УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ СПРЯЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ БІГАРМОНІЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА*

We obtain exact values of upper bounds of approximations by biharmonic Poisson integrals on classes of conjugate differentiable functions in uniform and integral metrics.

Получены точные значения верхних граней приближений бигармоническими интегралами Пуассона на классах сопряженных дифференцируемых функций в равномерной и интегральной метриках.

1. Основні означення. Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій із нормою

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, де норму задано таким чином:

$$\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\Delta(\Delta u) = 0, \tag{1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа у полярних координатах.

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайові умови

$$u\left(\rho, x\right)\big|_{\rho=1} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u(\rho, x)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = 0, \quad -\pi \le x \le \pi, \tag{2}$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, далі позначатимемо $B(\rho; f; x) = u(\rho, x)$. Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) можемо записати у вигляді

$$B(\rho; f; x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right]\rho^k\cos kt\right\}dt, \quad 0 \le \rho < 0. \tag{3}$$

Величину (3) називають бігармонічним інтегралом Пуассона функції f (див., наприклад, [1]). Поклавши $\rho = e^{-1/\delta}$, бігармонічний інтеграл запишемо у вигляді

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант Ф25.1/043).

$$B_\delta(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)K_\delta(t)dt,\quad \delta>0,$$

де

$$K_\delta(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-k/\delta}\cos kt$$

— бігармонічне ядро Пуассона.

Через W_p^r (де $p=1$ або $p=\infty$) позначимо множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\|f^{(r)}(t)\|_p\le 1$, якщо $p=1,\infty$; через $\overline{W}_p^r$ — клас функцій, спряжених до функцій із класу W_p^r, тобто

$$\overline{W}_p^r=\left\{\bar f:\bar f(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt,\ \ f\in W_p^r\right\},$$

де інтеграл розуміється в сенсі його головного значення, тобто

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\right)f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt$$

(див., наприклад, [2, с. 22]).

Позначимо

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N},B_\delta)_C=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\|f(x)-B_\delta(f,x)\|_C, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N},B_\delta)_1=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\|f(x)-B_\delta(f,x)\|_1. \tag{5}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $g(\delta)=g(\mathfrak{N};\delta)$ таку, що при $\delta\to\infty$ має місце точна асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N},B_\delta)_X=g(\delta)+o(g(\delta)),$$

то, наслідуючи О. І. Степанця [3, с. 198], будемо говорити, що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для даного класу $\mathfrak{N}$ і оператора $B_\delta(f,x)$ у метриці простору X.

Апроксимативні властивості методу наближення бігармонічними інтегралами Пуассона на класах диференційовних функцій досліджувались багатьма авторами. У 1963 р. С. Канієв [4] встановив для величини $\mathcal{E}\left(W_\infty^1,B(\rho)\right)_C$, тобто для точних верхніх меж відхилень функцій із класу W_∞^1 від їх бігармонічних інтегралів Пуассона, асимптотичну рівність при $\rho\to 1-$

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^1,B(\rho)\right)_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)+\frac{\varepsilon_\rho}{\pi},\quad \varepsilon_\rho=o(1-\rho),$$

а також точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}\left(W_\infty^r,B(\rho)\right)_C$.

У 1968 р. P. Pych [5] отримала асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}\left(W_\infty^1,B(\rho)\right)_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)+O\left((1-\rho)^2\ln\frac{1}{1-\rho}\right),\quad \rho\to 1-.$$

Пізніше ці дослідження було продовжено у роботі Л. П. Фалалєєва [6], де отримано повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}\left(W^1_\infty, B(\rho)\right)_C$:

$$\mathcal{E}\left(W^1_\infty, B(\rho)\right)_C = \frac{2}{\pi}\left\{(1-\rho) + (1-\rho)^2 \ln\frac{1}{1-\rho} + \right.$$

$$\left. + \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)(1-\rho)^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\left(\alpha_k (1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k (1-\rho)^k\right)\right\},$$

$$\alpha_k = \frac{1}{k},$$

$$\beta_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i2^i} - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}\right).$$

