УДК 517.5

К. М. Зубрилин (Одес. нац. ун-т)

p-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ГРУППЫ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИНДУЦИРОВАННЫЕ КОНЦИРКУЛЯРНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БАЗ

The flattening properties of the Lie group G_r^{II} of transformations of the tangent bundle $T^2(M)$ are investigated. The lift ∇^{II} of affine connection ∇ and the lift g^{II} of metric g on the base of M are given in a tangent bundle of the second order. The Lie group G_r^{II} is induced by the Lie group G_r concircular transformations of the base of M.

The obtained results reveal certain geometrical features of the induced group G_r^{II} in the framework of the theory of the p-geodesic mappings.

Досліджено сплощуючі властивості групи Лі G_r^{II} перетворень дотичного розшарування $T^2(M)$ другого порядку, наділеного підняттям ∇^{II} афінної зв'язності ∇ і підняттям g^{II} метрики g на базі M, яка індукована групою Лі G_r конц磨циркулярних перетворень бази M.

Отримані результати виявляють певні геометричні особливості індукованої групи G_r^{II} у рамках теорії p-геодезичних відображень.

1. Введение. Изучению уплощающих свойств дифференцируемых отображений посвящено много работ.

Уплощающие свойства диффеоморфизмов касательных расслоений первого и второго порядков, наделенные полными поднятиями (лифтами) аффинных связностей на базах, которые индуцированы геодезическими (проективными) диффеоморфизмами базисных многообразий, исследованы в работе [1]. В работе [2] изучены группы Ли таких преобразований.

Работа [3] посвящена изучению уплощающих свойств преобразований касательного расслоения, наделенного полным поднятием аффинной связности (псевдо)риманова пространства, являющегося базой, которые индуцированы конциркулярными преобразованиями базисного многообразия. В рамках теории p-геодезических отображений выявлены определенные геометрические особенности групп Ли таких преобразований.

В работе [4] рассмотрены уплощающие свойства сечений касательного расслоения первого порядка относительно связности полного поднятия.

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств преобразований касательного расслоения второго порядка, наделенного связностью II-поднятия, которые индуцированы конциркулярными преобразованиями базисного многообразия.

Основные определения второго пункта взяты из работ [2, 3]. Показывается, что изучение уплощающих свойств диффеоморфизмов сводится к изучению уплощающих свойств произвольной геодезической кривой относительно специальной связности образа аффинной связности.

Третий пункт посвящен поднятиям инфинитезимального конциркулярного преобразования. Теорема этого пункта выявляет уплощающие свойства инфинитезимальных преобразований касательного расслоения второго порядка, порожденных поднятиями конформного киллингова векторного поля. Основные определения и свойства поднятий касательного расслоение второго порядка взяты из [5].

В четвертом пункте изучаются уплощающие свойства преобразований касательного расслоения второго порядка, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия. Здесь рассматриваются теорема об образе II-поднятия аффинной связности, теорема о тензоре аффинной деформации индуцированного диффеоморфизма, теорема об образе связности Леви – Чивитты. Приводится вспомогательная лемма, которая используется для нахождения кривизн произвольной геодезической кривой относительно образа аффинной связности. Отсюда следует основная теорема об уплощающих свойствах преобразований касательного расслоения второго порядка со связностью II-поднятия, которые индуцированы концциркулярными преобразованиями баз.

2. Необходимые сведения из теории p-геодезических отображений. Рассмотрим гладкое многообразие M с аффинной связностью ∇ без кручений. Пусть $\gamma\colon (a,b) \to M$ — гладкая кривая в M, причем ξ — поле касательных векторов вдоль γ, $\xi_1 = \nabla_\gamma \xi$ — поле векторов 1-й кривизны вдоль γ, $\xi_q = \nabla_\gamma \xi_{q-1}$ — поле векторов q-й кривизны вдоль γ.

Определение 1. *Говорят, что кривая γ в точке $x = \gamma(t_0)$ имеет уплощение q-го порядка, если в точке x векторы $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}$ линейно независимы, а векторы $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}, \xi_q$ линейно зависимы.*

Если кривая γ в каждой своей точке имеет уплощение p-го порядка, то она называется *p-геодезической* кривой.

Точка $x = \gamma(t_0)$ кривой γ называется *граничной точкой уплощения*, если в каждой окрестности точки x есть хотя бы одна точка кривой γ, в которой порядок уплощения отличается от порядка уплощения в точке x. Учитывая свойства внешнего произведения, получаем, что точка x кривой γ имеет уплощение p-го порядка тогда и только тогда, когда в точке x выполняются условия

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{p-1} \neq 0, \qquad \xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{p-1} \wedge \xi_p = 0. \tag{1}$$

Значит, чтобы кривая γ была p-геодезической, необходимо и достаточно выполнения условий (1) вдоль кривой γ.

Параметр t на p-геодезической кривой γ называется s-каноническим $(p \geqslant s \geqslant 1)$, если вдоль кривой выполняется равенство $\alpha_{p-s} = 0$.

Параметр t на p-геодезической кривой γ называется $s_1, s_2, \ldots, s_m$-каноническим $(p \geqslant s_1 > s_2 > \ldots > s_m \geqslant 1)$, если он является одновременно s_1-каноническим, s_2-каноническим, $\ldots$, s_m-каноническим.

Пусть (M, ∇) и $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ — аффинно-связные пространства.

Определение 2. *Диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ двух аффинно-связных пространств без кручения называется p-геодезическим, если для каждой геодезической кривой $\gamma\colon (a,b) \to M$ ее образ $\mu \circ \gamma$ является кривой, каждая точка которой имеет уплощение порядка $q \leqslant p$. Число q зависит как от выбора кривой γ, так и от точки на ней, а число p фиксировано и является наибольшим из всех q.*

p-Геодезический диффеоморфизм (на себя) $\pi\colon M \to M$ называется p-геодезическим конечным преобразованием аффинно-связного пространства (M, ∇).

Из определения 1 следует, что геометрически p-геодезические диффеоморфизмы характеризуются тем, что они геодезические кривые преобразуют в кривые, которые на отдельных участках (дугах) являются q-геодезическими кривыми, причем $q \leqslant p$.

Если при p-геодезическом диффеоморфизме $\mu\colon M \to \bar{M}$ канонический параметр каждой геодезической кривой γ является на p-геодезических кривых $\mu \circ$

$\circ\gamma$ s-каноническим $(p \geqslant s \geqslant 1)$, то μ называется s-каноническим p-геодезическим диффеоморфизмом.

Чтобы определить порядок уплощения диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ по определению, необходимо для каждой геодезической кривой γ в M найти наибольший из порядков уплощения точек кривой образа $\bar{\gamma} = \mu \circ \gamma$. Затем из найденных чисел выбрать наибольшее. Это и будет порядок уплощения диффеоморфизма μ.

Нахождение порядков уплощения точек кривой образа $\bar{\gamma}$ можно свести к нахождению порядков уплощения соответствующих точек геодезической кривой γ относительно специальной связности на многообразии M-образа аффинной связности $\bar{\nabla}$ при обратном диффеоморфизме μ^{-1} (см. [6, с. 189], § 30, раздел 3).

Образ аффинной связности $\bar{\nabla}$ при диффеоморфизме μ^{-1} определяется как аффинная связность $\widetilde{\nabla}$ на многообразии M правилом

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \mu_*^{-1}\left(\bar{\nabla}_{\mu_* X}\mu_* Y\right)$$

для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mu\colon M \to \bar{M}$ — диффеоморфизм многообразий, $\bar{\nabla}$ — аффинная связность на $\bar{M}$, $\widetilde{\nabla}$ — образ связности $\bar{\nabla}$ при диффеоморфизме μ^{-1}, $\gamma\colon (a,b) \to M$ — гладкая кривая в M и $\bar{\gamma} = \mu \circ \gamma$ — кривая-образ в $\bar{M}$.*

Для того чтобы кривая γ в произвольной точке $x = \gamma(t)$ имела уплощение порядка k относительно образа $\widetilde{\nabla}$, необходимо и достаточно, чтобы порядок уплощения кривой-образа $\bar{\gamma}$ в соответствующей точке $\gamma(t)$ был равен k.

Таким образом, порядок уплощения диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ равен наибольшему из порядков уплощения точек всех геодезических кривых в M. Эти порядки уплощения находятся относительно аффинной связности образа.

