УДК 519.21

Т. В. Маловичко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

ТЕОРЕМА ГИРСАНОВА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

An analogue of the Girsanov theorem is proved for stochastic differential equations with interaction given by

$$dz(u,t) = a(z(u,t),\mu_t)\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}} f(z(u,t)-p)W(dp,dt),$$

where W is a Wiener sheet on $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$ and a function $a(\cdot)$ is of a special type.

Доведено аналог теореми Гірсанова для стохастичних диференціальних рівнянь із взаємодією

$$dz(u,t) = a(z(u,t),\mu_t)\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}} f(z(u,t)-p)W(dp,dt),$$

де W — вінерів листок на $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$, а функція $a(\cdot)$ має спеціальний вигляд.

Стохастические потоки в настоящее время интенсивно исследуются (см., например, [1]). Мерозначные процессы, соответствующие стохастическим потокам со взаимодействием, были получены с помощью предельного перехода от конечных систем взаимодействующих частиц в работе [2], в которой рассматривались уравнения

$$dx_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j f(x_i(t),x_j(t))\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x_i(t)-p)W(dp,dt), \quad i=1,\ldots,N, \tag{1}$$

где W — винеровский лист. Это уравнение можно представить следующим образом:

$$dx_i(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x_i(t),v)\mu_N^t(dv)dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x_i(t)-p)W(dp,dt), \quad i=1,\ldots,N,$$

где

$$\mu_N^t = \sum_{j=1}^{N} a_j \delta_{x_j(t)}.$$

В работе [2] доказаны существование и единственность решения (1). Затем рассматривался слабый предел процессов $\{\mu_N^t,\, t\geqslant 0\}$ при приближении дискретными мерами μ_N произвольной вероятностной меры μ. Было показано, что соответствующий предел является марковским мерозначным процессом. В работе [3] этому процессу поставлен в соответствие стохастический поток и введены уравнения со взаимодействием. Эти уравнения имеют вид

$$dx(u,t) = a(x(u,t),\mu_t,t)\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(x(u,t),\mu_t,t,p)\,W(dp,dt),$$

$$x(u,0) = u, \quad u\in\mathbb{R}^d,$$

$$\mu_t = \mu\circ x(\cdot,t)^{-1}, \quad t\geqslant 0,$$

где W — винеровский лист на $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$. В возникающем потоке движение отдельной частицы зависит от распределения всей массы по пространству.

Уравнениям со взаимодействием в настоящее время уделяется пристальное внимание. В частности, вопрос существования решения уравнения со взаимодействием исследовался в работах [3 – 5]. Более того, в [6] рассматривался и вопрос переноса стохастическим потоком со взаимодействием обобщенных функций. Для доказательства существования сильного решения уравнения с обобщенной функцией были показаны сначала существование слабого решения, а затем потраекторная единственность. Для уравнений со взаимодействием такой подход можно найти в [7]. В бесконечномерном случае результаты о существовании решения уравнения, управляемого обобщенными функциями, получены в работе [8].

Данная статья посвящена доказательству аналога теоремы Гирсанова для стохастических дифференциальных уравнений со взаимодействием вида

$$dz(u,t) = a(z(u,t),\mu_t)\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}} f(z(u,t)-p)W(dp,dt),$$

где функция $a(\cdot)$ имеет специальный вид, а именно

$$a(z(u,t),\mu_t) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(v,p)\mu_t(dv)\,f(z(u,t)-p)dp,$$

т. е. для решений x и y уравнений

$$\begin{aligned} dx(u,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x(u,t)-p)W(dp,dt), \\ x(u,0) &= u, \quad u\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} dy(u,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(y(v,t),p)\mu(dv)\,f(y(u,t)-p)dp\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}} f(y(u,t)-p)W(dp,dt), \\ y(u,0) &= u, \quad u\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3}$$

где μ — произвольная вероятностная мера, доказана абсолютная непрерывность распределения потока y относительно распределения x и выведен вид соответствующей плотности.

Будем предполагать, что функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $b\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\exists\, B\geqslant 0\ \forall\, v\in\mathbb{R}\colon \int_{\mathbb{R}} b^2(v,p)\,dp \leqslant B$;

2) $\exists\, C\geqslant 0\ \forall\, v,p\in\mathbb{R}\colon |b(v,p)|\leqslant C$;

3) $\exists\, K\geqslant 0\ \forall\, p,v_1,v_2\in\mathbb{R}\colon |b(v_1,p)-b(v_2,p)|\leqslant K\,|v_1-v_2|$;

4) функция f трижды дифференцируема, причем f' и f''' ограничены;

5) $f,\ f'\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$;

6) функция f и ее преобразование Фурье отличны от нуля λ-почти наверное (λ-п.н.), где λ — мера Лебега на прямой.

Прежде чем формулировать основной результат, необходимо проверить, что при указанных технических условиях уравнения (2) и (3) действительно имеют решения. Воспользуемся теоремой о существовании решений стохастических дифференциальных уравнений со взаимодействием.

Определение 1 [4]. *Решением уравнения со взаимодействием*

$$dx(u,t) = \alpha(x(u,t),\mu_t,t)dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \beta(x(u,t),\mu_t,t,p)\,W(dp,dt),$$

$$x(u,0) = u, \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, \quad t \geq 0,$$

где W — $\mathbb{R}^d$*-значный винеровский лист, соответствующим коэффициентам* α, β *и начальной мере* μ_0, *называется случайное* $\mathbb{R}^d$*-значное поле* $x(u,t)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0;+\infty)$, *такое, что*:

1) *для каждого* $t \geq 0$ *ограничение* x *на отрезок* $[0;t]$ *является* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{B}([0;t])\times$ $\times\,\mathcal{F}_t$*-измеримым*;

2) *для каждого* $u \in \mathbb{R}^d$ *и каждого* $t \geq 0$ *с вероятностью* 1

$$x(u,t) = u + \int\limits_0^t \alpha(x(u,s),\mu_s,s)ds + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d} \beta(x(u,s),\mu_s,s,p)\,W(dp,ds);$$

3) $\mu_t(A) = \mu_0\big(\{u\colon x(u,t)\in A\}\big)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех вероятностных мер на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Для произвольных двух мер μ, $\nu \in \mathfrak{M}$ обозначим через $C(\mu,\nu)$ множество всех вероятностных мер на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$, для которых меры μ и ν являются маргинальными распределениями.