У роботі Л. П. Фалалєєва та Т. І. Аманова [7] знайдено повний асимптотичний розклад для величини $\mathcal{E}\left(W^1_\infty, B_\delta\right)_C$, який формулюється як у термінах $\frac{1}{\delta}$, так і в термінах $1-\rho$, а саме, при $\delta \to \infty$ $(\rho \to 1-0)$

$$\mathcal{E}\left(W^1_\infty, B_\delta\right)_C = \frac{1-\rho^2}{\pi}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(2k\int_\pi^\infty \frac{(t)_{2\pi}dt}{t^{2k+2}} - \frac{1}{\pi^{2k}}\right)\frac{1}{\delta^{2k}}\right\} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi}\right)\left\{\ln\delta + \ln\pi + \int_\pi^\infty \frac{(t)_{2\pi}dt}{t^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2k\pi^{2k}} - \int_\pi^\infty \frac{(t)_{2\pi}dt}{t^{2k+2}}\right)\frac{1}{\delta^{2k}}\right\},$$

де $(t)_{2\pi}$ — парне 2π-періодичне продовження функції $\varphi(t) = t$ з $[0,\pi]$ на всю вісь. У цій же роботі знайдено також загальні вирази, які дозволяють одержувати аналогічні розклади величин $\mathcal{E}\left(W^r_\infty; B_\delta\right)_C$ при довільних $r \in N$.

Метою даної роботи є отримання точних значень величин (4) і (5) при $\mathfrak{N} = \overline{W}^r_\infty$ та $\mathfrak{N} = \overline{W}^r_1$, $r \in N \setminus \{1\}$, у рівномірній та інтегральній метриках відповідно.

Через K_n і $\tilde{K}_n$, як це прийнято, у подальшому будемо позначати відомі константи Ж. Фавара – Н. І. Ахієзера – М. Г. Крейна з теорії найкращих наближень:

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$\tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n \in N.$$

Теорема 1. *Якщо $r = 2l$, $l \in N$, то при кожному $\delta > 0$ мають місце рівності*

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty, B_\delta\right)_C = \mathcal{E}\left(\overline{W}^r_1, B_\delta\right)_1 = \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}}\frac{1}{(2i-1)!}K_{r-2i+1}\frac{1}{\delta^{2i-1}} -$$

$$- \sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i}} + \frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\left(\sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i-1}} - \right.$$

$$-\sum_{i=0}^{\frac{r-2}{2}} \frac{1}{(2i)!} K_{r-2i-1} \frac{1}{\delta^{2i}}\Bigg) - \alpha_\delta^{(r)} + \frac{1-e^{-2/\delta}}{2} \alpha_\delta^{(r-1)},$$

де

$$\alpha_\delta^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/\delta} \int\limits_0^{t_n} \ldots \int\limits_0^{t_2} \ln \frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}} dt_1 dt_2 \ldots dt_n.$$

Доведення. Доведемо спочатку теорему для випадку рівномірної метрики.

Інтегруючи r разів частинами коефіцієнти Фур'є функції f, отримуємо

$$f(x) - B_\delta(f,x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-k/\delta}}{k^r} \cos\left(kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right) dt. \quad (6)$$

Враховуючи останню рівність, знаходимо

$$\mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C = \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W_\infty^r} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) \overline{Q}_r(t;\delta)\, dt \right|,$$

де

$$\overline{Q}_r(t;\delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\right] e^{-k/\delta}}{k^r} \cos\left(kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right), \quad \delta > 0. \quad (7)$$

Оскільки $f \in W_\infty^r$, $\overline{Q}_r(t;\delta)$ є непарною при $r = 2l$, $l \in N$, то

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r, B_\delta\right)_C \le \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left|\overline{Q}_r(t;\delta)\right| dt.$$

Переконаємося в тому, що

$$\operatorname{sign} \overline{Q}_r(t;\delta) = \pm \operatorname{sign} \sin t, \quad r = 2l, \quad l \in N. \quad (8)$$

Очевидно, що

$$\overline{Q}_r(0;\delta) = \overline{Q}_r(\pi;\delta) = 0, \quad r = 2l, \quad l \in N.$$

Припустимо, що існує $t_0 \in (0,\pi)$ така, що $\overline{Q}_r(t_0;\delta) = 0$. Тоді, застосовуючи $r-2$ рази теорему Ролля, приходимо до висновку, що для функції $\overline{Q}_2(t;\delta)$ існує точка $t_{r-2} \in (0,\pi)$ така, що $\overline{Q}_2(t_{r-2};\delta) = 0$. А це неможливо, оскільки, використовуючи зауваження до теореми 1.14 роботи [8, с. 297], можна переконатись, що $\overline{Q}_2(t;\delta) > 0$, $t \in (0,\pi)$. Отже, рівність (8) доведено.