Нетрудно показать, что правило $P(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, определяет тензорное поле $P \in \mathfrak{T}_2^0(M)$. Это тензорное поле тесно связано с тензором аффинной деформации H диффеоморфизма μ (см. [6, с. 153], § 23, раздел 3) равенством $\mu_*(P(X,Y)) = H(X,Y)$. По этой причине тензорное поле P также будем называть тензором аффинной деформации диффеоморфизма μ.

Тогда для произвольного гладкого векторного поля χ, заданного вдоль гладкой кривой γ, справедливо равенство

$$\widetilde{\nabla}_\gamma \chi = \nabla_\gamma \chi + P(\xi, \chi), \tag{2}$$

где ξ — поле касательных векторов к кривой γ. Это равенство можно использовать для нахождения кривизн $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2, \ldots$ геодезической кривой γ относительно аффинной связности образа $\widetilde{\nabla}$.

Пусть $\tau\colon \widetilde{u}^h = u^h + \varepsilon X^h\left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right)$ — инфинитезимальное преобразование многообразия (M, ∇), соответствующее векторному полю $X = X^h \dfrac{\partial}{\partial u^h}$, ε — инфинитезимальный параметр. Для произвольной кривой $\gamma\colon (a,b) \to M$ рассмотрим преобразованную кривую $\widetilde{\gamma} = \tau \circ \gamma$, причем $\widetilde{\xi}$ — поле касательных векторов вдоль $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\xi}_1 = \nabla_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\xi}$ — поле векторов 1-й кривизны вдоль $\widetilde{\gamma}, \ldots, \widetilde{\xi}_q = \nabla_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\xi}_{q-1}$ — поле векторов q-й кривизны вдоль $\widetilde{\gamma}$.

Определение 3. *Говорят, что инфинитезимальное преобразование τ (или векторное поле X) сообщает геодезической кривой $\gamma\colon (a,b) \to M$ в точке $x =$*

$= \gamma(t_0)$ *уплощение q-го порядка, если в точке x выполняются условия*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^q}\tilde{\xi}\wedge\tilde{\xi}_1\wedge\ldots\wedge\tilde{\xi}_{q-1}\wedge\tilde{\xi}_q = 0 \tag{3}$$

и число q является наименьшим из возможных.

Определение 4. *Инфинитезимальное локальное преобразование τ многообразия (M,∇) называется p-геодезическим инфинитезимальным преобразованием (p-г. и. п.), если на каждой геодезической кривой $\gamma\colon (a,b)\to M$ оно сообщает каждой точке уплощение q-го порядка, $q\leqslant p$. Число q может зависеть как от выбора геодезической кривой γ, так и от выбора точки на ней, а число p является наибольшим из всех возможных чисел q.*

С геометрической точки зрения p-г. и. п. имеют ту особенность, что они преобразуют любую геодезическую кривую γ в кривую $\widetilde{\gamma} = \tau\circ\gamma$, для которой ее уплощенное приближение $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ является на отдельных участках (дугах) q-геодезической кривой, причем $q\leqslant p$.

Если при p-г. и. п. τ канонический параметр каждой геодезической кривой γ является на соответствующих уплощающих приближениях $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$ s-каноническим параметром, то τ называется s-каноническим p-г. и. п.

Инфинитезимальное преобразование $\tau\colon M\to M$ будет p-геодезическим тогда и только тогда, когда для поля X выполнены условия

$$\delta^{[h}_{(i}\, L^{h_1}_{j_1j_2}\ldots L^{h_{p-1}}_{k_1k_2\ldots k_p} L^{h_p]}_{l_1l_2\ldots\, l_{p+1})} = 0, \qquad \delta^{[h}_{(i}\, L^{h_1}_{j_1j_2}\ldots L^{h_{p-1}]}_{k_1k_2\ldots\, k_p)} \neq 0. \tag{4}$$

Здесь $L^h_{ij} = L_X\Gamma^h_{ij}$ — производная Ли коэффициентов аффинной связности ∇ и $L^h_{i_1i_2\ldots i_qi_{q+1}} = \nabla_{(i_{q+1}}\, L^h_{i_1i_2\ldots\, i_q)}$.

Соотношения (4) называются основными уравнениями p-г. и. п.

Для того чтобы p-г. и. п. τ было $s_1,\ s_2,\ldots,s_m$-каноническим $(p\geqslant s_1 > > s_2 > \ldots > s_m\geqslant 1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\delta^{[h}_{(i}\ \ldots\hat{L}^{h_{p-s_1}}_{j_1j_2\ldots j_{p-s_1+1}}\ldots\hat{L}^{h_{p-s_2}}_{k_1k_2\ldots k_{p-s_2+1}}\ldots\hat{L}^{h_{p-s_m}}_{r_1r_2\ldots r_{p-s_m+1}}\ldots L^{h_p]}_{l_1l_2\ldots\, l_{p+1})} = 0, \tag{5}$$

где запись $\hat{L}^h_{i_1i_2\ldots i_qi_{q+1}}$ означает, что произведение не содержит множитель $L^h_{i_1i_2\ldots i_qi_{q+1}}$.

3. Инфинитезимальные конциркулярные преобразования. Инфинитезимальное преобразование

$$\tau\colon \widetilde{u}^h = u^h + \varepsilon X^h\left(u^1,u^2,\ldots,u^n\right)$$

(псевдо)риманова пространства (M,g), соответствующее векторному полю $X = = X^h\dfrac{\partial}{\partial u^h}$, называется *конциркулярным*, если оно конформное, т. е.

$$L_X g_{ij} = a g_{ij}, \tag{6}$$

где функция a порождает специальное конциркулярное ковекторное поле $a_i = \dfrac{\partial a}{\partial u^i}$, удовлетворяющее равенству

$$\nabla_j a_i = \varphi g_{ij}. \tag{7}$$

Здесь ∇ — риманова связность, порожденная метрикой g. Уравнения (6) и (7) называются *основными уравнениями инфинитезимального конциркулярного преобразования.*

Векторное поле X называют *конформным киллинговым полем*. Конциркулярное инфинитезимальное преобразование геометрически характеризуется тем, что оно с точностью до членов второго порядка сохраняет геодезические окружности (циклы), т. е. кривые, у которых первая кривизна Френе постоянна, а последующие равны нулю.

В [3] показано, что инфинитезимальное конциркулярное преобразование является 1-каноническим 2-г. и. п., если $a \neq \mathrm{const}$, и абсолютно каноническим 1-г. и. п., если $a = \mathrm{const}$.

Естественным образом возникает вопрос о том, какими уплощающими свойствами обладают инфинитезимальные преобразования касательных расслоений, которые соответствуют поднятиям конформного киллингова векторного поля. Исчерпывающий ответ на этот вопрос для касательного расслоения $T(M)$ дан в [3].

В случае касательного расслоения $T^2(M)$ поднятия X^0, X^I, X^{II} векторного поля X порождают соответственно инфинитезимальные преобразования расслоения $T^2(M)$:

$$\tau^0\colon \begin{cases} \widetilde{u}^k = u^k, \\ \widetilde{u}^{\bar{k}} = u^{\bar{k}}, \\ \widetilde{u}^{\bar{\bar{k}}} = u^{\bar{\bar{k}}} + \varepsilon X^k, \end{cases} \qquad \tau^I\colon \begin{cases} \widetilde{u}^k = u^k, \\ \widetilde{u}^{\bar{k}} = u^{\bar{k}} + \dfrac{1}{2}\varepsilon X^k, \\ \widetilde{u}^{\bar{\bar{k}}} = u^{\bar{\bar{k}}} + \varepsilon \partial X^k, \end{cases}$$

$$\tau^{II}\colon \begin{cases} \widetilde{u}^k = u^k + \varepsilon X^k, \\ \widetilde{u}^{\bar{k}} = u^{\bar{k}} + \varepsilon \partial X^k, \\ \widetilde{u}^{\bar{\bar{k}}} = u^{\bar{\bar{k}}} + \varepsilon \partial^2 X^k, \end{cases}$$

где $\partial X^k = u^{\bar{i}} \partial_i X^k$ и $\partial^2 X^k = u^{\bar{\bar{i}}} \partial_i X^k + u^{\bar{i}} u^{\bar{j}} \partial_i \partial_j X^k$.