Определение 2 [4]. *Расстоянием* (*метрикой*) *Вассерштейна нулевого порядка между* μ *и* ν *называется значение*

$$\gamma(\mu,\nu) = \inf_{\varkappa\in C(\mu,\nu)} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|}\,\varkappa(du,dv).$$

Следующий результат является частным случаем теоремы 2.1.1 [4].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* α *и* β *удовлетворяют условию*

$$\exists C>0 \quad \forall u_1,\ u_2\in\mathbb{R}^d, \quad \nu_1,\ \nu_2\in\mathfrak{M}\colon$$

$$\big\|\alpha(u_1,\nu_1)-\alpha(u_2,\nu_2)\big\| + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big\|\beta(u_1,\nu_1,p)-\beta(u_2,\nu_2,p)\big\|^2\,dp\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C\big(\|\,u_1-u_2\|+\gamma(\nu_1,\nu_2)\big).$$

Тогда уравнение

$$dx(u,t) = \alpha(x(u,t),\mu_t)dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \beta(x(u,t),\mu_t,p)\,W(dp,dt),$$

$$x(u,0) = u, \quad u\in\mathbb{R}^d,$$

$$\mu_t = \mu_0\circ x(\cdot,t)^{-1}, \quad t\geq 0,$$

имеет решение, причем это решение единственно.

Лемма 1. *Решения уравнений* (2) *и* (3) *существуют и единственны.*

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\exists L,\, \widetilde{L} \geqslant 0 \quad \forall u_1,\ u_2 \in \mathbb{R}:$$

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(u_1 - p) - f(u_2 - p)|^2 dp\right)^{1/2} \leqslant L\,|u_1 - u_2|,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(u_1 - p) - f(u_2 - p)\big|\, dp \leqslant \widetilde{L}|u_1 - u_2|. \tag{4}$$

Действительно, для $u_1 \leq u_2$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(u_1 - p) - f(u_2 - p)\big|^2\, dp =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(q) - f(q + u_2 - u_1)\big|^2\, dq = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{q}^{q+u_2-u_1} 1 \cdot f'(v)\, dv\right)^2 dq \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} (u_2 - u_1) \int\limits_{q}^{q+u_2-u_1} (f'(v))^2 dv\, dq =$$

$$= (u_2 - u_1) \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{v-(u_2-u_1)}^{v} (f'(v))^2 dq\, dv =$$

$$= (u_2 - u_1)^2 \int\limits_{\mathbb{R}} (f'(v))^2 dv = \|f'\|_2^2\, (u_2 - u_1)^2$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(u_1 - p) - f(u_2 - p)\big|\, dp = \int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(q) - f(q + u_2 - u_1)\big|\, dq \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{q}^{q+u_2-u_1} |f'(v)|\, dv\, dq = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{v-(u_2-u_1)}^{v} |f'(v)|\, dq\, dv =$$

$$= (u_2 - u_1) \int\limits_{\mathbb{R}} |f'(v)|\, dv = \|f'\|_1\, (u_2 - u_1).$$

Поскольку уравнение (3) можно представить в виде

$$dy(u,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(v,p)\, \mu_t(dv)\, f(y(u,t) - p) dp\, dt + \int\limits_{\mathbb{R}} f(y(u,t) - p) W(dp, dt),$$

$$y(u,0) = u, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\mu_t = \mu \circ x(\cdot, t)^{-1}, \quad t \geq 0,$$

для доказательства леммы достаточно показать, что найдется такая константа $\widehat{C} > 0$, что для любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, для произвольных вероятностных мер ν_1 и ν_2 на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и для любого $t \geq 0$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(v_1, p)\, \nu_1(dv_1)\, f(u_1 - p)\, dp - \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(v_2, p)\, \nu_2(dv_2)\, f(u_2 - p)\, dp \right| +$$

$$+ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} (f(u_1 - p) - f(u_2 - p))^2\, dq \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \widehat{C}\big(|\, u_1 - u_2| + \gamma(\nu_1, \nu_2)\big),$$

после чего воспользоваться теоремой 1.

В силу условий 2 и 3

$$\forall\, v_1,\ v_2,\ p \in \mathbb{R}\colon\quad \big|b(v_1, p) - b(v_2, p)\big| \leq \min\big\{2C;\, K\, |v_1 - v_2|\big\} \leq \widetilde{C}\, \frac{|v_1 - v_2|}{1 + |v_1 - v_2|},$$

где $\widetilde{C} = 2C + K$. Таким образом, для произвольной меры $\varkappa \in C(\nu_1, \nu_2)$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(v_1, p)\, \nu_1(dv_1)\, f(u_1 - p)\, dp - \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(v_2, p)\, \nu_2(dv_2)\, f(u_2 - p)\, dp \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} b(v_1, p)\, \nu_1(dv_1)\ - \int\limits_{\mathbb{R}} b(v_2, p)\, \nu_2(dv_2) \right) f(u_1 - p)\, dp \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} b(v_2, p)\, \nu_2(dv_2) \right) (f(u_1 - p) - f(u_2 - p))\, dp \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |\, b(v_1, p) - b(v_2, p)|\, \varkappa(dv_1, dv_2) \right) |f(u_1 - p)|\, dp +$$

$$+ C \int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(u_1 - p) - f(u_2 - p))\big|\, dp \leq$$

$$\leq \widetilde{C} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|v_1 - v_2|}{1 + |v_1 - v_2|}\, \varkappa(dv_1, dv_2) \right) \big|f(u_1 - p)\big|\, dp +$$

$$+ C \int\limits_{\mathbb{R}} |f(u_1 - p) - f(u_2 - p)|\, dp.$$

Следовательно, в силу условия 5 и неравенств (4)