Розглянемо функцію f таку, що $f^{(r)}(t) = \operatorname{sign}\left(\overline{Q}_r(t;\delta)\right)$, $t \in [-\pi,\pi]$. Така функція неперервно і періодично продовжується на R і належить до класу W_∞^r [9, с. 104 – 106]. А отже, при $r = 2l$, $l \in N$

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty, B_\delta\right)_C \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\,\overline{Q}_r\,(t;\delta)\right|dt$$

і, таким чином,

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty, B_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\,\overline{Q}_r\,(t;\delta)\right|dt = \frac{2}{\pi}\left|\,\int\limits_0^\pi \overline{Q}_r\,(t;\delta)\,dt\right|. \tag{9}$$

Отже, згідно з рівністю (9) маємо

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r_\infty; B_\delta)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1-\left[1+\dfrac{2k+1}{2}(1-e^{-2/\delta})\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{10}$$

Рівність (10) запишемо у вигляді

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty\,; B_\delta\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1-e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}} - \frac{2}{\pi}(1-e^{-2/\delta})\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^r} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\sum_{k=0}^\infty \frac{1-e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^r}. \tag{11}$$

Введемо до розгляду функцію, визначену на $[0,\infty)$,

$$\varphi_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1-e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Дана функція допускає зображення

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\int\limits_{t_n}^\infty \ldots \int\limits_{t_2}^\infty \ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}dt_1\ldots dt_n,$$

зокрема

$$\varphi_1(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x} \ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}dt_1.$$

Дійсно, оскільки

$$\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}} = 2\sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1},$$

то

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\int\limits_{t_n}^\infty \ldots \int\limits_{t_3}^\infty\int\limits_{t_2}^\infty \ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\int\limits_{t_n}^\infty \ldots \int\limits_{t_3}^\infty\int\limits_{t_2}^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1}dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_{t_n}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_3}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)t_2}}{(2k+1)^2} dt_2 \ldots dt_{n-1} dt_n = \ldots$$

$$\ldots = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)t_n}}{(2k+1)^n} dt_n = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}} = \varphi_n(x).$$

Виконаємо деякі перетворення функції $\varphi_n(x)$, $n > 1$:

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_{t_n}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \ln \frac{1 + e^{-t_1}}{1 - e^{-t_1}} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{t_{n-1}}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \ln \frac{1 + e^{-t_1}}{1 - e^{-t_1}} dt_1 \ldots dt_n -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_n} \int\limits_{t_{n-1}}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \ln \frac{1 + e^{-t_1}}{1 - e^{-t_1}} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \varphi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt_n - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_n} \int\limits_{t_{n-1}}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \ln \frac{1 + e^{-t_1}}{1 - e^{-t_1}} dt_1 \ldots dt_{n-1} dt_n,$$

після чого на підставі рекурентних співвідношень

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt - \int\limits_0^{1/x} \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

отримаємо

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt_1 - \int\limits_0^{1/x} \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{t_1}\right) dt_1 =$$

$$= \varphi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt_1 - \varphi_{n-2}(0) \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} dt_1 dt_2 + \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \varphi_{n-2}\left(\frac{1}{t_2}\right) dt_1 dt_2 = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \varphi_{n-k}(0) \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} dt_1 \ldots dt_k +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-2}} \varphi_1\left(\frac{1}{t_{n-1}}\right) dt_1 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \varphi_{n-k}(0) \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} dt_1 \ldots dt_k +$$

$$+\,(-1)^{n-1}\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/x}\int\limits_0^{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2}\ln\frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}}dt_1\ldots dt_{n-1}dt_n,$$

тобто

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{n-k}(0)\frac{1}{x^k}+(-1)^{n-1}\,\alpha_x^{(n)}, \tag{12}$$

де

$$\varphi_n(0)=\begin{cases}K_n, & n=2l-1,\\ \tilde{K}_n, & n=2l,\end{cases}\qquad l\in N.$$

Враховуючи означення функції $\varphi_n(x)$, з рівності (11) отримуємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty,B_\delta\right)_C=\varphi_r(\delta)-\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\varphi_{r-1}(0)+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\varphi_{r-1}(\delta).$$

