом, $G \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]$. Кроме того, поскольку внутри круга $U_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ находится конечное число нулей функции E и $\Lambda_P \subset U_R$, то

$$\infty = \sum_{\lambda\in\Lambda_E\setminus U_R} \frac{1}{w(\lambda)|E'(\lambda)|} = \sum_{\lambda\in\Lambda_G\setminus U_R} \frac{1}{w(\lambda)|G'(\lambda)||P(\lambda)|} \le$$

$$\le \sum_{\lambda\in\Lambda_G\setminus U_R} \frac{2}{w(\lambda)|G'(\lambda)||p_0||\lambda|^n} \le \frac{2}{|p_0|} \sum_{\lambda\in\Lambda_G\setminus U_R} \frac{2}{w(\lambda)|G'(\lambda)|} \le$$

$$\le \frac{2}{|p_0|} \sum_{\lambda\in\Lambda_G} \frac{2}{w(\lambda)|G'(\lambda)|},$$

т. е. условие (1) выполняется для $B = G$.

Это означает, что для выполнения $C_w^0 \in \overline{\mathcal{P}}$ осталось потребовать выполнения (1) для всех целых функций из множества $\mathcal{D}_0[\Lambda_E]$, где

$$\mathcal{D}_0[D] := \left\{ g \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[D] \,\middle|\, \operatorname{card}(D \setminus \Lambda_g) = \infty \right\}, \quad D \subset \mathbb{R}, \tag{2}$$

и $\operatorname{card} A \in \mathbb{N}_0 \bigcup \{\infty\}$ обозначает количество элементов множества А. Множество $\mathcal{D}_0[\Lambda_E]$ имеет специальное свойство

$$g \in \mathcal{D}_0[\Lambda_E] \quad \Rightarrow \quad P(z)g(z) \in \mathcal{D}_0[\Lambda_E] \quad \forall P \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}}[\Lambda_E \setminus \Lambda_g], \tag{3}$$

причем степени полиномов из множества $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}[\Lambda_E \setminus \Lambda_g]$ не ограничены сверху. Поэтому выполнение (1) для $B = g \in \mathcal{D}_0[\Lambda_E]$ влечет

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_g} \frac{1}{(1+|\lambda|)^m w(\lambda) |g'(\lambda)|} = +\infty \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

что в силу неравенства $\sum_{\lambda \in \Lambda_g} 1 / \left(1+|\lambda|\right)^{1+\varepsilon} < \infty, \ \varepsilon > 0,$ эквивалентно

$$\varliminf_{\lambda \in \Lambda_g, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^m w(\lambda) |g'(\lambda)| = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

или, что то же самое,

$$\varliminf_{\lambda \in \Lambda_g, |\lambda| \to \infty} \frac{\log\left(w(\lambda) |g'(\lambda)|\right)}{\log |\lambda|} = -\infty. \tag{4}$$

Если же S_w не совпадает с множеством нулей ни одной из функций множества $\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]$, то множество $S_w \setminus \Lambda_B$ бесконечно для любой функции $B \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[S_w]$, и потому в этом случае

$$B \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[S_w] \ \Rightarrow \ B \in \mathcal{D}_0[S_w] \Rightarrow \ PB \in \mathcal{D}_0[S_w] \quad \forall P \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}}[S_w \setminus \Lambda_B], \tag{5}$$

откуда точно так же, как и выше, получаем, что условие (1) можно заменить эквивалентным условием (4) с $g = B$. Таким образом, мы доказали следующую модифицированную форму теоремы А.

Теорема B. *Пусть для* $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ *множество* $S_w := \{x \in \mathbb{R} \,|\, w(x) > 0\}$ *является неограниченным. Алгебраические многочлены* $\mathcal{P}$ *плотны в* C_w^0 *тогда и только тогда, когда*

а) $$\varlimsup_{\substack{\lambda \in \Lambda_F \\ |\lambda| \to \infty}} \frac{\log \frac{1}{w(\lambda)} - \log |F'(\lambda)|}{\log |\lambda|} = +\infty \qquad \forall F \in \mathcal{D}_0[S_w]$$

и

б) $$\sum_{\lambda \in \Lambda_E} \frac{1}{w(\lambda) |E'(\lambda)|} = \infty,$$

если существует такая функция $E \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]$, *что* $S_w = \Lambda_E$.