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(v_1, p)\, \nu_1(dv_1)\, f(u_1 - p)\, dp - \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(v_2, p)\, \nu_2(dv_2)\, f(u_2 - p)\, dp \right| \leq$$

$$\leq \widetilde{C}\,\gamma(\nu_1,\nu_2)\int\limits_{\mathbb{R}}|f(u_1-p)|\,dp + C\,\widetilde{L}\,|u_1-u_2|.$$

Отсюда видно, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(v_1,p)\,\nu_1(dv_1)\,f(u_1-p)\,dp - \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} b(v_2,p)\,\nu_2(dv_2)\,f(u_2-p)\,dp\right| +$$

$$+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}(f(u_1-p)-f(u_2-p))^2\,dq\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \widehat{C}(|\,u_1-u_2|+\gamma(\nu_1,\nu_2)),$$

где

$$\widehat{C}=\max\left\{\widetilde{C}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(u)|\,du;\ C\,\widetilde{L}+L\right\}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\{X(\Delta,t)\colon t\geqslant 0,\ \Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(\Delta)<+\infty\}$ *является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом по* t *при каждом фиксированном* Δ *относительно одного и того же потока* σ*-алгебр,*

$$X(\Delta,0)=0$$

и взаимная характеристика мартингалов $X(\Delta_1,\cdot)$ *и* $X(\Delta_2,\cdot)$ *равна*

$$\Big\langle X(\Delta_1),X(\Delta_2)\Big\rangle_t=\lambda(\Delta_1\cap\Delta_2)\,t,$$

где λ *— мера Лебега на прямой.*

Тогда

$$X(\Delta,t)=W(\Delta\times[0;t]),$$

где W *— винеровский лист на* $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$.

Доказательство. Обозначим

$$\widetilde{W}(\Delta\times[0;t])\overset{\mathrm{df}}{=}X(\Delta,t).$$

Положим по определению

$$\widetilde{W}(\Delta\times(t_1;t_2])\overset{\mathrm{df}}{=}\widetilde{W}(\Delta\times[0;t_2])-\widetilde{W}(\Delta\times[0;t_1])=X(\Delta,t_2)-X(\Delta,t_1).$$

Покажем конечную аддитивность функции множеств $\widetilde{W}$ на множествах вида $\Delta\times(t_1;t_2]$, $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, где $\lambda(\Delta)<+\infty$. Для множеств $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$, $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$ процесс $\widetilde{X}(\cdot)\overset{\mathrm{df}}{=}X(\Delta,\cdot)-X(\Delta_1,\cdot)-X(\Delta_2,\cdot)$ является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом с нулевой характеристикой. Поскольку $\widetilde{X}(0)=0$, отсюда следует, что $\widetilde{X}\equiv 0$ и

$$\widetilde{W}\big(\Delta\times(t_1;t_2]\big)-\widetilde{W}\big(\Delta_1\times(t_1;t_2]\big)-\widetilde{W}\big(\Delta_2\times(t_1;t_2]\big)=0.$$

Так как для любых множеств $\Delta \times (t_1^0; t_2^0]$ таких, что

$$\Delta \times (t_1^0; t_2^0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\Delta^k \times (t_1^k; t_2^k]\right),$$

имеем

$$\mathrm{E}\left|\widetilde{W}(\Delta \times (t_1^0; t_2^0]) - \sum_{k=1}^{n} \widetilde{W}(\Delta \times (t_1^k; t_2^k])\right|^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left|\widetilde{W}(\Delta \times (t_1^0; t_2^0]) - \widetilde{W}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Delta^k \times (t_1^k; t_2^k])\right)\right|^2 =$$

$$= \lambda(\Delta \times (t_1^0; t_2^0]) - \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Delta^k \times (t_1^k; t_2^k])\right) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

$\widetilde{W}$ является счетно-аддитивной функцией множеств.

Теперь проверим, что для произвольных значений $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \in \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $t_{11} \le t_{12}, t_{21} \le t_{22}, \ldots, t_{n1} \le t_{n2}$ случайные величины $\widetilde{W}\big(\Delta_1 \times (t_{11}; t_{12}]\big)$, $\widetilde{W}\big(\Delta_2 \times (t_{21}; t_{22}]\big), \ldots, \widetilde{W}\big(\Delta_k \times (t_{n1}; t_{n2}]\big)$ являются совместно гауссовскими. В силу конечной аддитивности достаточно показать, что произвольная линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \, \widetilde{W}\big(\Delta_k \times (t_{k1}; t_{k2}]\big) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(X(\Delta_k, t_{k2}) - X(\Delta_k, t_{k1})\right)$$

является гауссовской случайной величиной только для попарно непересекающихся множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Случайный процесс

$$\widehat{X}(\cdot) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(\frac{X(\Delta_1, \cdot)}{\sqrt{\lambda(\Delta_1)}}, \frac{X(\Delta_2, \cdot)}{\sqrt{\lambda(\Delta_2)}}, \ldots, \frac{X(\Delta_n, \cdot)}{\sqrt{\lambda(\Delta_n)}}\right)$$

при $\lambda(\Delta_k) > 0$, $k = \overline{1, n}$, является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом с

$$\big\langle \widehat{X}_i, \widehat{X}_j \big\rangle_t = \delta_{ij}\, t, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, по теореме Леви [9] (гл. II, теорема 6.1) $\widehat{X}$ является n-мерным винеровским процессом. Таким образом, случайные величины $X(\Delta_1, t_{12})$, $X(\Delta_1, t_{11})$, $X(\Delta_2, t_{22})$, $X(\Delta_2, t_{21}), \ldots, X(\Delta_n, t_{n2})$, $X(\Delta_n, t_{n1})$ являются совместно гауссовскими при любых непересекающихся $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, а значит, линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(X(\Delta_k, t_{k2}) - X(\Delta_k, t_{k1})\right)$$

также является гауссовской величиной.