Використовуючи співвідношення (12), маємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_\infty,B_\delta\right)_C=$$

$$=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{r-k}(0)\frac{1}{\delta^k}-\alpha_\delta^{(r)}+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\varphi_{r-1}(0)\,+$$

$$+\,\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\left(\sum_{k=1}^{r-2}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{r-k-1}(0)\frac{1}{\delta^k}+\alpha_\delta^{(r-1)}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}}\frac{1}{(2i-1)!}K_{r-2i+1}\frac{1}{\delta^{2i-1}}-\sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i}}+$$

$$+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\left(\sum_{i=1}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i-1}}-\sum_{i=0}^{\frac{r-2}{2}}\frac{1}{(2i)!}K_{r-2i-1}\frac{1}{\delta^{2i}}\right)-$$

$$-\,\alpha_\delta^{(r)}+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\alpha_\delta^{(r-1)}.$$

Ми показали справедливість теореми у випадку рівномірної метрики.

Покажемо, що $\mathcal{E}(\overline{W}^r_1;B_\delta)_1$ збігається з правою частиною рівності (10), тобто $\mathcal{E}(\overline{W}^r_\infty;B_\delta)_C=\mathcal{E}(\overline{W}^r_1;B_\delta)_1$.

Враховуючи рівність (6), дістаємо

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r_1;B_\delta)_1=\sup_{f\in W_1^r}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}\left(t+x\right)\overline{Q}_r\left(t;\delta\right)dt\right|dx,\quad r\in N, \tag{13}$$

де $\overline{Q}_r\left(t;\delta\right)$ задається рівністю (7).

Оскільки має місце рівність (8), то при $r=2l$, $l\in N$, одержуємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r_1;B_\delta\right)_1\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\overline{Q}_r\left(t;\delta\right)\right|dt=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_0^\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{1-\left[1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-k/\delta}}{k^r}\sin kt\,dt\right| =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}. \qquad (14)$$

З іншого боку, використовуючи лему з роботи [10, с. 63], при парному r маємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_1^r; B_\delta\right)_1 \geq \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}. \qquad (15)$$

Порівнюючи співвідношення (14) та (15), а також враховуючи рівність (10), приходимо до висновку, що при парному r має місце формула

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_1^r; B_\delta\right)_1 =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}} = \mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r; B_\delta\right)_C.$$

На підставі останньої рівності робимо висновок, що теорема є справедливою і у випадку інтегральної метрики.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $r = 2l+1$, $l \in N$, *то при кожному* $\delta > 0$ *мають місце рівності*

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r, B_\delta\right)_C = \mathcal{E}\left(\overline{W}_1^r, B_\delta\right)_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{(2i-1)!}K_{r-2i+1}\frac{1}{\delta^{2i-1}} - \sum_{i=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i}} +$$

$$+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\left(\sum_{i=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i-1}} - \sum_{i=0}^{(r-3)/2}\frac{1}{(2i)!}K_{r-2i-1}\frac{1}{\delta^{2i}}\right) +$$

$$+\beta_\delta^{(r)} - \frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\beta_\delta^{(r-1)},$$

де

$$\beta_\delta^{(r)} = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{1/\delta}\int\limits_0^{t_r}\ldots\int\limits_0^{t_2}\operatorname{arctg} e^{-t_1}dt_1\ldots dt_r.$$

Доведення. Спочатку доведемо теорему для рівномірної метрики.

Нехай $r = 2l+1$, $l \in N$. Тоді, як і при доведенні попередньої теореми, можна показати, що

$$\mathcal{E}(\overline{W}_\infty^r; B_\delta)_C = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W_\infty^r}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\,\overline{Q}_r(t;\delta)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W^r_\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) \left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right) dt \right|,$$

де $\overline{Q}_r(t;\delta)$ задається рівністю (7).

Оскільки $f \in W^r_\infty$, $\overline{Q}_r(t;\delta)$ є парною при $r = 2l+1$, $l \in N$, то

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r_\infty; B_\delta)_C \le \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right| dt.$$

Доведемо, що

$$\operatorname{sign}\left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right) = \pm \operatorname{sign}\cos t, \quad r = 2l+1, \quad l \in N. \tag{16}$$

Нехай

$$\overline{Q}_r(t_0;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) = 0, \quad t_0 \in (0,\pi), \quad t_0 \ne \frac{\pi}{2}.$$

Тоді згідно з теоремою Ролля існує точка $t_1 \in (0,\pi)$ така, що $\overline{Q}'_r(t_1;\delta) = 0$, звідки $\overline{Q}_{r-1}(t_1;\delta) = 0$. А це внаслідок (8) неможливо. Рівність (16) доведено.