1.2. Основной результат. Для любого веса $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ с неограниченным S_w из теоремы А следует утверждение

$$C_w^0 \not\subset \overline{\mathcal{P}} \ \Leftrightarrow \ \exists B \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[S_w]: \quad C_{w\chi_{\Lambda_B}}^0 \not\subset \overline{\mathcal{P}}, \tag{6}$$

где χ_D обозначает индикаторную функцию множества $D \subset \mathbb{R}$. Иными словами, из неполноты алгебраических полиномов в пространстве C_w^0 следует их неполнота на сужении этого пространства на достаточно редкое множество, являющееся множеством всех нулей некоторой целой функции минимального экспоненциального типа со всеми простыми нулями, принадлежащими множеству S_w. Подобное свойство для пространств $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ было установлено в 1998 г. А. А. Боричевым и М. Л. Содиным [7] в случае, когда мера μ дискретна и ее носитель удовлетворяет условию

$$\exists\, \beta > 0: \ \operatorname{card}\big([-r, r] \cap \operatorname{supp}\mu\big) = O(r^{\beta}), \quad r \to +\infty. \tag{7}$$

Именно, из теоремы A и утверждения A1.5 [7, с. 225, 255] вытекает такое следствие.

***Следствие* A.** *Пусть* $1 \le p < \infty$, *мера* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ *дискретна и ее носитель* $\operatorname{supp}\mu$ *удовлетворяет условию* (7). *Алгебраические полиномы* $\mathcal{P}$ *не плотны в пространстве* $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ *тогда и только тогда, когда существует такая целая функция* $E \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{H}}[\operatorname{supp}\mu]$, *что алгебраические полиномы* $\mathcal{P}$ *не плотны в пространстве* $L_p(\mathbb{R}, d\mu\lceil_{\Lambda_E})$.

Покажем, как этот результат вытекает из следующей теоремы, доказанной в [8, с. 38] (теорема 2.1).

Теорема C. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ *и* $1 \le p < \infty$. *Алгебраические полиномы* $\mathcal{P}$ *плотны в пространстве* $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ *тогда и только тогда, когда существуют такая мера* $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ *и вес* $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, *что* $C_w^0 \in \overline{\mathcal{P}}$ *и* $d\mu = w^p d\nu$, *т. е.* $\mu(A) = \int_A w(x)^p d\nu(x)$ *для любого множества* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим произвольную *дискретную* меру $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$, определенную формулой

$$d\mu(x) = \sum_{\lambda \in S_\mu} \mu_\lambda \delta(x - \lambda), \quad x \in \mathbb{R},$$

где множество $S_\mu := \operatorname{supp}\mu$ счетно и неограничено. Если $1 \le p < \infty$, то в силу теоремы C имеем $L_p(\mathbb{R}, d\mu) \in \overline{\mathcal{P}}$ тогда и только тогда, когда существуют такая мера $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ и вес $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, что $C_w^0 \in \overline{\mathcal{P}}$ и

$$d\nu(x) = \sum_{\lambda \in S_\mu} \nu_\lambda \delta(x - \lambda), \qquad w(x) := \sum_{\lambda \in S_\mu} w_\lambda \chi_{\{\lambda\}}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{\lambda \in S_\mu} \nu_\lambda < \infty, \qquad \mu_\lambda = w_\lambda^p \nu_\lambda, \quad w_\lambda, \mu_\lambda > 0, \quad \lambda \in S_\mu.$$

Применяя к весу w теорему B, имеем

$$L_p(\mathbb{R}, d\mu) \in \overline{\mathcal{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \{\nu_\lambda\}_{\lambda \in S_\mu := \operatorname{supp}\mu} \subset (0, +\infty): \quad \sum_{\lambda \in S_\mu} \nu_\lambda < \infty, \tag{8.1}$$

$$\varlimsup_{\substack{\lambda \in \Lambda_F \\ |\lambda| \to \infty}} \frac{\log \dfrac{1}{\mu_\lambda} - \log \dfrac{1}{\nu_\lambda} - p \log |F'(\lambda)|}{\log |\lambda|} = +\infty \quad \forall F \in \mathcal{D}_0[S_\mu], \tag{8.2}$$

$$\sum_{\lambda \in S_\mu} \frac{\nu_\lambda^{1/p}}{\mu_\lambda^{1/p} |E'(\lambda)|} = +\infty, \quad \text{если} \quad \exists E \in \mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]: S_\mu = \Lambda_E. \tag{8.3}$$