Покажем теперь, что для множеств A и B вида $\Delta \times (t_1; t_2]$

$$\mathrm{E}\widetilde{W}(A)\widetilde{W}(B) = \lambda_2(A \cap B),$$

где λ_2 — мера Лебега на плоскости.

Пусть для определенности $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$. Тогда

$$\mathrm{E}\widetilde{W}\big(\Delta_1 \times (s_1; s_2]\big)\widetilde{W}\big(\Delta_2 \times (t_1; t_2]\big) =$$
$$= \mathrm{E}(X(\Delta_1, s_2) - X(\Delta_1, s_1))(X(\Delta_2, t_2) - X(\Delta_2, t_1)) =$$
$$= \mathrm{E}X\big(\Delta_1, s_2)X(\Delta_2, t_2\big) - \mathrm{E}X\big(\Delta_1, s_1)X(\Delta_2, t_2\big) -$$
$$-\mathrm{E}X(\Delta_1, s_2)X(\Delta_2, t_1) + \mathrm{E}X(\Delta_1, s_1)X(\Delta_2, t_1) =$$
$$= \mathrm{E}X(\Delta_1, s_2)X(\Delta_2, s_2) - \mathrm{E}X(\Delta_1, s_1)X(\Delta_2, s_1) -$$
$$-\mathrm{E}X(\Delta_1, t_1)X(\Delta_2, t_1) + \mathrm{E}X(\Delta_1, s_1)X(\Delta_2, s_1) =$$
$$= \lambda(\Delta_1 \cap \Delta_2)s_2 - \lambda(\Delta_1 \cap \Delta_2)s_1 - \lambda(\Delta_1 \cap \Delta_2)t_1 + \lambda(\Delta_1 \cap \Delta_2)s_1 =$$
$$= \lambda(\Delta_1 \cap \Delta_2)(s_2 - t_1) = \lambda_2\big((\Delta_1 \times (s_1; s_2]\big) \cap \big(\Delta_2 \times (t_1; t_2]\big)\big),$$

поскольку

$$\mathrm{E}X(\Delta_1, s)X(\Delta_2, t) = \mathrm{E}X(\Delta_1, 0)X(\Delta_2, 0) + \mathrm{E}\langle X(\Delta_1), X(\Delta_2)\rangle_{s\wedge t} =$$
$$= \lambda(\Delta_1 \cap \Delta_2)\, s \wedge t.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Следовательно, $\widetilde{W}$ можно продолжить на $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}\big([0; +\infty)\big)$, причем ее продолжение W — гауссовская мера с ортогональными значениями со структурной мерой λ_2. Таким образом, W — винеровский лист.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если преобразования Фурье функций $f, h \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ отличны от нуля λ-почти всюду и h финитна, то линейные комбинации функций*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u - \cdot - v)\; h(v)\mathbf{1}_{[0;\, t]}(\cdot)\; dv,$$

где $u \in \mathbb{R}, t \in [0; T]$, плотны в $L_2\big(\mathbb{R} \times [0; T]\big)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что

$$\mathcal{A} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(u - \cdot - v)\; h(v)\mathbf{1}_{[0;\, t]}(\cdot)\; dv;\;\; u \in \mathbb{R},\, t \in [0; T] \right\} \subset L_2(\mathbb{R} \times [0; T]).$$

Пусть $[a; b]$ — некоторый отрезок такой, что

$$\forall v \notin [a; b] \colon h(v) = 0.$$

Тогда

$$\forall u \in \mathbb{R}\;\; \forall t \in (0; T] \colon \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u - p - v)h(v)\mathbf{1}_{[0;\, t]}(s)dv \right)^2 dp\, ds =$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0;\, t]}(s) \cdot \left(\int_a^b f(u - p - v)\; h(v)\; dv \right)^2 dp\, ds \leq$$

$$\leq (b-a)t \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_a^b f^2(u-p-v)\, h^2(v)\, dv\, dp =$$

$$= (b-a)t \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f^2(u-p-v) dp \right) h^2(v)\, dv =$$

$$= (b-a)t\, \|f\|_2^2 \int\limits_{\mathbb{R}} h^2(v)\, dv = (b-a)t \cdot \|f\|_2^2 \cdot \|h\|_2^2 < +\infty.$$

Теперь предположим, что $\varphi \in L_2(\mathbb{R} \times [0;T])$ и ортогональна всем элементам множества $\mathcal{A}$, т. е.

$$\forall u \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in (0;T]:$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(u-p-v)\, h(v) \mathbf{1}_{[0;\,t]}(s)\, dv \right) \cdot \varphi(p,s)\, dp\, ds = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} (f*h)(u-p)\, \varphi(p,s)\, \mathbf{1}_{[0;\,t]}(s)\, dp\, ds = 0,$$

т. е. для всех u и t

$$\int\limits_0^t (f*h*\varphi(\cdot,s))(u)\, ds = 0$$

и для всех u и почти всех t

$$f*h*\varphi(\cdot,t) = 0.$$

Тогда для почти всех t

$$F(f) \cdot F(h) \cdot F(\varphi(\cdot,t)) = F(f*h*\varphi(\cdot,t)) = 0,$$

где F — преобразование Фурье. А поскольку преобразования Фурье функций f и h отличны от нуля λ-почти всюду, для почти всех t

$$F(\varphi(\cdot,t)) = 0 \quad \lambda\text{-п.н.}$$

Следовательно, $\varphi = 0$ λ_2-почти всюду.