Уплощающие свойства преобразований τ^0, τ^I, τ^{II} выражаются следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть τ — конциркулярное* (*не гомотетическое, т. е. $a \neq \mathrm{const}$*) *инфинитезимальное преобразование* (*псевдо*)*риманова пространства (M, g), соответствующее конформному киллингову полю X. Тогда инфинитезимальные преобразования τ^0, τ^I, τ^{II} касательного расслоения $T^2(M)$, соответствующие поднятиям X^0, X^I, X^{II}, обладают следующими уплощающими свойствами относительно метрики g^{II} :*

1) *в общем случае при $\varphi \neq \mathrm{const}$:*

τ^0 *является* 3, 2-*каноническим* 3-*г. и. п.,*

τ^I *является* 4, 3-*каноническим* 4-*г. и. п.,*

τ^{II} *является* 3-*каноническим* 4-*г. и. п.*;

2) *в случае $\varphi = \mathrm{const} \neq 0$ τ^0, τ^I, τ^{II} являются абсолютно каноническими* 3-*г. и. п.*;

3) *в случае $\varphi = \mathrm{const} = 0$ τ^0, τ^I, τ^{II} являются абсолютно каноническими* 2-*г. и. п.*

Доказательство. Как показано в [5], поднятие ∇^{II} римановой связности ∇, порожденной метрикой g, является римановой связностью на $T^2(M)$, порожденной поднятием g^{II}.

Определим векторное A и ковекторное ω поля правилом

$$\omega = a_i du^i, \qquad A = a^h \frac{\partial}{\partial u^h}, \qquad a^h = g^{hk} a_k.$$

Тогда основные уравнения инфинитезимального конциркулярного преобразования можно записать в инвариантной форме

$$L_X g = ag, \qquad \nabla\omega = \varphi g.$$

Выражение для ковариантного дифференциала ∇A векторного поля A имеет вид

$$\nabla A = \varphi\delta,$$

где δ — единичный аффинор.

В [3] получено выражение для производной Ли от аффинной связности ∇ в инвариантной форме

$$\left(L_X \nabla\right)(Y, Z) = \frac{1}{2}\big(\omega(Y)Z + \omega(Z)Y - g(Y, Z)A\big). \tag{8}$$

Случай преобразования τ^0. Беря от обеих частей равенства (8) 0-поднятие и учитывая, что для равенства двух тензорных полей типа $(s, 0)$ и $(s, 1)$ на $T^2(M)$ достаточно их совпадения на II-поднятиях от произвольных тензорных полей, заданных на базисном многообразии M, получаем

$$L^H_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\omega^0_J {\delta^0}^H_I + \omega^0_I {\delta^0}^H_J - g^0_{I\,J} {A^0}^H\right). \tag{9}$$

Учитывая равенства

$$\nabla^{II}\omega^0 = (\nabla\omega)^0 = (\varphi g)^0 = \varphi^0 g^0, \qquad \nabla^{II} A^0 = (\nabla A)^0 = (\varphi\delta)^0 = \varphi^0\delta^0, \tag{10}$$

имеем

$$L^H_{I\,J\,K} = \nabla^{II}_{(K} L^H_{I\,J)} = \frac{1}{2}\varphi^0 g^0_{(I\,J} {\delta^0}^H_{K)}. \tag{11}$$

Поскольку

$$\nabla^{II}_M \varphi^0 = \varphi^0_M = \frac{\partial\varphi^0}{\partial u^M}, \qquad \nabla^{II} g^0 = (\nabla g)^0 = 0, \qquad \nabla^{II}\delta^0 = (\nabla\delta)^0 = 0,$$

то

$$L^H_{I\,J\,K\,M} = \nabla^{II}_{(M} L^H_{I\,J\,K)} = \frac{1}{2}\varphi^0_{(M} g^0_{I\,J} {\delta^0}^H_{K)}. \tag{12}$$

Учитывая равенства (9), (11) и (12), находим

$$\delta^{[H}_{(I} L^{H_1}_{J_1 J_2} L^{H_2}_{K_1 K_2 K_3} L^{H_3]}_{M_1 M_2 M_3 M_4)} = 0,$$

где квадратные скобки означают альтернирование.

Данное равенство показывает, что в общем случае ($\varphi \neq \mathrm{const}$) инфинитезимальное преобразование τ^0 касательного расслоения $T^2(M)$, соответствующее поднятию X^0, является 3-г. и. п., а равенство

$$L^{[H_1}_{(K_1K_2K_3}L^{H_2]}_{M_1M_2M_3M_4)} = 0$$

показывает, что τ^0 является 3, 2-каноническим.

Если $\varphi = \mathrm{const} \neq 0$, то из равенства (12) будем иметь

$$L^H_{M_1M_2M_3M_4} = 0.$$

Данное равенство показывает, что τ^0 является абсолютно каноническим 3-г. и. п.

Если $\varphi = \mathrm{const} = 0$, то из равенства (11) получаем

$$L^H_{K_1K_2K_3} = 0.$$

Это равенство показывает, что τ^0 является абсолютно каноническим 2-г. и. п.

Случай преобразования τ^I. Берем I-поднятие от обеих частей равенства (8) и, учитывая замечание о равенстве тензорных полей на $T^2(M)$, имеем

$$L^H_{I\,J} = \frac{1}{2}\left(\omega^I_J\delta^0{}^H_I + \omega^0_J\delta^I{}^H_I + \omega^I_I\delta^0{}^H_J + \omega^0_I\delta^I{}^H_J - g^0_{I\,J}A^I{}^H - g^I_{I\,J}A^0{}^H\right). \tag{13}$$

Применяя равенства (10), а также равенства

$$\begin{gathered}\nabla^{II}\omega^I = (\nabla\omega)^I = (\varphi g)^I = \varphi^I g^0 + \varphi^0 g^I,\\ \nabla^{II}A^I = (\nabla A)^I = (\varphi\delta)^I = \varphi^I\delta^0 + \varphi^0\delta^I,\end{gathered} \tag{14}$$

находим

$$L^H_{I\,J\,K} = \nabla^{II}_{(K}L^H_{I\,J)} = \frac{1}{2}\left(\varphi^I g^0_{(J\,K} + \varphi^0 g^I_{(J\,K}\right)\delta^0{}^H_{I)} - \frac{1}{2}\varphi^0 g^0_{(J\,K}\delta^I{}^H_{I)}. \tag{15}$$

Из последнего равенства получаем

$$L^H_{I\,J\,K\,M} = \nabla^{II}_{(M}L^H_{I\,J\,K)} = \frac{1}{2}\left(\varphi^I_{(M}g^0_{J\,K} + \varphi^0_{(M}g^I_{JK}\right)\delta^0{}^H_{I)} - \frac{1}{2}\varphi^0_{(M}g^0_{J\,K}\delta^I{}^H_{I)}, \tag{16}$$

где

$$\nabla^{II}_M\varphi^0 = \varphi^0_M = \frac{\partial\varphi^0}{\partial u^M}, \qquad \nabla^{II}_M\varphi^I = \varphi^1_M = \frac{\partial\varphi^I}{\partial u^M}.$$

Аналогично

$$\begin{gathered}L_{IJKMP}{}^H = \nabla^{II}_{(P}L_{IJKM)}{}^H = \\ = \frac{1}{2}\left(\varphi^I_{(M}g^0_{J\,K} + \varphi^0_{(P\,M}g^I{}_{J\,K}\right)\delta^0{}^H_{I)} - \frac{1}{2}\varphi^0_{(P\,M}g^0{}_{J\,K}\delta^I{}^H_{I)},\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\varphi^0_{P\,M} = \nabla^{II}_P\varphi^0_M, \qquad \varphi^I_{P\,M} = \nabla^{II}_P\varphi^I_M.$$

Из равенств (13), (15) – (17) будем иметь

$$\delta^{[H}_{(I}L_{J_1\,J_2}{}^{H_1}L_{K_1\,K_2\,K_3}{}^{H_2}L_{M_1\,M_2\,M_3\,M_4}{}^{H_3}L_{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5)}{}^{H_4]} = 0.$$

Данное равенство показывает, что в общем случае ($\varphi \neq \mathrm{const}$) инфинитезимальное преобразование τ^I касательного расслоения $T^2(M)$, соответствующее поднятию X^I, является 4-г. и. п., а равенство

$$L_{(K_1\,K_2\,K_3}{}^{[H_1}L_{M_1\,M_2\,M_3\,M_4}{}^{H_2}L_{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5)}{}^{H_3]}=0$$

показывает, что τ^I является 4, 3-каноническим.

Если $\varphi=\mathrm{const}\neq 0$, то из равенства (16) находим

$$L_{M_1\,M_2\,M_3\,M_4}{}^{H}=0.$$

Данное равенство показывает, что τ^I является абсолютно каноническим 3-г. и. п.

Если $\varphi=\mathrm{const}=0$, то из равенства (15) получаем

$$L_{K_1\,K_2\,K_3}{}^{H}=0.$$

Это равенство показывает, что τ^I является абсолютно каноническим 2-г. и. п.