Розглянемо функцію f таку, що

$$\operatorname{sign}\left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right) = \operatorname{sign}\cos t, \quad t \in [-\pi,\pi].$$

Ця функція неперервно і періодично продовжується на R і належить до класу W^r_∞ [9, с. 187, 188]. Отже, при $r = 2l+1$, $l \in N$,

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r_\infty; B_\delta)_C \ge \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right| dt$$

і, таким чином,

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r_\infty; B_\delta)_C = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi/2} \left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right) dt - \int_0^{\pi/2} \left(\overline{Q}_r(\pi - t;\delta) - \overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right) \right) dt \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi/2} \left(\overline{Q}_r(t;\delta) - \overline{Q}_r(\pi - t;\delta) \right) dt \right|. \tag{17}$$

Далі, виходячи із співвідношення (17), при $r = 2l+1$, $l \in N$, одержуємо

$$\mathcal{E}\big(\overline{W}^r_\infty; B_\delta\big)_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{2k+1}{2}\left(1 - e^{-2/\delta}\right) \right] e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^r} \cos(2k+1)t\,dt \right|.$$

Таким чином, при $r = 2l + 1$, $l \in N$, справджується рівність

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^{\,r}_{\infty}; B_\delta\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1 - \left[1 + \dfrac{2k+1}{2}(1 - e^{-2/\delta})\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{18}$$

Рівність (18) перепишемо у вигляді

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^{\,r}_{\infty}; B_\delta\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1 - e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^r} + \frac{2}{\pi}\left(1 - e^{-2/\delta}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1 - e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^r}. \tag{19}$$

Введемо до розгляду функцію, що визначена на $[0, \infty)$,

$$\psi_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1 - e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Функція $\psi_n(x)$ допускає зображення

$$\psi_n(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg} e^{-t_1}dt_1\ldots dt_n,$$

зокрема

$$\psi_1(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\operatorname{arctg} e^{-t_1}dt_1.$$

Дійсно, оскільки

$$\operatorname{arctg} e^{-t_1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1},$$

то

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\operatorname{arctg} e^{-t_1}dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t_1}}{2k+1}dt_1dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\int_{t_n}^{\infty}\ldots\int_{t_3}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t_2}}{(2k+1)^2}dt_2\ldots dt_{n-1}dt_n = \ldots$$

$$\ldots = \frac{4}{\pi}\int_0^{1/x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)t_n}}{(2k+1)^n}dt_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1 - e^{-(2k+1)/x}}{(2k+1)^{n+1}} = \psi_n(x).$$

Виконаємо деякі перетворення функції $\psi_n(x)$, $n > 1$:

$$\psi_n(x) = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_{t_n}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \operatorname{arctg} e^{-t_1} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{t_{n-1}}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \operatorname{arctg} e^{-t_1} dt_1 \ldots dt_n -$$

$$- \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_n} \int\limits_{t_{n-1}}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \operatorname{arctg} e^{-t_1} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \psi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt - \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_n} \int\limits_{t_{n-1}}^{\infty} \ldots \int\limits_{t_2}^{\infty} \operatorname{arctg} e^{-t_1} dt_1 \ldots dt_n.$$

Далі, використовуючи рекурентні співвідношення

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt - \int\limits_0^{1/x} \psi_{n-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

отримуємо

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt_1 - \int\limits_0^{1/x} \psi_{n-1}\left(\frac{1}{t_1}\right) dt_1 =$$

$$= \psi_{n-1}(0) \int\limits_0^{1/x} dt_1 - \psi_{n-2}(0) \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} dt_1 dt_2 + \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \psi_{n-2}\left(\frac{1}{t_2}\right) dt_1 dt_2 = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \psi_{n-k}(0) \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} dt_1 \ldots dt_k +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{n-2}} \psi_1\left(\frac{1}{t_{n-1}}\right) dt_1 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \psi_{n-k}(0) \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} dt_1 \ldots dt_k +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{1/x} \int\limits_0^{t_n} \ldots \int\limits_0^{t_2} \operatorname{arctg} e^{-t_1} dt_1 \ldots dt_{n-1} dt_n,$$

тобто

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \psi_{n-k}(0) \frac{1}{x^k} + (-1)^{n-1} \beta_x^{(n)}, \tag{20}$$

де

$$\psi_n(0)=\begin{cases}K_n, & n=2l,\\ \tilde{K}_n, & n=2l+1,\end{cases}\qquad l\in N.$$