Лемма 3 доказана.

Теорема 2. *Пусть x — решение стохастического уравнения* (2),

$$\mathcal{F}_T^x = \sigma\{x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \in [0;T]\},$$
$$\mathcal{F}_T^W = \sigma\{W(\Delta \times [0;t]),\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ t \in [0;T]\}.$$

Тогда для всех $T \geqslant 0$

$$\mathcal{F}_T^x = \mathcal{F}_T^W.$$

Доказательство. Покажем сначала существование и непрерывность производной $x'_v(v,s)$, для чего воспользуемся результатом из [1]. Рассмотрим на множестве функций φ, для которых существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}\ \varphi(u,v)$, норму

$$\|\varphi\|^{\sim} = \|\varphi\|^{*} + \left\| \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\ \varphi \right\|^{**},$$

где

$$\|\varphi\|^{*} = \sup_{u,v\in\mathbb{R}} \frac{|\varphi(u,v)|}{(1+|u|)(1+|v|)} + \sup_{u,v\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\ \varphi(u,v) \right|,$$

а

$$\|\varphi\|^{**} = \sup_{u\neq u',\, v\neq v'} \frac{|\varphi(u,v) - \varphi(u',v) - \varphi(u,v') + \varphi(u',v')|}{|u-u'|\,|v-v'|}.$$

Для функции

$$\varphi(u,v) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(u-p) f(v-p) dp$$

имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\ \varphi(u,v) = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(u-p) f'(v-p) dp,$$

так как f' ограничена, а $f,\ f' \in L_1(\mathbb{R})$, и

$$\|\varphi\|^{*} = \sup_{u,v\in\mathbb{R}} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f(u-p) f(v-p) dp \right|}{(1+|u|)(1+|v|)} + \sup_{u,v\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f'(u-p) f'(v-p) dp \right| \leq$$

$$\leq \sup_{u,v\in\mathbb{R}} \frac{\|f\|_2^2}{(1+|u|)(1+|v|)} + \|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2,$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\ \varphi \right|^{**} = \sup_{u\neq u',\, v\neq v'} \frac{1}{|u-u'|\,|v-v'|} \times$$

$$\times \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f'(u-p) f'(v-p) - f'(u'-p) f'(v-p) - \right.$$

$$\left. - f'(u-p) f'(v'-p) + f'(u'-p) f'(v'-p) dp \right| =$$

$$= \sup_{u\neq u',\, v\neq v'} \frac{1}{|u-u'|\,|v-v'|} \times$$

$$\times \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f'(u-v-p) f'(-p) - f'(u'-v-p) f'(-p) - \right.$$

$$\left. - f'(u-v'-p) f'(-p) + f'(u'-v'-p) f'(-p) dp \right| \leq$$

$$\leq \sup_{u\neq u',\, v\neq v',\, |u-u'|\leq|v-v'|} \frac{1}{|u-u'|\,|v-v'|}\times$$

$$\times\left|\int_{\mathbb{R}} f''(u+\theta_1^u(u-u')-v-p)f'(-p)(u-u')\, -\right.$$

$$\left. - f''(u+\theta_2^u(u-u')-v'-p)f'(-p)(u-u')dp\right| +$$

$$+ \sup_{u\neq u',\, v\neq v',\, |u-u'|>|v-v'|} \frac{1}{|u-u'|\,|v-v'|}\times$$

$$\times\left|\int_{\mathbb{R}} f''(v+\theta_1^v(v-v')-u-p)f'(-p)(v-v')\, -\right.$$

$$\left. - f''(v+\theta_2^v(v-v')-u'-p)f'(-p)(v-v')dp\right| \leq$$

$$\leq \sup_{u\neq u',\, v\neq v'} \frac{2}{|u-u'|\,|v-v'|}\left|\int_{\mathbb{R}} f'''(\xi(p))f'(-p)(u-u')(v-v')dp\right| =$$

$$= \sup_{u\neq u',\, v\neq v'}\left|\int_{\mathbb{R}} f'''(\xi(p))f'(-p)dp\right| \leq M\int_{\mathbb{R}} |f'(p)|dp = M\|f'\|_1,$$

где $|f'''|\leq M$.

Таким образом,

$$\|\varphi\|^{\sim} \leq \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + M\|f'\|_1.$$

Отсюда следует, что с вероятностью 1 существует $x'_v(v,s)$, причем производная $x'_v(v,s)$ непрерывна по (v,s) [1] (теорема 4.6.5), а также для любой гладкой функции $q(\cdot)$ такой, что q и q' ограничены, а q' липшицева, найдется положительная константа C такая, что

$$\mathrm{E}(x'_v(q(v),s) - x'_u(q(u),s'))^4 \leq C((v-u)^4 + (s-s')^2),$$

$$\mathrm{E}(x'_v(q(v),s))^4 \leq C$$

для всех s, s', v, u [1] (теорема 4.6.4).