Случай преобразования τ^{II}. Берем II-поднятие от обеих частей равенства (8) и, учитывая замечание о равенстве тензорных полей на $T^2(M)$, находим

$$L_{I\,J}{}^{H}=\frac{1}{2}\Big(\omega_J^{II}\delta^0{}_I^H+2\omega_J^I\delta^I{}_I^H+\omega_J^0\delta_I^H+\omega_I^{II}\delta^0{}_J^H+2\omega_I^1\delta^I{}_J^H+\omega_I^0\delta_J^H-$$
$$-g_{I\,J}^0A^{II\,H}-2g_{I\,J}^IA^{I\,H}-g_{I\,J}^{II}A^{0\,H}\Big). \tag{18}$$

Используя равенства (10) и (14), а также равенства

$$\nabla^{II}\omega^{II}=(\nabla\omega)^{II}=(\varphi\,g)^{II}=\varphi^{II}g^0+2\varphi^Ig^I+\varphi^0g^{II},$$

$$\nabla^{II}A^{II}=(\nabla A)^{II}=(\varphi\,\delta)^{II}=\varphi^{II}\delta^0+2\varphi^I\delta^I+\varphi^0\delta,$$

имеем

$$L_{I\,J\,K}{}^{H}=\nabla^{II}_{(K}L_{I\,J)}^{H}=\frac{1}{2}\left(\varphi^{II}g^0_{(J\,K}+2\varphi^Ig^I_{(J\,K}+\varphi^0g^{II}_{(J\,K}\right)\delta^0{}^H_{I)}+$$
$$+\left(\varphi^Ig^0_{(J\,K}+\varphi^0g^I_{(J\,K}\right)\delta^I{}^H_{I)}+\frac{1}{2}\varphi^0g^0_{(J\,K}\delta^H_{I)}. \tag{19}$$

Отсюда получаем

$$L_{IJKM}{}^{H}=\nabla^{II}_{(M}L_{I\,J\,K)}^{H}=\frac{1}{2}\left(\varphi^{II}_{(M}g^0_{J\,K}+2\varphi^I_{(M}g^I_{J\,K}+\varphi^0_{(M}g^{II}_{J\,K}\right)\delta^0{}^H_{I)}+$$
$$+\left(\varphi^I_{(M}g^0_{J\,K}+\varphi^0_{(M}g^I_{J\,K}\right)\delta^I{}^H_{I)}+\frac{1}{2}\varphi^0_{(M}g^0_{J\,K}\delta^H_{I)}, \tag{20}$$

где

$$\nabla^{II}_M\varphi^0=\varphi^0_M=\frac{\partial\varphi^0}{\partial u^M},\qquad\nabla^{II}_M\varphi^I=\varphi^I_M=\frac{\partial\varphi^I}{\partial u^M},\qquad\nabla^{II}_M\varphi^{II}=\varphi^{II}_M=\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial u^M}.$$

Аналогично

$$L_{IJKMP}{}^{H}=\nabla^{II}_{(P}L_{I\,J\,K\,M)}^{H}=\frac{1}{2}\left(\varphi^{II}_{(PM}g^0_{J\,K}+2\varphi^I_{(PM}g^I_{J\,K}+\varphi^0_{(PM}g^{II}_{JK}\right)\delta^0{}^H_{I)}+$$
$$+\left(\varphi^I_{(PM}g^0_{J\,K}+\varphi^0_{(PM}g^I_{J\,K}\right)\delta^I{}^H_{I)}+\frac{1}{2}\varphi^0_{(PM}g^0_{J\,K}\delta^H_{I)}, \tag{21}$$

где

$$\varphi^0_{P\,M} = \nabla^{II}_P \varphi^0_M, \qquad \varphi^I_{P\,M} = \nabla^{II}_P \varphi^I_M, \qquad \varphi^{II}_{P\,M} = \nabla^{II}_P \varphi^{II}_M.$$

Из равенств (18), (19), (20) и (21) имеем

$$\delta^{[H}_{(I} L_{J_1\,J_2}{}^{H_1} L_{K_1\,K_2\,K_3}{}^{H_2} L_{M_1\,M_2\,M_3\,M_4}{}^{H_3} L_{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5)}{}^{H_4]} = 0.$$

Данное равенство показывает, что в общем случае ($\varphi \neq \mathrm{const}$) инфинитезимальное преобразование τ^{II} касательного расслоения $T^2(M)$, соответствующее поднятию X^{II}, является 4-г. и. п., а равенство

$$\delta^{[H}_{(I} L_{K_1\,K_2\,K_3}{}^{H_1} L_{M_1\,M_2\,M_3\,M_4}{}^{H_2} L_{P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5)}{}^{H_3]} = 0$$

показывает, что τ^{II} является 3-каноническим.

Если $\varphi = \mathrm{const} \neq 0$, то из равенства (20) будем иметь

$$L_{M_1 M_2 M_3, M_4}{}^{H} = 0.$$

Данное равенство показывает, что τ^{II} является абсолютно каноническим 3-г. и. п.

Если $\varphi = \mathrm{const} = 0$, то из равенства (19) получаем

$$L_{K_1 K_2 K_3}{}^{H} = 0.$$

Это равенство показывает, что τ^{II} является абсолютно каноническим 2-г. и. п.

Теорема доказана.

4. Konциркулярные преобразования. Нам понадобятся следующие теоремы об образе аффинной связности.

Теорема 3. *Пусть $\mu\colon M \to \bar{M}$ — диффеоморфизм многообразия M на метрическое пространство $(\bar{M}, \bar{g})$, $g = \mu^*(\bar{g})$ — образ метрического тензора $\bar{g}$ при диффеоморфизме μ, $\bar{\nabla}$ — связность Леви–Чивитты метрики $\bar{g}$.*

Тогда образ $\widetilde{\nabla}$ связности $\bar{\nabla}$ при обратном диффеоморфизме μ^{-1} совпадает со связностью ∇ Леви–Чивитты метрики g.

Доказательство непосредственно следует из определений и свойств.

Теорема 4. *Пусть $\mu\colon M \to \bar{M}$ — диффеоморфизм многообразия M на аффинно-связное пространство $(\bar{M}, \bar{\nabla})$, $\widetilde{\nabla}$ — образ связности $\bar{\nabla}$ при обратном диффеоморфизме μ^{-1} и $\mu_*\colon T^2(M) \to T^2(\bar{M})$ — индуцированный диффеоморфизм касательных расслоений второго порядка.*

Тогда образ $\widetilde{\bar{\nabla}^{II}}$ поднятия $\bar{\nabla}^{II}$ аффинной связности $\bar{\nabla}$ совпадает с поднятием $\widetilde{\nabla}^{II}$ образа $\widetilde{\nabla}$.

Доказательство непосредственно следует из определений и свойств.

Преобразование $\mu\colon M \to M$ (псевдо)риманова пространства (M, g) называется *конциркулярным*, если выполняется равенство

$$\bar{g} = e^{2\sigma} g, \tag{22}$$

где $\bar{g} = \mu^*(g)$ — образ метрического тензора g при преобразовании μ, а функция σ порождает специальное ковекторное поле $\sigma_i = \dfrac{\partial \sigma}{\partial u^i}$, которое удовлетворяет условию

$$\nabla_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_j + \nu\, g_{i\,j}. \tag{23}$$

Уравнения (22) и (23) называются *основными уравнениями конциркулярного преобразования*.

Определим ковекторное поле θ и векторное поле B, которые в карте $(U; u^h)$ имеют локальные представления соответственно $\theta = \sigma_i du^i$ и $B = \sigma^h \dfrac{\partial}{\partial u^h}$, где $\sigma^h = g^{h\,k}\sigma_k$. Тогда равенство (23) примет вид

$$\nabla\theta = \theta \otimes \theta + \nu\, g, \tag{24}$$

а выражение для ковариантного дифференциала ∇B векторного поля B —

$$\nabla B = \theta \otimes B + \nu\delta. \tag{25}$$

Для произвольного векторного поля X на M получим

$$g(B, X) = X \cdot \sigma = \theta(X).$$

Тензор P аффинной деформации конциркулярного преобразования μ имеет вид

$$P(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \theta(X)Y + \theta(Y)X - g(X, Y)B. \tag{26}$$

Изучим уплощающие свойства преобразования μ_* касательного расслоения $T^2(M)$, индуцированного конциркулярным преобразованием μ базисного многообразия M.