Враховуючи означення функції $\psi_n(x)$, із рівності (19) маємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^{\,r}_{\infty},B_\delta\right)_C=\psi_r(\delta)-\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\psi_{r-1}(0)+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\psi_{r-1}(\delta).$$

Використовуючи співвідношення (20), отримуємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^{r}_{\infty},B_\delta\right)_C=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{r-k}(0)\frac{1}{\delta^k}+\beta_\delta^{(r)}-\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\psi_{r-1}(0)+$$

$$+\frac{1-e^{2/\delta}}{2}\left(\sum_{k=1}^{r-2}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{r-k-1}(0)\frac{1}{\delta^k}-\beta_\delta^{(r-1)}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{(2i-1)!}K_{r-2i+1}\frac{1}{\delta^{2i-1}}-\sum_{i=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i}}+$$

$$+\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\left(\sum_{i=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{r-2i}\frac{1}{\delta^{2i-1}}-\sum_{i=0}^{(r-3)/2}\frac{1}{(2i)!}K_{r-2i-1}\frac{1}{\delta^{2i}}\right)+$$

$$+\beta_\delta^{(r)}-\frac{1-e^{-2/\delta}}{2}\beta_\delta^{(r-1)},$$

тобто для випадку рівномірної метрики теорему доведено.

Для доведення даної теореми в інтегральній метриці потрібно показати справедливість рівності $\mathcal{E}\left(\overline{W}^{\,r}_{\infty},B_\delta\right)_C=\mathcal{E}\left(\overline{W}^{\,r}_{1},B_\delta\right)_1$.

Покажемо, що $\mathcal{E}\left(\overline{W}^{\,r}_{1};B_\delta\right)_1$ збігається з правою частиною рівності (18). Із рівності (13), використовуючи теорему Фубіні [11, с. 331], при $r=2l+1$, $l\in N$, маємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^{\,r}_{1};B_\delta\right)_1=\sup_{f\in W_1^r}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(x+t)\left(\overline{Q}_r(t;\delta)-\overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right)dt\right|dx\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\overline{Q}_r(t;\delta)-\overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left|\left(\int_0^{\pi/2}-\int_{\pi/2}^{\pi}\right)\left(\overline{Q}_r(t;\delta)-\overline{Q}_r\left(\frac{\pi}{2};\delta\right)\right)dt\right|=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\left[1+\dfrac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}\cos(2k+1)t\,dt\right|=$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{21}$$

З іншого боку, згідно з лемою роботи [10, с. 63], при непарних r має місце співвідношення

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_1^r; B_\delta\right)_1 \geq \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{22}$$

Із (21) та (22), а також (18) при $r = 2l+1, l \in N$, випливає рівність

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}_1^r; B_\delta\right)_1 =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\left[1+\frac{2k+1}{2}\left(1-e^{-2/\delta}\right)\right]e^{-(2k+1)/\delta}}{(2k+1)^{r+1}} = \mathcal{E}\left(\overline{W}_\infty^r; B_\delta\right)_C.$$

Теорему 2 доведено.

Слід зазначити, що величини (4) та (5) відповідно для класів $\mathfrak{N} = \overline{W}_\infty^r$ та $\mathfrak{N} = \overline{W}_1^r$, коли замість $B_\delta(f, x)$ розглядався інтеграл Абеля – Пуассона

$$P_\delta(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k/\delta}\cos kt\right)dt, \quad \delta > 0,$$

вивчались у роботі авторів [12].

1. *Петров В. А.* Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 137 – 142.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
4. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995 – 998.
5. *Pych P.* On a biharmonic function in unit disc // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203 – 213.
6. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: мат. Всесоюз. симп. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. – С. 163 – 167.
7. *Аманов Т. И., Фалалеев Л. П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля – Пуассона // 5-е Сов.-Чех. сов. прим. методов теории функций и функцион. анализа к задачам мат. физики (Алма-Ата, 1976): Тр. сов. – Новосибирск, 1979. – С. 13 – 16.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
9. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
10. *Pych P.* Approximation of functions in L- and C-metrics // Ann. Soc. math. pol. – 1967. – **1**, № 11. – P. 61 – 76.
11. *Натансон І. П.* Основи теорії функцій дійсної змінної. – Київ: Рад. шк., 1950. – 424 с.
12. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля – Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 73 – 82.

Одержано 12.02.08