Пусть

$$h(v) = (v+a)\mathbf{1}_{[-a;\,0)}(v) + (a-v)\mathbf{1}_{[0;\,a]}(v), \quad a>0.$$

Покажем, что для всех $u\in\mathbb{R}$ и $t\in[0;T]$ случайная величина

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u-p-v)\; h(v)\mathbf{1}_{[0;\,t]}(s)\,dv\,W(dp,ds)$$

является $\mathcal{F}_T^x$-измеримой. Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(u-p-v)\, h(v)\mathbf{1}_{[0;\,t]}(s)\,dv = \mathbf{1}_{[0;\,t]}(s)\int\limits_{\mathbb{R}} f(v_1-p)\,h(u-v_1)\,dv_1,$$

то

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u-p-v)\, h(v)\mathbf{1}_{[0;\,t]}(s)\,dv\,W(dp,ds) =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(v-p)\, h(u-v)\,dv\,W(dp,ds).$$

Для каждого фиксированного v случайный процесс $x(v,\cdot)$ является семимартингалом, поэтому существует интеграл

$$\int\limits_0^t h(u-x(v,s))\,x'_v(v,s)\,dx(v,s) =$$

$$= L_2-\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=0}^{l-1} h(u-x(v,s_k))\,x'_v(v,s_k)(x(v,s_{k+1})-x(v,s_k)),$$

где $\Delta = \{0=s_0<s_1<\ldots<s_l=t\}$ — разбиение отрезка $[0;t]$ с диаметром $|\Delta|$.

Покажем, что

$$\int\limits_0^t h(u-x(v,s))\,x'_v(v,s)\,dx(v,s) =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} f(x(v,s)-p)\,h(u-x(v,s))\,x'_v(v,s)\,W(dp,ds). \qquad (5)$$

Выбрав функцию $q(\cdot)$ так, чтобы в некоторой окрестности точки v она совпадала с тождественным отображением, получим, что для некоторой положительной константы C_v

$$\mathrm{E}(x'_v(v,s)-x'_v(v,s'))^4 \le C_v(s-s')^2,$$
$$\mathrm{E}(x'_v(v,s))^4 \le C_v$$

для всех s, s'. Тогда

$$\mathrm{E}\Bigg(\sum_{k=0}^{l-1} h(u-x(v,s_k))\,x'_v(v,s_k)(x(v,s_{k+1})-x(v,s_k)) -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} f(x(v,s)-p)\,h(u-x(v,s))\,x'_v(v,s)\,W(dp,ds)\Bigg)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\Bigg(\sum_{k=0}^{l-1} h(u-x(v,s_k))\,x'_v(v,s_k)\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x(v,s)-p)\,W(dp,ds) -$$

$$-\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x(v,s)-p)\, h(u-x(v,s))\, x'_v(v,s)\, W(dp,ds)\Bigg)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\Bigg(\sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \int_{\mathbb{R}} \Big[h(u-x(v,s_k))\, x'_v(v,s_k) - h(u-x(v,s))\, x'_v(v,s)\Big] \times$$

$$\times f(x(v,s)-p)\, W(dp,ds)\Bigg)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}\Big[h(u-x(v,s_k))\, x'_v(v,s_k) - h(u-x(v,s))\, x'_v(v,s)\Big]^2 \times$$

$$\times f(x(v,s)-p)^2\, dp\, ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathrm{E}\Big[h(u-x(v,s_k))\, x'_v(v,s_k) - h(u-x(v,s))\, x'_v(v,s)\Big]^2 \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} f(x(v,s)-p)^2\, dp\, ds =$$

$$= \|f\|^2 \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathrm{E}\Big[h(u-x(v,s_k))\, x'_v(v,s_k) - h(u-x(v,s))\, x'_v(v,s)\Big]^2 ds \le$$

$$\le 2\|f\|^2 \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \Big[\mathrm{E}(h(u-x(v,s_k)) - h(u-x(v,s)))^2 x'_v(v,s_k)^2 +$$

$$+ \mathrm{E}h(u-x(v,s))^2 (x'_v(v,s_k) - x'_v(v,s))^2\Big]\, ds \le$$

$$\le 2\|f\|^2 \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} (\mathrm{E}(x(v,s_k)-x(v,s))^2 x'_v(v,s_k)^2 +$$

$$+ a^2 \mathrm{E}(x'_v(v,s_k) - x'_v(v,s))^2)\, ds \le$$

$$\le 2\|f\|^2 \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} (\sqrt{\mathrm{E}(x(v,s_k)-x(v,s))^4 \mathrm{E}x'_v(v,s_k)^4} +$$

$$+ a^2 \sqrt{\mathrm{E}(x'_v(v,s_k) - x'_v(v,s))^4})\, ds =$$

$$= 2\|f\|^2 \sum_{k=0}^{l-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} (\sqrt{3}(s-s_k)\|f\|_2^2 \sqrt{\mathrm{E}x'_v(v,s_k)^4} +$$

$$+ a^2 \sqrt{\mathrm{E}(x'_v(v,s_k) - x'_v(v,s))^4})\, ds \le$$

$$\leq 2\|f\|^2 \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} (\sqrt{3}(s-s_k)\|f\|_2^2 \sqrt{C_v} + a^2 \sqrt{C_v (s-s_k)^2})\, ds \leq$$

$$\leq 2\|f\|^2 \sqrt{C_v} \left(\sqrt{3}\|f\|_2^2 + a^2\right) t|\Delta| \to 0, \quad |\Delta| \to 0.$$

Таким образом, (5) доказано.