Теорема 5. *II-поднятие тензора аффинной деформации P диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ совпадает с тензором аффинной деформации $\bar{P}$ индуцированного преобразования $\mu_*\colon T^2(M) \to T^2(\bar{M})$.*

Доказательство следует непосредственно из определений и свойств поднятий.

Берем II-поднятие от обеих частей равенства (26). Как отмечено в [5], для равенства тензорных полей типа $(0, s)$ и $(1, s)$ на $T^2(M)$ достаточно равенства этих тензорных полей на II-поднятиях произвольных векторных полей многообразия M. Тогда получим выражение для тензора аффинной деформации преобразования, индуцированного конциркулярным преобразованием

$$\bar{P} = \theta^{II} \otimes \delta^0 + 2\theta^I \otimes \delta^I + \theta^0 \otimes \delta + \delta^0 \otimes \theta^{II} + 2\delta^I \otimes \theta^I + \delta \otimes \theta^0 -$$
$$- g^{II} \otimes B^0 - 2g^I \otimes B^I - g^0 \otimes B^{II}. \tag{27}$$

Лемма. *Пусть $\gamma\colon (a, b) \to T^2(M)$ — геодезическая кривая в $T^2(M)$ относительно поднятия ∇^{II}, отнесенная к каноническому параметру. Допустим, что вдоль кривой γ задано векторное поле*

$$\chi = a\,\delta^0(\xi) + b\,\delta^I(\xi) + c\,\xi + d\,B^0 + e\,B^I + f\,B^{II},$$

где ξ — поле касательных векторов вдоль кривой γ, δ — единичный аффинор на M, а коэффициенты a, b, c, d, e, f определяются правилом: найдутся такие тензорные поля $T_k \in \mathfrak{T}^0_k(M)$ и $R_k \in \mathfrak{T}^0_{k+1}(M)$, что

$$a = T_k^{II}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{k}, \qquad b = 2T_k^{I}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{k}, \qquad c = T_k^{0}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{k},$$

$$d = R_k^{II}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{k+1}, \qquad e = 2R_k^{I}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{k+1}, \qquad f = R_k^{0}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{k+1}.$$

Тогда ковариантная производная $\widetilde{\nabla}^{II}_{\gamma}\chi$ *этого векторного поля выражается равенством*

$$\widetilde{\nabla}^{II}_{\gamma}\chi = a'\,\delta^0(\xi) + b'\,\delta^I(\xi) + c'\,\xi + d'\,B^0 + e'\,B^I + f'\,B^{II},$$

где коэффициенты a', b', c', d', e', f' *определяются правилом*

$$a' = T^{II}_{k+1}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{k+1},\qquad b' = 2T^{I}_{k+1}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{k+1},\qquad c' = T^{0}_{k+1}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{k+1},$$

$$d' = R^{II}_{k+1}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{k+2},\qquad e' = 2R^{I}_{k+1}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{k+2},\qquad f' = R^{0}_{k+1}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{k+2},$$

$$T_{k+1} = \nabla T_k + 2T_k\otimes\theta + (\nu+\Delta_1\sigma)\,R_k,\qquad R_{k+1} = \nabla R_k + R_k\otimes\theta - T_k\otimes g.$$

Доказательство. Учитывая равенство (2), получаем

$$\widetilde{\nabla}^{II}_{\gamma}\chi = \nabla^{II}_{\gamma}\chi + \bar{P}(\xi,\chi).$$

Введем обозначения

$$a' = \nabla^{II}_{\gamma}a + d(\nu+\Delta_1\sigma)^0 + e(\nu+\Delta_1\sigma)^I + f(\nu+\Delta_1\sigma)^{II} +$$
$$+\, 2a\theta^0(\xi) + 2b\theta^I(\xi) + 2c\theta^{II}(\xi),$$
$$b' = \nabla^{II}_{\gamma}b + e(\nu+\Delta_1\sigma)^0 + 2f(\nu+\Delta_1\sigma)^I + 2b\theta^0(\xi) + 4c\theta^I(\xi),$$
$$c' = \nabla^{II}_{\gamma}c + f(\nu+\Delta_1\sigma)^0 + 2c\theta^0(\xi),$$
$$d' = \nabla^{II}_{\gamma}d + d\theta^0(\xi) + e\theta^I(\xi) + f\theta^{II}(\xi) - ag^0(\xi,\xi) - bg^I(\xi,\xi) - cg^{II}(\xi,\xi),$$
$$e' = \nabla^{II}_{\gamma}e + e\theta^0(\xi) + 2f\theta^I(\xi) - bg^0(\xi,\xi) - 2cg^I(\xi,\xi),$$
$$f' = \nabla^{II}_{\gamma}f + f\theta^0(\xi) - cg^0(\xi,\xi).$$

Тогда

$$\widetilde{\nabla}^{II}_{\gamma}\chi = a'\cdot\delta^0(\xi) + b'\cdot\delta^I(\xi) + c'\cdot\xi + d'\cdot B^0 + e'\cdot B^I + f'\cdot B^{II}.$$

Для завершения доказательства вспомогательной леммы осталось найти выражения для коэффициентов a', b', c', d', e', f'. Исходя из свойств ковариантной производной тензорного поля вдоль кривой и выражений для коэффициентов a, b, c, d, e, f, получаем выражение для коэффициента a':

$$a' = \left(\nabla T_k + 2T_k\otimes\theta + (\nu+\Delta_1\sigma)R_k\right)^{II}(\xi,\xi,\ldots,\xi).$$

Выражения для коэффициентов b', c', d', e' и f' примут вид

$$b' = 2\left(\nabla T_k + 2T_k\otimes\theta + (\nu+\Delta_1\sigma)R_k\right)^{I}(\xi,\xi,\ldots,\xi),$$

$$c' = \left(\nabla T_k + 2T_k\otimes\theta + (\nu+\Delta_1\sigma)R_k\right)^{0}(\xi,\xi,\ldots,\xi),$$

$$d' = \left(\nabla R_k + R_k\otimes\theta - T_k\otimes g\right)^{II}(\xi,\xi,\ldots,\xi),$$

$$e' = 2\left(\nabla R_k + R_k \otimes \theta - T_k \otimes g\right)^I (\xi, \xi, \ldots, \xi),$$

$$f' = \left(\nabla R_k + R_k \otimes \theta - T_k \otimes g\right)^0 (\xi, \xi, \ldots, \xi).$$

Вводя в рассмотрение тензорные поля $T_{k+1} \in \mathfrak{T}^0_{k+1}(M)$ и $R_{k+1} \in \mathfrak{T}^0_{k+2}(M)$ правилом

$$T_{k+1} = \nabla T_k + 2T_k \otimes \theta + (\nu + \Delta_1 \sigma) R_k, \qquad R_{k+1} = \nabla R_k + R_k \otimes \theta - T_k \otimes g,$$

получаем требуемое.

Теорема 6. *Пусть μ — конциркулярное (не гомотетическое) преобразование (псевдо)риманова пространства (M, g), которое описывается уравнениями*

$$\overline{g} = e^{2\sigma} g, \qquad \nabla_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_j + \nu\, g_{i\,j}.$$

Тогда индуцированное преобразование $\mu_*\colon T^2(M) \to T^2(M)$ касательного расслоения $T^2(M)$ относительно связности полного поднятия обладает следующими уплощающими свойствами:

1) *в общем случае μ_* является 6-геодезическим преобразованием;*

2) *для того чтобы индуцированное преобразование μ_* было 4-геодезическим, необходимо и достаточно выполнения равенства $\nu = \Delta_1 \sigma$.*

Если преобразование $\mu\colon M \to M$ гомотетическое, т. е. $\sigma = \mathrm{const}$, то индуцированное преобразование μ_* является гомотетическим, а значит, абсолютно каноническим 1-геодезическим (т. е. аффинным) преобразованием.

Доказательство. В начале рассмотрим случай гомотетического преобразования, т. е. $\sigma = \mathrm{const}$. Беря II-поднятие от обеих частей равенства $\overline{g} = e^{2\sigma} g$, получаем

$$\overline{g}^{II} = e^{2\sigma^0} g^{II}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда преобразование $\mu\colon M \to M$ не является гомотетическим, т. е. $\sigma \neq \mathrm{const}$.

Возьмем на $T^2(M)$ произвольную геодезическую кривую $\gamma\colon (a,b) \to T^2(M)$, относительно поднятия ∇^{II} отнесенную к каноническому параметру.