Заметим, что в этих условиях можно требовать существование суммируемых положительных последовательностей в (8.2) и (8.3) отдельно, так как если две положительные суммируемые последовательности $\{\nu_\lambda^j\}_{\lambda \in S_\mu}$ удовлетворяют условиям (8.2), (8.3), то последовательность $\nu_\lambda := \max\{\nu_\lambda^b, \nu_\lambda^c\}$, $\lambda \in S_\mu$, будет удовлетворять условиям (8.1) – (8.3). Более того, вследствие известных свойств последовательностей из l^p (см. [9], гл. 4, п. 4.4, гл. 7, § 1, теорема 1)

$$\sum_{\lambda\in S_\mu}\frac{\nu_\lambda^{1/p}}{\mu_\lambda^{1/p}|E'(\lambda)|} < \infty \quad \forall\{\nu_\lambda\}_{\lambda\in S_\mu}\subset(0,+\infty), \qquad \sum_{\lambda\in S_\mu}\nu_\lambda < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in S_\mu}\frac{1}{\mu_\lambda^{1/(p-1)}|E'(\lambda)|^{p/(p-1)}} < \infty, \quad \text{если} \quad 1 < p < \infty,$$

и

$$\varliminf_{\substack{\lambda\in\Lambda_E\\|\lambda|\to\infty}} \mu_\lambda|E'(\lambda)| > 0, \quad \text{если} \quad p = 1,$$

и потому левую часть условия (8.3) можно заменить равенствами

$$\sum_{\lambda\in S_\mu}\frac{1}{\mu_\lambda^{1/(p-1)}|E'(\lambda)|^{p/(p-1)}} = \infty, \quad \text{если} \quad 1 < p < \infty;$$
$$\varliminf_{\substack{\lambda\in\Lambda_E\\|\lambda|\to\infty}} \mu_\lambda|E'(\lambda)| = 0, \quad \text{если} \quad p = 1, \tag{8.4}$$

которые уже не зависят от последовательности $\{\nu_\lambda\}_{\lambda\in S_\mu}$. Из оставшихся условий (8.1) и (8.2) получаем $\lim_{\lambda\in S_\mu,|\lambda|\to\infty}\nu_\lambda = 0$ и можем заменить требование $\nu_\lambda > 0$ в (8.1) эквивалентным требованием $\nu_\lambda \geq \gamma_\lambda$ с любой фиксированной положительной и суммируемой последовательностью $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda\in S_\mu}$. Если мера μ удовлетворяет условию (7), то можно положить $\gamma_\lambda = (1+|\lambda|)^{-\beta-1}$. Тогда для достаточно больших $\lambda\in\Lambda_F$ будем иметь неравенства

$$0 > -\log\frac{1}{\nu_\lambda} \geq -\log\frac{1}{\gamma_\lambda} = -(1+\beta)\log(1+|\lambda|),$$

подстановка которых в условие (8.2) дает возможность утверждать, что оно не зависит от выбора последовательности $\{\nu_\lambda\}_{\lambda\in S_\mu}$. Теперь можно сформулировать теорему, которая является небольшой модификацией теоремы A и утверждения A1.5 из [7, с. 225, 255].

Теорема D. *Пусть* $1 \leq p < \infty$, *мера* $\mu\in\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ *дискретна и ее носитель* $S_\mu := \operatorname{supp}\mu$ *удовлетворяет условию* (7). *Алгебраические полиномы* $\mathcal{P}$ *плотны в пространстве* $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\varlimsup_{\substack{\lambda\in\Lambda_F\\|\lambda|\to\infty}}\frac{\log\frac{1}{\mu_\lambda} - p\log|F'(\lambda)|}{\log|\lambda|} = +\infty \quad \forall F\in\mathcal{D}_0[S_\mu], \tag{9}$$

и выполняется соответствующее равенство (8.4), *если существует такая целая функция* $E\in\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]$, *что* $\Lambda_E = S_\mu$.

Следствие A очевидным образом вытекает из теоремы D. Если дискретная мера $\mu\in\mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ не удовлетворяет условию (7), то условие (8.3) становится ненужным, и поэтому критерий $L_p(\mathbb{R}, d\mu)\in\overline{\mathcal{P}}$ будет состоять только из условий (8.1), (8.2).

