УДК 517.911.5 + 517.977.5

И. В. Молчанюк, А. В. Плотников (Одес. акад. стр-ва и архитектуры)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С НЕЧЕТКИМ ПАРАМЕТРОМ

A problem of the high-speed operation is considered for linear control systems with a fuzzy right-hand side. For this problem, a notion of optimal solution is introduced and necessary and sufficient conditions of the optimality are established in the form of the maximum principle.

Розглянуто задачу швидкодії для лінійних систем управління з нечіткою правою частиною. Для цієї задачі введено поняття оптимального розв'язку і встановлено необхідні та достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму.

1. Введение. Понятие нечеткого множества было введено в работе [1]. В работе [2] впервые рассматривалось нечеткое дифференциальное уравнение, которое в дальнейшем исследовалось в работах [3 – 11], а в работах [12 – 14] изучались дифференциальные включения с нечеткой правой частью, которые затем рассматривались в [15, 16].

В данной работе продолжены исследования, начатые в [17]. В ней рассматривается одна из задач теории оптимального управления — задача быстродействия, которая сформулирована для управляемых дифференциальных включений с нечеткой правой частью. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума, которые обобщают результаты, полученные в [18] для обычных управляемых дифференциальных включений.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathrm{Comp}(R^n)$ $\big(\mathrm{Conv}(R^n)\big)$ — пространство непустых (выпуклых) компактных подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = \min\{r \geq 0 \,|\, A \subset B + S_r(0),\, B \subset A + S_r(0)\},$$

где $A, B \subset \mathrm{Comp}(R^n)$ $\big($или $\mathrm{Conv}(R^n)\big)$, $S_r(a)$ — шар в R^n радиуса r с центром в точке $a \in R^n$.

Пусть поведение управляемой системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы соответствующих размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times k)$; $u(t) \in U(t)$ — вектор управления; $U(\cdot)$: $R^1_+ \to \mathrm{Conv}(R^m)$ — многозначное отображение; $v(t) \in V$ — нечеткое внешнее воздействие (помеха); V — нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(x)$, $\mu(\cdot): R^k \to [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям.

Предположение 1. 1. *Матрицы* $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ *измеримы на* R^1_+.

2. *Существуют суммируемые функции* $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$ *такие, что* $\|A(t)\| \leq a(t)$, $\|B(t)\| \leq b(t)$, $\|C(t)\| \leq c(t)$ *для почти всех* $t \in R^1_+$.

3. *Многозначное отображение* $U(t)$ *измеримо на* R^1_+.

4. *Существует суммируемая функция* $g(t) > 0$ *такая, что* $h(U(t), \{0\}) \leq$ $\leq g(t)$ *для почти всех* $t \in R^1_+$.

5. *Характеристическая функция* $\mu(\cdot): R^k \to [0,1]$ *удовлетворяет условиям*:

а) *функция* $\mu(\cdot)$ *модальная, т. е. существует хотя бы одно* $y_0 \in R^k$ *такое, что* $\mu(y_0) = 1$;

б) *функция* $\mu(y)$ *непрерывна по* y *на* R^k;

в) *для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $y \in \{y \in R^k \mid \mu(y) \in (0,1)\}$ *существуют* $y_1, y_2 \in R^k$ *такие, что* $\| y - y_1 \| < \varepsilon$, $\| y - y_2 \| < \varepsilon$ *и* $\mu(y_1) < \mu(y) < \mu(y_2)$;

г) *множество* $[V]^0 = \mathrm{cl}\{y \mid \mu(y) > 0\}$ *компактно.*

Определение 1. *Множество всех измеримых селекторов* $U(\cdot)$ *на* $[0,\infty)$ *будем называть множеством допустимых управлений и обозначать* U.

Введем нечеткое управляемое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u + C(t)V, \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

которое получается из системы (1) в результате замены параметра $v(t)$ на нечеткое множество V.

Обозначим через $X(u)$ нечеткий пучок траекторий системы (2), соответствующих допустимому управлению $u(\cdot)$, а через $X(t,u)$ сечение пучка $X(u)$ в момент времени $t > 0$, которое является некоторым нечетким множеством с характеристической функцией $\chi(x, t, u)$.

***Замечание* 1.** Из [17] известно, что при выполнении условий предположения 1 нечеткое многозначное отображение $X(\cdot, u)$ имеет вид

$$X(t,u) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\,B(s)\,u(s)\,ds + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\,C(s)\,V\,ds \tag{3}$$

и является нечетко выпуклым и нечетко компактным в каждый момент времени $t > 0$ и абсолютно непрерывным на R^1_+, характеристическая функция $\chi(x, t, u)$ удовлетворяет условию 5 предположения 1 по x для всех $t \ge 0$ и всех допустимых управлений $u(\cdot)$, $\Phi(t)$ — матрица Коши дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$, а интеграл в последнем слагаемом понимается в смысле [19].