Векторное поле ξ может быть представлено в виде

$$\xi = a_0 \cdot \delta^0(\xi) + b_0 \cdot \delta^I(\xi) + c_0 \cdot \xi + d_0 \cdot B^0 + e_0 \cdot B^I + f_0 \cdot B^{II},$$

где $a_0 = b_0 = 0$, $c_0 = 1$, $d_0 = e_0 = f_0 = 0$.

Определим функцию $T_0 \in \mathfrak{F}(M)$ и линейную форму $R_0 \in \mathfrak{T}^0_1(M)$ правилом

$$T_0(p) = 1, \qquad R_0(p) = 0 \quad \forall p \in M.$$

Поскольку функция T_0 и ковектор R_0 постоянны, справедливы равенства $T_0^{II} = T_0^I = 0$, $R_0^{II} = R_0^I = 0$; кроме того, $T_0^0 = T_0 = 1$, $R_0^0 = R_0 = 0$. Значит,

$$a_0 = T_0^{II}, \qquad b_0 = 2T_0^I, \qquad c_0 = T_0^0, \qquad d_0 = R_0^{II}, \qquad e_0 = 2R_0^I, \qquad f_0 = R_0^0.$$

Поэтому к векторному полю ξ можно применить вспомогательную лемму. В результате этого получим выражение для векторного поля $\overline{\xi}_1$:

$$\overline{\xi}_1 = \overline{\nabla}^{II}_\gamma \xi = a_1 \cdot \delta^0(\xi) + b_1 \cdot \delta^I(\xi) + c_1 \cdot \xi + d_1 \cdot B^0 + e_1 \cdot B^I + f_1 \cdot B^{II},$$

где

$$a_1 = T_1^{II}(\xi), \qquad b_1 = 2T_1^I(\xi), \qquad c_1 = T_1^0(\xi),$$
$$d_1 = R_1^{II}(\xi,\xi), \qquad e_1 = 2R_1^I(\xi,\xi), \qquad f_1 = R_1^0(\xi,\xi),$$
$$T_1 = \nabla T_0 + 2T_0 \otimes \theta + (\nu + \Delta_1\sigma)R_0, \qquad R_1 = \nabla R_0 + R_0 \otimes \theta - T_0 \otimes g.$$

Подставляя выражения для T_0, R_0, получаем

$$T_1 = 2\theta, \qquad R_1 = -g.$$

Найдем выражения для внешнего произведения $\xi \wedge \overline{\xi}_1$. Будем иметь

$$\xi \wedge \overline{\xi}_1 = a_1 \cdot \xi \wedge \delta^0(\xi) + b_1 \cdot \xi \wedge \delta^I(\xi) + d_1 \cdot \xi \wedge B^0 + e_1 \cdot \xi \wedge B^I + f_1 \cdot \xi \wedge B^{II}.$$

Из линейной независимости векторов $\delta^0(\xi)$, $\delta^I(\xi)$, ξ, B^0, B^1, B^{II} следует линейная независимость внешних произведений: $\xi \wedge \delta^0(\xi)$, $\xi \wedge \delta^I(\xi)$, $\xi \wedge B^0$, $\xi \wedge B^I$, $\xi \wedge B^{II}$. Поскольку $f_1 = -g^0(\xi,\xi) \neq 0$, то $\xi \wedge \overline{\xi}_1 \neq 0$.

Теперь, применяя вспомогательную лемму к векторному полю $\overline{\xi}_1$, получаем выражение для векторного поля $\overline{\xi}_2$:

$$\overline{\xi}_2 = \overline{\nabla}_\gamma^{II}\overline{\xi}_1 = a_2 \cdot \delta^0(\xi) + b_2 \cdot \delta^I(\xi) + c_2 \cdot \xi + d_2 \cdot B^0 + e_2 \cdot B^I + f_2 \cdot B^{II},$$
$$a_2 = T_2^{II}(\xi,\xi), \qquad b_2 = 2T_2^I(\xi,\xi), \qquad c_2 = T_2^0(\xi,\xi),$$
$$d_2 = R_2^{II}(\xi,\xi,\xi), \qquad e_2 = 2R_2^I(\xi,\xi,\xi), \qquad f_2 = R_2^0(\xi,\xi,\xi),$$

где

$$T_2 = \nabla T_1 + 2T_1 \otimes \theta + (\nu + \Delta_1\sigma)R_1, \qquad R_2 = \nabla R_1 + R_1 \otimes \theta - T_1 \otimes g.$$

Подставляя выражения для T_1, R_1, находим

$$T_2 = 6\theta \otimes \theta + (\nu - \Delta_1\sigma)g, \qquad R_2 = -3\theta \otimes g.$$

Определим тензорные поля S_2 и V_2 правилом

$$S_2 = -3\theta, \qquad V_2 = T_2 + 2S_2 \otimes \theta.$$

Тогда, с одной стороны, $R_2 = (-3\theta) \otimes g = S_2 \otimes g$, а с другой —

$$V_2 = (\nu - \Delta_1\sigma)g.$$

Легко проверить, что внешнее произведение $\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2$ линейно выражается через линейно независимое семейство внешних произведений, составленных из векторов $\delta^0(\xi)$, $\delta^I(\xi)$, ξ, B^0, B^I, B^{II}, с коэффициентами, равными минорам 2-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & e_2 & f_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим минор $M_{1,2}^{4,5}$. Тогда

$$M_{1,2}^{4,5} = 2g^0(\xi,\xi)^2(-3\theta)^I(\xi) = -6g^0(\xi,\xi)^2\theta^I(\xi) \neq 0,$$

так как $g^0(\xi,\xi) \neq 0$, и ξ может быть выбрано так, чтобы $\theta^I(\xi) \neq 0$. Таким образом, $\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \neq 0$.

Теперь применим вспомогательную лемму к векторному полю $\overline{\xi}_2$. Получим выражение для векторного поля $\overline{\xi}_3$:

$$\overline{\xi}_3 = \overline{\nabla}_\gamma^{II}\overline{\xi}_2 = a_3 \cdot \delta^0(\xi) + b_3 \cdot \delta^I(\xi) + c_3 \cdot \xi + d_3 \cdot B^0 + e_3 \cdot B^I + f_3 \cdot B^{II},$$

$$a_3 = T_3^{II}(\xi,\xi,\xi), \qquad b_3 = 2T_3^I(\xi,\xi,\xi), \qquad c_3 = T_3^0(\xi,\xi,\xi),$$

$$d_3 = R_3^{II}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{4}, \qquad e_3 = 2R_3^I\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{4}, \qquad f_3 = R_3^0\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{4},$$

где

$$T_3 = \nabla T_2 + 2T_2 \otimes \theta + (\nu + \Delta_1\sigma)R_2, \qquad R_3 = \nabla R_2 + R_2 \otimes \theta - T_2 \otimes g.$$

Подставляя выражения для T_2, R_2, получаем

$$R_3 = \nabla S_2 \otimes g + S_2 \otimes \theta \otimes g - T_2 \otimes g.$$

Определим тензорные поля S_3 и V_3 правилом

$$S_3 = \nabla S_2 + S_2 \otimes \theta - T_2, \qquad V_3 = T_3 + 2S_3 \otimes \theta.$$

Тогда, с одной стороны,

$$R_3 = (\nabla S_2 + S_2 \otimes \theta - T_2) \otimes g = S_3 \otimes g,$$

а с другой —

$$V_3 = \nabla T_2 + 2\nabla S_2 \otimes \theta + 2S_2 \otimes \theta \otimes \theta + (\nu + \Delta_1\sigma)R_2.$$

Найдем выражение для ковариантного дифференциала ∇V_2, воспользовавшись равенством $V_2 = T_2 + 2S_2 \otimes \theta$:

$$\nabla V_2 = \nabla T_2 + 2\nabla S_2 \otimes \theta + 2S_2 \otimes \theta \otimes \theta + 2\nu S_2 \otimes g.$$

Отсюда имеем

$$\nabla T_2 + 2\nabla S_2 \otimes \theta + 2S_2 \otimes \theta \otimes \theta = \nabla V_2 - 2\nu S_2 \otimes g.$$

Подставляя найденное выражение в равенство для V_3, получаем

$$V_3 = \nabla V_2 - (\nu - \Delta_1\sigma)R_2.$$

Но $\nabla V_2 = \nabla\big((\nu - \Delta_1\sigma)g\big) = \nabla(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g + (\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g = d(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g$. Значит,

$$V_3 = d(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g - (\nu - \Delta_1\sigma)R_2 = d(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g + 3(\nu - \Delta_1\sigma)\theta \otimes g.$$

Легко проверить, что внешнее произведение $\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3$ линейно выражается через линейно независимое семейство внешних произведений, составленных из векторов $\delta^0(\xi)$, $\delta^I(\xi)$, ξ, B^0, B^I, B^{II}, с коэффициентами, равными минорам 3-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим минор $M^{3,4,5}_{1,2,3}$. Тогда

$$M^{3,4,5}_{1,2,3} = \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{vmatrix} = -2g^0(\xi,\xi)^3 \begin{vmatrix} S_2^{II}(\xi) & S_2^I(\xi) \\ S_3^{II}(\xi,\xi) & S_3^I(\xi,\xi) \end{vmatrix}.$$

Поскольку ξ меняется произвольным образом, получаем $\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3 \neq 0$.