Главным результатом настоящей работы является следующая теорема, которая показывает, что следствие A, вообще говоря, уже невозможно обобщить на меры, не удовлетворяющие условию (7), и потому для дискретных мер с более плотным носителем следствие A перестает быть верным в пространствах

$L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $2 \le p < \infty$. Для формулировки теорем введем несколько новых обозначений.

Для счетного множества $A \subset (0, +\infty)$ и функции

$$\psi(x) := \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \sum_{m\ge1} \frac{(\sqrt{2\pi})^m e^{-mx^{1/4m}}}{\sqrt{m}\, m!}, \quad x \ge 0, \tag{10}$$

определим дискретную меру μ_A по формуле

$$d\mu_A(x) := \sum_{\lambda\in A} \lambda e^{-\lambda} \psi(\lambda)\, \delta(x-\lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

и обозначим $n_A(r) := \operatorname{card}\{\lambda \in A \mid \lambda \le r\}$, $r \ge 0$.

Теорема 1. *Пусть* $L := \{\log k\}_{k\ge2}$, $A \subset L$, *функция* ψ *и мера* μ_A *определены формулами* (10) *и* (11) *соответственно. Тогда* $\mu_A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ *и если существуют такие положительные постоянные* a, C_a, *что* $n_A(r) \le C_a e^{r-a\sqrt{r}}$ *для всех* $r \ge 0$, *то* $L_p(\mathbb{R}, d\mu_A) \in \overline{\mathcal{P}}$ *для каждого* $1 \le p < \infty$. *В то же время* $L_p(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-m} d\mu_L) \notin \overline{\mathcal{P}}$ *для любого* $2 \le p < \infty$ *и* $m \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что мера μ_L уже не удовлетворяет условию (7), так как $\operatorname{card}([-r, r] \cap \operatorname{supp} \mu_L) \ge e^r - 2$ при $r \ge \log 2$.

2. Вспомогательные результаты. Для доказательства теоремы 1 необходимо напомнить некоторые известные результаты о проблеме моментов. Каждой мере $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ ставится в соответствие множество $V_\mu (V_\mu^+)$ всех тех мер $\nu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ $(\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+))$, для которых $s_n(\nu) = s_n(\mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Проблема моментов Гамбургера (Стильтьеса) состоит в нахождении для последовательности действительных чисел $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ таких мер $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ $(\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+))$, что $s_n(\mu) = \gamma_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Если решение существует и не является единственным, то говорят, что соответствующая проблема моментов является *неопределенной.* Меры μ, решающие такие проблемы, также называются *неопределенными.* Другими словами, мера $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R})$ $(\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+))$ называется *неопределенной* в смысле Гамбургера (Стильтьеса) (сокращенно $\mu \in \operatorname{indet}\mathcal{H}$ $(\operatorname{indet}\mathcal{S})$), если $V_\mu \setminus \{\mu\} \ne \varnothing$ $(V_\mu^+ \setminus \{\mu\} \ne \varnothing)$, и *определенной* в смысле Гамбургера (Стильтьеса) (сокращенно $\mu \in \det\mathcal{H}$ $(\det\mathcal{S})$), если $V_\mu (V_\mu^+) = \{\mu\}$.

В 1923 г. М. Рисс [10] установил прямую связь между определенными мерами в смысле Гамбургера и проблемой полиномиальной плотности в пространстве $L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)d\mu)$. Он доказал, что (см. [11], утверждение 1.3)

$$\mu \in \det\mathcal{H} \Leftrightarrow L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)d\mu) \in \overline{\mathcal{P}}. \tag{12}$$

В 1991 г. Кр. Берг и М. Тилл [11] (теорема 3.8) дополнили свойство (12) следующим образом:

$$\mu \in \det\mathcal{S} \Leftrightarrow L_2(\mathbb{R}, (1+x)d\mu) \in \overline{\mathcal{P}} \quad \text{и} \quad L_2(\mathbb{R}, x(1+x)d\mu) \in \overline{\mathcal{P}}. \tag{13}$$

В 1941 г. Уиддер [12] опубликовал результат, полученный Боасом, о достаточных условиях для неопределенности проблемы моментов Стильтьеса. Для последовательности положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Боасом были введены условия

$$\lambda_0 \ge 1, \quad \lambda_1 \ge \lambda_0, \quad \lambda_2 \ge 4(1+\lambda_1)^2, \quad \lambda_n \ge (n\lambda_{n-1})^n, \quad n = 3, 4, 5, \ldots, \tag{14}$$