Определение 2. *Нечетким множеством достижимости* $Y(T)$ *системы* (2) *назовем множество всех нечетких множеств* $X(T,u)$, *т. е.*

$$Y(T) = \{X(T,u) \mid u(\cdot) \in U\}.$$

***Замечание* 2.** Из [17] известно, что при выполнении условий предположения 1 нечеткое множество достижимости $Y(T)$ является выпуклым и компактным множеством нечетких множеств.

3. Задачи быстродействия нечеткими пучками траекторий. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: определить минимальную величину $T > 0$ и допустимое управление $u^*(\cdot) \in U$ такие, что для соответствующего сечения пучка $X(T, u^*)$ системы (2) выполняется одно из условий

$$X(T,u^*) \cap S_k \neq \varnothing, \tag{4}$$

$$X(T,u^*) \subset S_k, \tag{5}$$

$$X(T,u^*) \supset S_k, \tag{6}$$

где S_k — нечеткое целевое множество с характеристической функцией $\varsigma(x)$, удовлетворяющей условию 5 предположения 1.

Определение 3. *Будем говорить, что пара* $(u^*(\cdot), X(T, u^*))$ *удовлетворяет условию максимума на отрезке* $[0,T]$, *если существует для всех* $t \in [0,T]$ *векторная функция* $\psi(\cdot)$ *— решение сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\,\psi(t), \quad \psi(0) \in S_1(0), \tag{7}$$

и выполнены условия:

1) *условие максимума*: *для почти всех* $t \in [0, T]$

$$\big(u^*(t), \psi(t)\big) = C(B(t)U(t), \psi(t)); \tag{8}$$

2) *условие трансверсальности на* S_k:

а) *для случая* (4)

$$C\Big(\big[X(T, u^*)\big]^1, \psi(t)\Big) = -C\Big([S_k]^1, -\psi(T)\Big); \tag{9}$$

б) *для случая* (5): *для любого* $\alpha \in [0,1]$

$$C\Big(\big[X(T, u^*)\big]^\alpha, \psi(t)\Big) \le C\Big([S_k]^\alpha, \psi(T)\Big)$$

и существует хотя бы одно $\alpha' \in [0,1]$ *такое*, *что*

$$C\Big(\big[X(T, u^*)\big]^\alpha, \psi(t)\Big) = C\Big([S_k]^\alpha, \psi(T)\Big);$$

в) *для случая* (6): *для любого* $\alpha \in [0,1]$

$$C\Big(\big[X(T, u^*)\big]^\alpha, -\psi(t)\Big) \le C\Big([S_k]^\alpha, -\psi(T)\Big)$$

и существует хотя бы одно $\alpha' \in [0,1]$ *такое*, *что*

$$C\Big(\big[X(T, u^*)\big]^\alpha, -\psi(t)\Big) = C\Big([S_k]^\alpha, -\psi(T)\Big),$$

где $[G]^\alpha$ — α-*срезка нечеткого множества* [1], *т. е.*

$$[G]^\alpha = \begin{cases} \{y \,|\, \beta(y) \ge \alpha\}, & \alpha \in (0,1], \\ \operatorname{cl}\{y \,|\, \beta(y) > 0\}, & \alpha = 0, \end{cases}$$

$\beta(\cdot)$ — *характеристическая функция нечеткого множества* G, $C(X, \psi) = \max\limits_{x \in X}(x, \psi)$ — *опорная функция множества* $X \in \operatorname{Comp}(R^n)$ *по вектору* $\psi \in R^n$ [20].

Обозначим

$$Z(T) = \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)C(s)V\,ds = \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)C(s)\,ds\,V.$$

Теорема 1 (необходимое условие оптимальности). *Пусть справедливы условия предположения* 1, $u^*(\cdot)$ — *оптимальное управление*, *а* $X(\cdot, u^*)$ — *соответствующий ему пучок системы* (2).

Тогда пара $\big(u^*(\cdot), X(\cdot, u^*)\big)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *принципу максимума на* $[0, T]$;

2) *существует множество* $\mathrm{K} \in \operatorname{Comp}(R^n)$ *такое, что*:

для случая (5)

$$\mathrm{K} = \Big\{k \in R^n \,|\, Z(T) + k \subset S_k\Big\}, \tag{10}$$

для случая (6)

$$\mathrm{K} = \Big\{k \in R^n \,|\, S_k \subset Z(T) + k\Big\} \tag{11}$$

и управление $u^*(\cdot)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi(T)x_0 + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)B(s)u^*(s)\,ds \in \mathrm{K}.$$

Доказательство. Рассмотрим подробно задачу (2), (4).

Для доказательства применим схему рассуждений, аналогичную используемой при доказательстве принципа максимума для линейных дифференциальных уравнений [20].

Пусть $u^*(\cdot)$ — оптимальное управление, $X(\cdot, u^*)$ — соответствующий ему пучок системы (1), который удовлетворяет граничным условиям:

1) $X(T, u^*) \in Y(T)$;

2) $X(T, u^*) \cap S_k \neq \varnothing$.