Обозначим

$$\psi(v,p,s) = f(x(v,s)-p)\, h(u - x(v,s))\, x'_v(v,s)$$

и докажем, что

$$\psi(v_1,p,s)\, \psi(v_2,p,s) \in L_1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0;T]).$$

Действительно,

$$\mathrm{E} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{0}^{T} \Big| \psi(v_1,p,s)\, \psi(v_2,p,s) \Big|\, ds\, dp\, dv_2\, dv_1 =$$

$$= \mathrm{E} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big| f(x(v_1,s)-p)\, f(x(v_2,s)-p)\, h(u-x(v_1,s))\, h(u-x(v_2,s)) \times$$

$$\times x'_{v_1}(v_1,s)\, x'_{v_2}(v_2,s) \Big|\, dp\, dv_1\, dv_2\, ds =$$

$$= \mathrm{E} \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Big| f(x(v_1,s)-p)\, f(x(v_2,s)-p) \Big|\, dp \right) \times$$

$$\times h(u-x(v_1,s))\, h(u-x(v_2,s)) x'_{v_1}(v_1,s)\, x'_{v_2}(v_2,s)\, dv_1\, dv_2\, ds \leq$$

$$\leq \|f\|_2^2\, \mathrm{E} \int\limits_{0}^{T} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} h(u-x(v,s)) x'_v(v,s)\, dv \right)^2 ds =$$

$$= \|f\|_2^2\, \mathrm{E} \int\limits_{0}^{T} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} h(u-v)\, dv \right)^2 ds = \|f\|_2^2\, \|h\|_2^2\, T < +\infty.$$

Тогда

$$\mathrm{E} \left(\int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(v-p)\, h(u-v)\, dv\, W(dp,ds) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{0}^{t} h(u-x(v,s))\, x'_v(v,s)\, dx(v,s)\, dv \right)^2 =$$

$$= \mathrm{E} \left(\int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x(v,s)-p)\, h(u-x(v,s))\, x'_v(v,s)\, dv\, W(dp,ds) - \right.$$

$$
-\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} f(x(v,s)-p)\,h(u-x(v,s))\,x'_v(v,s)\,W(dp,ds)\,dv\Bigg)^2 =
$$

$$
= \mathrm{E}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v,p,s)\,dv\,W(dp,ds) - \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v,p,s)\,W(dp,ds)\,dv\right)^2 =
$$

$$
= \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_1,p,s)\,dv_1\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_2,p,s)\,dv_2\right)dp\,ds -
$$

$$
-2\mathrm{E}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_1,p,s)\,dv_1\,W(dp,ds)\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_2,p,s)\,W(dp,ds)\right)dv_2 +
$$

$$
+\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{E}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_1,p,s)\,W(dp,ds)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_2,p,s)\,W(dp,ds)\right)dv_1\,dv_2 =
$$

$$
= \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_1,p,s)\,\psi(v_2,p,s)\,dv_1\,dv_2\right)dp\,ds -
$$

$$
-\,2\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(v_1,p,s)\,\psi(v_2,p,s)\,dv_1\right)dp\,ds\,dv_2 +
$$

$$
+\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{E}\psi(v_1,p,s)\,\psi(v_2,p,s)\,dp\,ds\,dv_1\,dv_2 = 0
$$

по теореме Фубини.

Таким образом,

$$
\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u-p-v)\ h(v)\mathbf{1}_{[0;\,t]}(s)\,dv\,W(dp,ds) =
$$

$$
= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^t h(u-x(v,s))\,x'_v(v,s)\,dx(v,s)\,dv,
$$

а значит, этот интеграл является $\mathcal{F}^x_T$-измеримой случайной величиной.

Поскольку функция h финитна и ее преобразование Фурье равно $\dfrac{2}{u^2}(1-\cos(au))$ и λ-почти всюду отлично от нуля, в силу леммы 3 произвольную функцию $g \in \in L_2(\mathbb{R}\times[0;T])$ можно приблизить линейными комбинациями функций вида

$$
\int\limits_{\mathbb{R}} f(u-\cdot-v)\ h(v)\,dv\cdot\mathbf{1}_{[0;\,t]},
$$

откуда следует, что случайная величина $\displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}} g(p,s)\,W(dp,ds)$ $\mathcal{F}^x_T$-измерима.

Положив

$$g(p,s) = \mathbf{1}_{\Delta\,\times\,[0;\,t)}(p,s),$$

где Δ — произвольное борелевское множество на прямой, получим

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} g(p,s)\, W(dp,ds) = W(\Delta \times [0;t)).$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_T^W \subset \mathcal{F}_T^x.$$

Обратное включение очевидно, поскольку x — решение стохастического уравнения (2).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть x и y являются решениями стохастических дифференциальных уравнений* (2) *и* (3) *соответственно, а ν_x и ν_y — распределения потоков x и y в пространстве измеримых функций на $\mathbb{R} \times [0;\infty)$.*

Тогда

$$\nu_y \ll \nu_x,$$

причем функция

$$\exp\left\{\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv) W(dp,ds) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv)\right)^2 dp\,ds\right\}$$

$\mathcal{F}_t^x$-измерима и является плотностью $\dfrac{d\nu_y}{d\nu_x}(x(\cdot,\cdot),t)$.

Доказательство. Поскольку в силу условия 1

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\mu(dv)\right)^2 dp =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(x(u,s),p)\, b(x(v,s),p)\, dp\, \mu(du)\, \mu(dv) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} B\, d\mu\, d\mu = B,$$

для любого

$$\mathrm{E} \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p) d\mu\right)^2 dp\,ds\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{t}{2}B\right\} < \infty$$

и по теореме Новикова [9] (гл. III, теорема 5.3)

$$Z_t = \exp\left\{\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv) W(dp,ds) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv)\right)^2 dp\,ds\Bigg\}$$

является непрерывным P-мартингалом.

Тогда существует мера Q такая, что для всех $t \geq 0$ ограничение Q на $\mathcal{F}_t^W$ абсолютно непрерывно относительно вероятности P с плотностью

$$\frac{dQ}{d\mathrm{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t^W} = Z_t,$$

а случайный процесс

$$M_t^\Delta - \int_0^t \frac{1}{Z_s}\,d\langle Z, M^\Delta\rangle_s,$$

где

$$M_t^\Delta = \int_0^t\int_\Delta f(x(u,s)-p)W(dp,ds),$$

является локальным мартингалом относительно меры Q ([10, с. 109], теорема 20).