которые называют *условиями Боаса,* и было доказано (см. [12, с. 142], гл. 3, теорема 16), что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям (14), существуют по крайней мере два различных решения $\mu \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ проблемы моментов Стильтьеса $s_n(\mu) = \lambda_{2n},\ n \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 1. *Пусть функция* ψ *определена формулой* (10). *Тогда для любого* $b > 0$ *функция* $x^b\psi(x)$ *является интегрируемой на* $\mathbb{R}^+$, *величины*

$$\sigma(b) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(\log k)}{k} \log^b k, \qquad \gamma(b) := \int_1^{\infty} \frac{\psi(\log t)}{t} \log^b t\, dt \tag{15}$$

являются конечными и

$$\frac{\gamma(b)}{e^4} \le \sigma(b) \le e\gamma(b). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и

$$\psi_N(x) := \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \sum_{m=1}^{N} \frac{(\sqrt{2\pi})^m e^{-mx^{1/4m}}}{\sqrt{m}\, m!}.$$

Тогда для произвольного $\beta \ge 2$ с помощью интегрального представления гамма-функции и формулы умножения для нее (см. [13], гл. 1, § 1.2) получаем

$$\int_0^{\infty} \psi_N(u) u^{\beta/4-1} du = 4\int_0^{\infty} \psi_N(u^4) u^{\beta-1} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sum_{m=1}^{N} \frac{(\sqrt{2\pi})^m e^{-mu^{1/m}}}{\sqrt{m}\, m!} u^{\beta-1} du =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m!} \frac{(\sqrt{2\pi})^m \sqrt{m}\, \Gamma(m\beta)}{\sqrt{2\pi}\, m^{m\beta}} = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m!} \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(\beta + \frac{r}{m}\right).$$

Поскольку функция $\Gamma(2+x)$ возрастает при $x \ge 0$ (см. [14], гл. 6), последняя сумма не превышает $e^{\Gamma(\beta+1)} - 1$ и по теореме Беппо Леви для произвольного $b > 0$ будем иметь требуемую суммируемость функции $x^b\psi(x)$ на положительной полуоси. Кроме того, из последнего равенства следует справедливость оценок

$$e^{\Gamma(\beta)} - 1 \le \gamma\left(\frac{\beta}{4} - 1\right) \le e^{\Gamma(\beta+1)} - 1, \quad \beta \ge 2. \tag{17}$$

Очевидно, что функция $e^{-x}\psi(x)$ убывает на $\mathbb{R}^+$. Поэтому на каждом интервале вида $[\log k,\ \log(k+1)]$, $k \ge 1$, выполняется неравенство

$$e^{-x}\psi(x) \le C_k e^{-\log(k+1)} \psi(\log(k+1)), \quad x \in [\log k,\ \log(k+1)],$$

где

$$C_k = \frac{e^{-\log k}\psi(\log k)}{e^{-\log(k+1)}\psi(\log(k+1))}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что $C_1 \le e^4$ и $C_k \le e$ для произвольного $k \ge 2$, т. е. имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \frac{\psi(\log x)}{x} \le e^4 \frac{\psi(\log 2)}{2}, \quad x \in [1, 2], \\ \frac{\psi(\log x)}{x} \le e \frac{\psi(\log(k+1))}{k+1}, \quad x \in [k, k+1], \quad k \ge 2. \end{gathered} \tag{18}$$

Из очевидных соотношений

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \sum_{m\ge 1} \frac{(\sqrt{2\pi})^m}{\sqrt{m}\, m!} \le \frac{e^{\sqrt{2\pi}} - 1}{\sqrt{32\pi}}$$

$$\psi(1) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \sum_{m\ge 1} \frac{(\sqrt{2\pi})^m e^{-m}}{\sqrt{m}\, m!} \ge \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \frac{e^{\frac{\sqrt{2\pi}}{e}} - 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{e}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{e}}$$

следует

$$C_1 = \frac{\psi(0)}{e^{-\log 2}\psi(\log 2)} \le \frac{e\psi(0)}{\psi(1)} \le \sqrt{2\pi}\, \frac{e^{\sqrt{2\pi}} - 1}{e^{\frac{\sqrt{2\pi}}{e}} - 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{e}} < e^4,$$