Теперь применим вспомогательную лемму к векторному полю $\overline{\xi}_3$. Получим выражение для векторного поля $\overline{\xi}_4$:

$$\overline{\xi}_4 = \overline{\nabla}^{II}_\gamma \overline{\xi}_3 = a_4 \cdot \delta^0(\xi) + b_4 \cdot \delta^I(\xi) + c_4 \cdot \xi + d_4 \cdot B^0 + e_4 \cdot B^I + f_4 \cdot B^{II},$$

$$a_4 = T_4^{II}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{4}, \qquad b_4 = 2T_4^I\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{4}, \qquad c_4 = T_4^0\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{4},$$

$$d_4 = R_4^{II}\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{5}, \qquad e_4 = 2R_4^I\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{5}, \qquad f_4 = R_4^0\underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{5},$$

где

$$T_4 = \nabla T_3 + 2T_3 \otimes \theta + (\nu + \Delta_1\sigma)R_3, \qquad R_4 = \nabla R_3 + R_3 \otimes \theta - T_3 \otimes g.$$

Подставляя выражения для T_3, R_3, находим

$$R_4 = (\nabla S_3 + S_3 \otimes \theta - T_3) \otimes g.$$

Определим тензорные поля S_4 и V_4 правилом

$$S_4 = \nabla S_3 + S_3 \otimes \theta - T_3, \qquad V_4 = T_4 + 2S_4 \otimes \theta.$$

Тогда, с одной стороны, $R_4 = (\nabla S_3 + S_3 \otimes \theta - T_3) \otimes g = S_4 \otimes g$, а с другой —

$$V_4 = \nabla T_3 + 2\nabla S_3 \otimes \theta + 2S_3 \otimes \theta \otimes \theta + (\nu + \Delta_1\sigma)R_3.$$

Найдем выражение для ковариантного дифференциала ∇V_3, воспользовавшись равенством $V_3 = T_3 + 2S_3 \otimes \theta$:

$$\nabla V_3 = \nabla T_3 + 2\nabla S_3 \otimes \theta + 2S_3 \otimes \theta \otimes \theta + 2\nu S_3 \otimes g.$$

Отсюда имеем

$$\nabla T_3 + 2\nabla S_3 \otimes \theta + 2S_3 \otimes \theta \otimes \theta = \nabla V_3 - 2\nu S_3 \otimes g.$$

Подставляя найденное выражение в равенство для V_4, получаем

$$V_4 = \nabla V_3 - (\nu - \Delta_1\sigma)R_3.$$

Но

$$\nabla V_3 = \nabla^2(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g + 3d(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes \theta \otimes g +$$
$$+ 3(\nu - \Delta_1\sigma)\theta \otimes \theta \otimes g + 3\nu(\nu - \Delta_1\sigma)g \otimes g.$$

Значит, выражение для V_4 примет вид

$$V_4 = \nabla^2(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g + 3d(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes \theta \otimes g + 15(\nu - \Delta_1\sigma)\theta \otimes \theta \otimes g +$$
$$+ (\nu - \Delta_1\sigma)(7\nu - \Delta_1\sigma)g \otimes g.$$

В дальнейшем нам понадобится выражение для S_4. Найдем его:

$$S_4 = -60\theta \otimes \theta \otimes \theta + d\,(2\Delta_1\sigma - 5\nu) \otimes g + (6\Delta_1\sigma - 39\nu)\,\theta \otimes g.$$

Легко проверить, что внешнее произведение $\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3 \wedge \overline{\xi}_4$ линейно выражается через линейно независимое семейство внешних произведений, составленных из векторов $\delta^0(\xi)$, $\delta^I(\xi)$, ξ, B^0, B^I, B^{II}, с коэффициентами, равными минорам 4-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 & e_4 & f_4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим выражения всех миноров 4-го порядка данной матрицы. Для этого введем в рассмотрение определители

$$D_1 = \begin{vmatrix} V_2^I & S_2^{II} & S_2^I \\ V_3^I & S_2^{II} & S_2^I \\ V_4^I & S_4^{II} & S_4^I \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} V_2^{II} & S_2^{II} & S_2^I \\ V_3^{II} & S_2^{II} & S_2^I \\ V_4^{II} & S_4^{II} & S_4^I \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \left(T_2^{II} + 2\theta^{II} \otimes S_2^0\right) & V_2^I & S_2^I \\ \left(T_3^{II} + 2\theta^{II} \otimes S_3^0\right) & V_3^I & S_3^I \\ \left(T_4^{II} + 2\theta^{II} \otimes S_4^0\right) & V_4^I & S_4^I \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} V_2^{II} & V_2^I & S_2^{II} \\ V_3^{II} & V_3^I & S_3^{II} \\ V_4^{II} & V_4^I & S_4^{II} \end{vmatrix}.$$

Перейдем к рассмотрению указанных выше миноров 4-го порядка. Получим

$$M_{1,2,3,4}^{1,2,3,4} = \left(8g^0(\xi,\xi)^2\theta^{II}(\xi) - 16g^I(\xi,\xi)g^0(\xi,\xi)\theta^I(\xi)\right) D_1 +$$
$$+ \left(8g^I(\xi,\xi)g^0(\xi,\xi)\theta^0(\xi) - 8g^0(\xi,\xi)^2\theta^I(\xi)\right) D_2 +$$
$$+ \left(8g^I(\xi,\xi)^2 - 4g^{II}(\xi,\xi)g^0(\xi,\xi)\right) D_3 + 4g^I(\xi,\xi)g^0(\xi,\xi)D_4.$$

Аналогично находим другие миноры:

$$M^{1,2,3,5}_{1,2,3,4} = -8g^0(\xi,\xi)^2\theta^I(\xi)D_1 + 4g^0(\xi,\xi)^2\theta^0(\xi)D_2 -$$
$$- 4g^0(\xi,\xi)g^I(\xi,\xi)D_3 + 2g^0(\xi,\xi)^2D_4,$$
$$M^{1,2,4,5}_{1,2,3,4} = 4g^0(\xi,\xi)^2D_3, \qquad M^{1,3,4,5}_{1,2,3,4} = 2g^0(\xi,\xi)^3D_2,$$
$$M^{2,3,4,5}_{1,2,3,4} = 4g^0(\xi,\xi)^3D_1.$$

Пусть $\nu = \Delta_1\sigma$. Тогда $V_2 = V_3 = V_4 = 0$, а значит, $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$. Отсюда получаем

$$M^{2,3,4,5}_{1,2,3,4} = M^{1,3,4,5}_{1,2,3,4} = M^{1,2,4,5}_{1,2,3,4} = M^{1,2,3,5}_{1,2,3,4} = M^{1,2,3,4}_{1,2,3,4} = 0,$$

что влечет

$$\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3 \wedge \overline{\xi}_4 = 0$$

для любого ξ. Это показывает, что при $\nu = \Delta_1\sigma$ индуцированное преобразование является 4-геодезическим. Обратно, предположим, что индуцированное преобразование является 4-геодезическим, т. е. выполняется равенство $\xi\wedge\overline{\xi}_1\wedge\overline{\xi}_2\wedge\overline{\xi}_3\wedge\overline{\xi}_4 = 0$ для любого ξ. Последнее равенство равносильно системе равенств

$$M^{2,3,4,5}_{1,2,3,4} = 0, \qquad M^{1,3,4,5}_{1,2,3,4} = 0, \qquad M^{1,2,4,5}_{1,2,3,4} = 0,$$
$$M^{1,2,3,5}_{1,2,3,4} = 0, \qquad M^{1,2,3,4}_{1,2,3,4} = 0$$

для любого ξ. Из первого равенства при сделанных ограничениях на ξ:

$$D_1 = 0.$$

Раскладывая данный определитель по первому столбцу и учитывая при этом выражения для V_2, V_3, V_4, получаем равенство нулю линейной формы от поднятий и дифференциалов функции $\nu - \Delta_1\sigma$ с коэффициентами, гладко зависящими от ξ. Поскольку ξ меняется произвольным образом, кроме сделанных ограничений, последнее возможно только при $\nu - \Delta_1\sigma = 0$, т. е. $\nu = \Delta_1\sigma$. Тем самым свойство (2) доказано.