По формуле Ито

$$\langle Z, M^\Delta\rangle_t = \int_0^t Z_s \int_\Delta\left(\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,d\mu\right) f(x(u,s)-p)\,dp\,ds.$$

Следовательно,

$$L_t^\Delta \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_0^t\int_\Delta f(x(u,s)-p)W(dp,ds)-$$

$$-\int_0^t\int_\Delta\left(\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,d\mu\right) f(x(u,s)-p)\,dp\,ds$$

является локальным мартингалом относительно меры Q.

Легко видеть, что характеристика L_t^Δ относительно меры Q имеет вид

$$\langle L^\Delta\rangle_t^Q = \int_0^t\int_\Delta f^2(x(u,s)-p)\,dp\,ds,$$

а совместная характеристика L^{Δ_1} и L^{Δ_2} относительно этой же меры

$$\langle L^{\Delta_1}, L^{\Delta_2}\rangle_t^Q = \int_0^t\int_{\Delta_1\cap\Delta_2} f^2(x(u,s)-p)\,dp\,ds.$$

На ступенчатых функциях вида

$$\varphi(p,s)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{kj}\mathbf{I}_{[t_k;t_{k+1})}(s)\mathbf{I}_{\Delta_j}(p),$$

где Δ_j, $j=0,\ldots,n$, — непересекающиеся борелевские множества на прямой, имеющие конечную меру Лебега, а случайные величины α_{kj}, $j=0,\ldots,n$, являются $\mathcal{F}^W_{t_k}$-измеримыми, зададим интеграл по L как

$$\int_0^t\int_\Delta \varphi(p,s)\,L(dp,ds)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{kj}(L^{\Delta_j}_{t_{k+1}}-L^{\Delta_j}_{t_k}).$$

Переходя к пределу в среднем квадратическом, получаем, что если для функции g интегралы в правой части следующего равенства существуют, то

$$\int_0^t\int_\Delta g(p,s)\,L(dp,ds)=\int_0^t\int_\Delta g(p,s)f(x(u,s)-p)W(dp,ds)-$$
$$-\int_0^t\int_\Delta\left(\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,d\mu\right)g(p,s)f(x(u,s)-p)\,dp\,ds.$$

Пусть

$$\widetilde{W}(\Delta\times[0;t))=\int_0^t\int_\Delta\frac{1}{f(x(u,s)-p)}\,L(dp,ds)=$$
$$=\int_0^t\int_\Delta W(dp,ds)-\int_0^t\int_\Delta\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv)\,dp\,ds=$$
$$=W(\Delta\times[0;t))-\int_0^t\int_\Delta\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv)\,dp\,ds.$$

Тогда $\widetilde{W}(\Delta)$ при любом Δ является непрерывным мартингалом относительно меры Q, причем

$$\left\langle\widetilde{W}(\Delta_1),\widetilde{W}(\Delta_2)\right\rangle^Q_t=\lambda(\Delta_1\cap\Delta_2)\,t.$$

В силу леммы 2 $\widetilde{W}$ является винеровским листом относительно меры Q.

При этом

$$\int_0^t\int_\Delta f(x(u,s)-p)\,\widetilde{W}(dp,ds)=\int_0^t\int_\Delta L(dp,ds)=$$
$$=\int_0^t\int_\Delta f(x(u,s)-p)\,W(dp,ds)-$$

$$-\int_0^t \int_\Delta \left(\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv) \right) f(x(u,s)-p)\,dp\,ds.$$

Таким образом,

$$x(u,t) = \int_0^t \int_\Delta f(x(u,s)-p)\,W(dp,ds) =$$

$$= \int_0^t \int_\Delta \left(\int_{\mathbb{R}} b(x(v,s),p)\,\mu(dv) \right) f(x(u,s)-p)\,dp\,ds +$$

$$+ \int_0^t \int_\Delta f(x(u,s)-p)\,\widetilde{W}(dp,ds).$$

В силу единственности решения уравнения (3)

$$Q \circ x^{-1} = P \circ y^{-1}.$$

Следовательно,

$$\nu_y \ll \nu_x$$

и

$$\frac{d\nu_y}{d\nu_x}(x(\cdot,\cdot),t) = \mathrm{E}\{Z_t \mid \mathcal{F}_t^x\}.$$

Используя теорему 2, окончательно получаем

$$\frac{d\nu_y}{d\nu_x}(x(\cdot,\cdot),t) = Z_t.$$

Теорема 3 доказана.

1. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations // Text. Monograph, Cambridge Stud. Adv. Math. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1990. – **24**. – 346 p.
2. *Kotelenez P.* A stochastic Navier – Stokes equation for the vorticity of a two-dimentional fluid // Ann. Appl. Probab. – 1995. – **5**, № 4. – P. 1126 – 1160.
3. *Dorogovtsev A. A.* Measure-valued Markov processes and stochastic flows on abstract spaces // Stochast. and Stochast. Repts. – 2004. – **76**, № 5. – P. 395 – 407.
4. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.
5. *Карликова М. П.* О слабом решении уравнения для эволюционного потока со взаимодействием // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 895 – 903.
6. *Карликова М. П.* О переносе обобщенных функций эволюционным потоком // Там же. – № 8. – С. 1020 – 1029.
7. *Пилипенко А. Ю.* Мерозначные диффузии и континуальные системы взаимодействующих частиц в случайной среде // Там же. – № 9. – С. 1289 – 1301.
8. *Brayman V. B.* On existence and uniqueness of a solution for differential equation with interaction governed by generalized function in abstract Wiener space // Theory Stochas. Process. – 2005. – **11**(27), № 3-4. – С. 29 – 41.
9. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986. – 448 с.
10. *Protter Philip.* Stochastic integration and differential equations. A new approach // Appl. Math. – Berlin: Springer, 1990. – **21**. – 302 p.

Получено 14.02.07,
после доработки — 18.11.08