что означает справедливость левого неравенства в (18). Теперь оценим сверху постоянные C_k при $k \ge 2$. При $m \ge 1$ имеем

$$\log(k+1) - \log k + m\left[\log^{1/4m}(k+1) - \log^{1/4m} k\right] \le \log 1{,}5 + m\left[\log^{1/4m} 3 - \log^{1/4m} 2\right] =$$

$$= \log 1{,}5 + \frac{1}{4}\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1}{t^{1-1/4m}}\, dt \le \log 1{,}5 + \frac{\log 1{,}5}{4\log^{1-1/4m} 2} \le \log 1{,}5 + \frac{\log 1{,}5}{4\log 2} < 1,$$

откуда

$$-\log k - m\log^{1/4m} k \le 1 - \log(k+1) - m\log^{1/4m}(k+1),$$

и потому

$$e^{-\log k}\psi(\log k) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \sum_{m\ge 1} \frac{(\sqrt{2\pi})^m e^{-\log k - m\log^{1/4m} k}}{\sqrt{m}\, m!} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \sum_{m\ge 1} \frac{(\sqrt{2\pi})^m e^{1-\log(k+1) - m\log^{1/4m}(k+1)}}{\sqrt{m}\, m!} = e\, e^{-\log(k+1)}\psi(\log(k+1)),$$

что и доказывает правые неравенства в (18).

Поскольку при любом $b > 0$ функция $\log^b(1+x)$ возрастает на $\mathbb{R}^+$, для произвольного натурального $N \ge 3$

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{\psi(\log k)}{k}\log^b k \le \sum_{k=2}^{N} \frac{\psi(\log k)}{k}\int_k^{k+1} \log^b x\, dx \overset{(18)}{\le}$$

$$\overset{(18)}{\le} e\sum_{k=2}^{N}\int_k^{k+1} \frac{\psi(\log x)}{x}\log^b x\, dx \le e\gamma(b),$$

откуда следуют конечность $\sigma(b)$ при любом $b > 0$ и оценка $\sigma(b) \le e\gamma(b)$. Для получения левого неравенства в (16) необходимо снова использовать монотонность функции $\log^b(1+x)$ при $x \ge 0$ и неравенства (18):

$$\sigma(b) \ge \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\psi(\log k)}{k}\int_{k-1}^{k} \log^b x\, dx \overset{(18)}{\ge} \frac{1}{e^4}\sum_{k=2}^{\infty}\int_{k-1}^{k} \frac{\psi(\log x)}{x}\log^b x\, dx = \frac{1}{e^4}\gamma(b).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Последовательность чисел* $\{\sigma(1+n/2)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *удовлетворяет условиям Боаса* (14).

Доказательство. При $b \geq 2$ и $n \in \mathbb{N}$ из оценок (17) получаем

$$\gamma\left(\frac{b+2n}{4}-1\right) \geq e^{\Gamma(b+2n)}-1 = \left(e^{\Gamma(b+2n-1)}\right)^{b+2n-1}-1 \geq$$

$$\geq \left(e^{\Gamma(b+2n-1)}-1\right)^{b+2n-1} \geq \gamma\left(\frac{b+2n-2}{4}-1\right)^{b+2n-1},$$

т. е.

$$\gamma\left(\frac{b}{4}+\frac{n}{2}-1\right) \geq \gamma\left(\frac{b}{4}+\frac{n-1}{2}-1\right)^{b+2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b \geq 2. \tag{19}$$

Обозначим

$$\gamma_n := \gamma\left(1+\frac{n}{2}\right), \qquad \sigma_n := \sigma\left(1+\frac{n}{2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда из свойства (17) с $\beta = 8+2n$ и (19) с $b = 8$ имеем

$$e^{\Gamma(8+2n)}-1 \leq \gamma_n \leq e^{\Gamma(9+2n)}-1, \quad n \in \mathbb{N}_0; \qquad \gamma_n \geq \gamma_{n-1}^{7+2n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Используя (20) и (16), находим

$$\sigma_n \geq \frac{1}{e^4}\gamma_n \geq \frac{1}{e^4}\gamma_{n-1}^{7+2n} \geq \frac{1}{e^4}\frac{1}{e^{7+2n}}\sigma_{n-1}^{7+2n},$$