Теперь перейдем к рассмотрению свойства (1), т. е. будем предполагать, что $\nu \neq \Delta_1\sigma$. Из доказанного выше следует, что $\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3 \wedge \overline{\xi}_4 \neq 0$.

Применим вспомогательную лемму к векторному полю $\overline{\xi}_4$. Получим выражение для векторного поля $\overline{\xi}_5$:

$$\overline{\xi}_5 = \overline{\nabla}^{II}_\gamma\overline{\xi}_4 = a_5 \cdot \delta^0(\xi) + b_5 \cdot \delta^I(\xi) + c_5 \cdot \xi + d_5 \cdot B^0 + e_5 \cdot B^I + f_5 \cdot B^{II},$$
$$a_5 = T^{II}_5 \underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{5}, \qquad b_5 = 2T^I_5 \underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{5}, \qquad c_5 = T^0_5 \underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{5},$$
$$d_5 = R^{II}_5 \underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{6}, \qquad e_5 = 2R^I_5 \underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{6}, \qquad f_5 = R^0_5 \underbrace{(\xi,\ldots,\xi)}_{6},$$

где

$$T_5 = \nabla T_4 + 2T_4 \otimes \theta + (\nu + \Delta_1\sigma)\, R_4, \qquad R_5 = \nabla R_4 + R_4 \otimes \theta - T_4 \otimes g.$$

Подставляя выражения для T_4, R_4, получаем

$$R_5 = \big(\nabla S_4 + S_4 \otimes \theta - T_4\big) \otimes g.$$

Определим тензорные поля S_5 и V_5 правилом

$$S_5 = \nabla S_4 + S_4 \otimes \theta - T_4, \qquad V_5 = T_4 + 2S_4 \otimes \theta.$$

Тогда, с одной стороны, $R_5 = S_5 \otimes g$, а с другой — рассуждая, как и при рассмотрении тензорных полей V_2, V_3, V_4, получаем $V_5 = \nabla V_4 - (\nu - \Delta_1\sigma)R_4$, значит,

$$V_5 = \nabla^3(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g + 3\nabla^2(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes \theta \otimes g + 18d(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes \theta \otimes \theta \otimes g +$$
$$+ 90(\nu - \Delta_1\sigma)\theta \otimes \theta \otimes \theta \otimes g + (\nu - \Delta_1\sigma)d\,(12\nu - 3\Delta_1\sigma) \otimes g \otimes g +$$
$$+ (10\nu - \Delta_1\sigma)\,d(\nu - \Delta_1\sigma) \otimes g \otimes g + (\nu - \Delta_1\sigma)\,(69\nu - 6\Delta_1\sigma)\,\theta \otimes g \otimes g.$$

Очевидно

$$\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3 \wedge \overline{\xi}_4 \wedge \overline{\xi}_5 = M^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,5}\,\delta^0(\xi) \wedge \delta^I(\xi) \wedge \xi \wedge B^0 \wedge B^I \wedge B^{II}.$$

Равенство $M^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,5} = 0$ равносильно равенству

$$\begin{vmatrix} V_2^{II}(\xi,\xi) & V_2^{I}(\xi,\xi) & S_2^{II}(\xi) & S_2^{I}(\xi) \\ V_3^{II}(\xi,\xi,\xi) & V_3^{I}(\xi,\xi,\xi) & S_3^{II}(\xi,\xi) & S_3^{I}(\xi,\xi) \\ V_4^{II}(\xi,\ldots,\xi) & V_4^{I}(\xi,\ldots,\xi) & S_4^{II}(\xi,\xi,\xi) & S_4^{I}(\xi,\xi,\xi) \\ V_5^{II}(\xi,\ldots,\xi) & V_5^{I}(\xi,\ldots,\xi) & S_5^{II}(\xi,\ldots,\xi) & S_5^{I}(\xi,\ldots,\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая данный определитель по первому и второму столбцах, учитывая при этом выражения для V_2, V_3, V_4, V_5, получаем равенство нулю квадратичной формы от поднятий и дифференциалов функции $\nu - \Delta_1\sigma$ с коэффициентами, гладко зависящими от ξ. Поскольку ξ меняется произвольным образом, кроме сделанных ограничений, последнее возможно только при $\nu - \Delta_1\sigma = 0$, т. е. $\nu = \Delta_1\sigma$, что противоречит предположению. Следовательно, $M^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,5} \neq 0$, что влечет равенство

$$\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3 \wedge \overline{\xi}_4 \wedge \overline{\xi}_5 \neq 0.$$

Последний раз применяя вспомогательную лемму к векторному полю $\overline{\xi}_5$, получаем выражение для векторного поля $\overline{\xi}_6$:

$$\overline{\xi}_6 = \overline{\nabla}^{II}_{\gamma}\overline{\xi}_5 = a_6 \cdot \delta^0(\xi) + b_6 \cdot \delta^I(\xi) + c_6 \cdot \xi + d_6 \cdot B^0 + e_6 \cdot B^I + f_6 \cdot B^{II}.$$

Отсюда с учетом свойств внешнего произведения следует, что

$$\xi \wedge \overline{\xi}_1 \wedge \overline{\xi}_2 \wedge \overline{\xi}_3 \wedge \overline{\xi}_4 \wedge \overline{\xi}_5 \wedge \overline{\xi}_6 = 0.$$

Данное равенство показывает, что индуцированное преобразование является 6-геодезическим преобразованием, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{G}_r$ — локальная (не гомотетическая) r-членная группа Ли концилкулярных преобразований (псевдо)риманова пространства (M, g), соответствующая операторам X_i, $i = \overline{1, r}$.*

Тогда индуцированная группа $\mathcal{G}^{II}_r$ (соответствующая поднятиям X^{II}_r, $i = \overline{1, r}$, и состоящая из индуцированных преобразований) является r-членной группой Ли 6-геодезических или 4-геодезических преобразований пространства $\big(T^2(M), g^{11}\big)$.

Доказательство. Пусть X_i, $i = \overline{1,r}$, — операторы 1-параметрических конциркулярных групп $\exp(tX_i)$, порождающие r-членную группу Ли $\mathcal{G}_r$ конечных конциркулярных преобразований (M, g), со структурными уравнениями $[X_{s_1}, X_{s_2}] = c^s_{s_1\,s_2} X_s$. На основании свойств поднятий получаем

$$\left[X^{II}_{s_1}, X^{II}_{s_2}\right] = c^s_{s_1\,s_2} X^{II}_s. \tag{28}$$

Из этого равенства, согласно второй теореме Ли, следует, что поднятия X^{II}_r, $i = \overline{1,r}$, являются операторами некоторой r-членной группы Ли преобразований касательного расслоения $T^2(M)$, которую мы обозначим $\mathcal{G}^{II}_r$.

Согласно [2] $\exp(tX_i)^* = \exp\left(tX^{II}_i\right)$. Значит, если $\mu_i(t) \in \exp(tX_i)$, то индуцированное преобразование $\mu_i(t)^* \in \exp\left(tX^{II}_i\right)$. Осталось применить предыдущую теорему.

Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно следует такая теорема.

Теорема 8. *Если группа $\mathcal{G}^{II}_r$ индуцирована на $\left(T^2(M), g^{II}\right)$ глобальной группой $\mathcal{G}_r$ конциркулярных преобразований компактного риманова пространства (M, g), то эта группа не содержит 4-геодезических преобразований.*

Доказательство повторяет доказательство соответствующей теоремы в [3].

1. *Лейко С. Г.* Линейные p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений высших порядков и высших степеней // Тр. геом. сем. – 1982. – Вып. 14. – С. 34 – 46.
2. *Лейко С. Г.* P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 62 – 71.
3. *Лейко С. Г.* P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия // Там же. – 1998. – № 6. – С. 35 – 45.
4. *Лейко С. Г.* P-геодезические сечения касательного расслоения // Там же. – 1994. – № 3. – С. 32 – 42.
5. *Yano K., Ishihara S.* Differential geometry of tangent bundles of order 2 // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – **20**, № 3. – P. 318 – 354.
6. *Лейко С. Г.* Ріманова геометрія: Навч. пос. – Одеса: Астропринт, 2000.
7. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 360 с.

Получено 06.03.07,
после доработки — 17.09.08