т. е. последовательность $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ имеет следующие свойства:

$$\sigma_0 \geq \frac{e^{\Gamma(8)}-1}{e^4}, \quad \sigma_n \geq \frac{1}{e^{11+2n}}\sigma_{n-1}^{7+2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21.1}$$

$$\frac{e^{\Gamma(8+2n)}-1}{e^4} \leq \sigma_n \leq e\left(e^{\Gamma(9+2n)}-1\right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{21.2}$$

Докажем теперь, что из (21.1) и (21.2) следуют свойства (14) последовательности $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Из (21.1) имеем

$$\sigma_0 \geq e^{\Gamma(8)-5} = e^{7!-5} > e^2 > 1, \tag{22.1}$$

и потому левое неравенство в (14) выполняется.

Из правого неравенства в (21.1) при $n = 1$ имеем $\sigma_1 \geq \sigma_0^9/e^{13}$, а из (22.1) следует, что $\sigma_0^9/e^{13} \geq \sigma_0$. Поэтому $\sigma_1 \geq \sigma_0^9/e^{13} \geq \sigma_0$, что доказывает второе слева неравенство в (14).

Для проверки третьего слева неравенства в (14) заметим, что $4(1+\sigma_1)^2 \leq$ $\leq 16\sigma_1^2 < e^4\sigma_1^2$, и в силу правого неравенства в (21.1) $\sigma_2 \geq \sigma_1^{11}/e^{15}$ при $n = 2$. Но из (21.2) имеем $\sigma_1 \geq e^{\Gamma(10)-5} > e^{16/9}$, т. е. $\sigma_1^{11}/e^{15} > e^4\sigma_1^2$, откуда

$$\sigma_2 \geq \sigma_1^{11}/e^{15} > e^4\sigma_1^2 > 4(1+\sigma_1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Зафиксируем теперь произвольное $n \geq 3$. Тогда требуемое в (14) неравенство

$$\sigma_n \geq (n\sigma_{n-1})^n \tag{22.2}$$

в силу (21.1) будет следствием выполнения неравенства $\sigma_{n-1}^{7+2n}/e^{11+2n} \ge (n\sigma_{n-1})^n$, или, что то же самое,

$$\sigma_{n-1} \;\ge\; n^{n/(7+n)}e^{(11+2n)/(7+n)}. \tag{22.3}$$

Для доказательства (22.3) заметим, что $n/(7+n) \le 1$, $(11+2n)/(7+n) \le 3$ и благодаря (21.2) $\sigma_{n-1} \ge e^{\Gamma(6+2n)-5}$. Поэтому (22.3) будет следствием неравенства

$$e^{\Gamma(6+2n)} \;\ge\; ne^8 \;=\; e^{8+\log n}, \tag{22.4}$$

которое выполняется в силу соотношений

$$\Gamma(6+2n) \;=\; (5+2n)\Gamma(5+2n) \;\ge\; (5+2n)\Gamma(11) \;\ge$$
$$\ge\; (5+2\log(n+1))\Gamma(11) \;>\; 8+\log n.$$

Таким образом, (22.2) выполняется и последовательность $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ удовлетворяет всем условиям Боаса (14).

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Поскольку по формуле (11) (см. также (15))

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n d\mu_L(x) \;=\; \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\psi(\log k)}{k}\log^{n+1}k \;=\; \sigma(n+1), \qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

то $\mu_A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ для произвольного $A\subset L$. В силу леммы 2 и упомянутой выше теоремы Боаса (см. [12, с. 142], гл. 3, теорема 16) будем иметь не менее двух различных решений $\nu\in\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^+)$ проблемы моментов Стильтьеса

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n d\nu(x) \;=\; \sigma(n+1), \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Так как μ_L является решением этой проблемы, то $\mu_L \in \operatorname{indet}\mathcal{S}$. В силу (13) и $0\notin \operatorname{supp}\mu_L$ это означает, что $L_2(\mathbb{R}, x(1+x)d\mu_L)\notin\overline{\mathcal{P}}$. Но из того, что множество $\operatorname{supp}\mu_L$ не является множеством нулей ни одной из функций множества $\mathcal{E}_0^{\mathcal{S}}[\mathbb{R}]$, согласно утверждению A1.2 из [7, с. 250] получаем, что $L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-m}d\mu_L)\notin\overline{\mathcal{P}}$ для произвольного $m\in\mathbb{N}$ и тем более

$$L_p(\mathbb{R}, (1+x^2)^{-m}d\mu_L)\notin\overline{\mathcal{P}}, \quad m\in\mathbb{N}, \quad 2\le p<\infty. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь такое непустое множество $A\subset L$, что $n_A(r)\le C_a e^{r-a\sqrt{r}}$, $r\ge 0$, при некоторых a, $C_a>0$. Тогда для произвольного $n\in\mathbb{N}_0$

$$s_n(\mu_A) \;=\; \int\limits_0^{+\infty} x^n d\mu_A(x) \;=\; \sum_{k\in A}\frac{\psi(\log k)}{k}\log^{n+1}k \;\le$$
$$\le\; \psi(0)\sum_{k\in A}\frac{\log^{n+1}k}{k} \;=\; \psi(0)\int\limits_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dn_A(x).$$

Но

$$0 \;<\; \int\limits_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dn_A(x) \;=$$

$$= x^{n+1} e^{-x} n_A(x) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} n_A(x) \left[(n+1) x^n e^{-x} - x^{n+1} e^{-x} \right] dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^n n_A(x) e^{-x} \left[x - (n+1) \right] dx \le \int_0^{+\infty} x^{n+1} n_A(x) e^{-x} dx \le$$

$$\le C_a \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-a\sqrt{x}} dx = \frac{2 C_a \Gamma(2n+4)}{a^{2n+4}},$$

и потому из асимптотической формулы для гамма-функции (см. [13, с. 62]) следует, что мера μ_A удовлетворяет условию Карлемана в смысле определения 1 в [15, с. 222], т. е. $\sum_{n \ge 1} s_{2n}(\mu_A)^{-1/4n} = +\infty$. В силу известной теоремы Кр. Берга и И. Кристенсена [16] (см. также [15, с. 222], теорема А) это означает, что $L_p(\mathbb{R}, d\mu_A) \in \overline{\mathcal{P}}$ для произвольного $1 \le p < \infty$.

Теорема 1 доказана.

1. *Bernstein S.* Le problème de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel at l'une de ses applications // Bull. Math. France. – 1924. – **52**. – P. 399 – 410.
2. *Branges L.* The Bernstein problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – **10**. – P. 825 – 832.
3. *Ахиезер Н., Бернштейн С.* Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов // Докл. АН СССР. – 1953. – **92**. – С. 1109 – 1112.
4. *Pollard H.* Solution of Bernstein's approximation problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – **4**. – P. 869 – 875.
5. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**. – С. 107 – 152.
6. *Sodin M., Yuditskii P.* Another approach to de Branges' theorem on wighted polynomial approximation // Proc. Ashkelon Workshop Complex Function Theory (Isr. Math. Conf. Proc., May 1996). – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. – **11**. – P. 221 – 227.
7. *Borichev A., Sodin M.* The Hamburger moment problem and weighted polynomial approximation on discrete subsets of the real line // J. Anal. Math. – 1998. – **71**. – P. 219 – 264.
8. *Bakan A. G.* Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem // Approxim., Optimiz. and Math. Economics. – Heidelberg; New York: Physica, 2001. – P. 37 – 46.
9. *Akilov G. P., Kantorovich L. V.* Functional analysis in normed spaces. – New York: Macmillan, 1964. – 773 p.
10. *Riesz M.* Sur le problème des moments et le theoreme de Parseval correspondant // Acta Litt. Acad. Sci. Szeged. – 1923. – **1**. – P. 209 – 225.
11. *Berg Ch., Thill M.* Rotation invariant moment problem // Acta math. – 1991. – **167**. – P. 207 – 227.
12. *Widder D. W.* The Laplas transform. – Princeton Univ. Press, 1941. – Vol. 1. – 406 p.
13. *Bateman H., Erdely A.* Higher transcendental functions. – New York: McGraw-Hill, 1953. – Vol. 1.
14. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of mathematical functions // Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. – 1964. – **55**.
15. *Bakan A., Ruscheweyh St.* Representation of measures with simultaneous polynomial denseness in $L_p(\mathbb{R}, d\mu)$, $1 \le p < \infty$ // Ark. mat. – 2005. – **43**, № 2. – P. 221 – 249.
16. *Berg Ch., Christensen J. P. R.* Exposants critiques dans le problème des moments // C. r. Acad. sci. Paris. – 1983. – **296**. – P. 661 – 663.

Получено 24.06.08