Очевидно, что из предположения 1 условие $\left[X(T, u^*)\right]^1 \cap [S_k]^1 \neq \varnothing$ гарантирует выполнение условия 2. Это означает, что для любого $\psi \in S_1(0)$

$$\max_{X \in [Y(T)]^1} C(X, \psi) \;\geq\; -C\left([S_k]^1, -\psi\right). \tag{12}$$

Следовательно,

$$p \;\equiv\; \max_{X \in [Y(T)]^1} \min_{\psi \in S_1(0)} C(X, \psi) \;+\; C\left([S_k]^1, -\psi\right) \;\geq\; 0. \tag{13}$$

Действительно, если $p < 0$, то не существует такого множества $X \in [Y(T)]^1$, чтобы для всех $\psi \in S_1(0)$ выполнялось неравенство

$$C(X, \psi) \;+\; C\left([S_k]^1, -\psi\right) \;\geq\; 0,$$

что противоречит неравенству (12).

Покажем, что существуют $\psi = \overline{\psi} \in S_1(0)$ и $X = \left[X(T, u^*)\right]^1$, при которых $p < 0$. Из соотношения $\left[X(T, u^*)\right]^1 \cap [S_k]^1 \neq \varnothing$ следует, что для любого $\psi \in$ $\in S_1(0)$

$$q(T, \psi) \;=\; C\left(\left[X(T, u^*)\right]^1, \psi\right) \;+\; C\left([S_k]^1, -\psi\right) \;\geq\; 0. \tag{14}$$

Поскольку $\left[X(T, u^*)\right]^1$ непрерывно зависит от времени [17], функция $q(T, \psi)$ непрерывна по ψ и T.

Если предположить, что $q(T, \psi) > 0$ для любого $\psi \in S_1(0)$, а следовательно, и $p > 0$, то получим

$$q^0(T) \;=\; \min_{\psi \in S_1(0)} q(T, \psi) \;\geq\; \gamma \;>\; 0,$$

где функция $q^0(T)$ непрерывна. Следовательно, найдется $\tau < T$ такое, что $q^0(\tau) \geq 0$. Это означает, что для любого $\psi \in S_1(0)$

$$C\left(\left[X(\tau, u^*)\right]^1, \psi\right) \;+\; C\left([S_k]^1, -\psi\right) \;\geq\; 0,$$

т. е. $\left[X(T, u^*)\right]^1 \cap [S_k]^1 \neq \varnothing$. Это противоречит оптимальности времени T.

Если предположить, что $p > 0$ и максимум в (13) достигается при $X \neq$ $\neq \left[X(T, u^*)\right]^1$, то аналогично предыдущему приходим к противоречию.

Таким образом, существует вектор $\psi \in S_1(0)$ такой, что

$$C\left(\left[X(T, u^*)\right]^1, \overline{\psi}\right) \;=\; \max_{X \in [Y(T)]^1} C(X, \overline{\psi}), \tag{15}$$

$$C\Big(\big[X(T,u^*)\big]^1,\overline{\psi}\Big) = -C\Big(\big[S_k\big]^1,-\overline{\psi}\Big). \tag{16}$$

Из соотношений (3) и (15) получаем

$$\left(\int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)B(s)u^*(s)\,ds,\overline{\psi}\right) = \max_{u(\cdot)\in U}\left(\int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)\,ds,\overline{\psi}\right). \tag{17}$$

Из (17), используя свойства интеграла и скалярной функции, получаем

$$\Big(\Phi(T)\Phi^{-1}(t)B(t)u^*(t),\overline{\psi}\Big) = \max_{u(\cdot)\in U}\Big(\Phi(T)\Phi^{-1}(t)B(t)u(t),\overline{\psi}\Big) \tag{18}$$

для почти всех $t\in[0,T]$.

Учитывая, что $\psi(t) = \left(\Phi(T)\Phi^{-1}(t)\right)^T\overline{\psi}\Big/\Big\|\left(\Phi(T)\Phi^{-1}(t)\right)^T\overline{\psi}\Big\|$ является решением сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^T(t)\psi(t)$ с начальным условием $\psi(0)\in \in S_1(0)$ для почти всех $t\in[0,T]$, соотношения (16) и (18) можно записать в форме соответствующих соотношений принципа максимума.

Случаи (5) и (6) доказываются аналогично с небольшими изменениями условия (12):

для случая (5): для любого $\alpha\in[0,1]$

$$\max_{X\in[Y(T)]^\alpha} -C(X,-\psi) + C\Big([S_k]^\alpha,-\psi\Big) \ge 0$$

и существует $\alpha'\in[0,1]$ такое, что

$$\max_{X\in[Y(T)]^{\alpha'}} -C(X,-\psi) + C\Big([S_k]^{\alpha'},-\psi\Big) = 0;$$

для случая (6): для любого $\alpha\in[0,1]$

$$\max_{X\in[Y(T)]^\alpha} C(X,\psi) + C\Big([S_k]^\alpha,\psi\Big) \ge 0$$

и существует $\alpha'\in[0,1]$ такое, что

$$\max_{X\in[Y(T)]^{\alpha'}} C(X,\psi) + C\Big([S_k]^{\alpha'},\psi\Big) = 0.$$

Тем самым условие 1 доказано. Нетрудно видеть, что условие 2 — гарантия того, что $X(T,u^*)\subset S_k$ или $X(T,u^*)\supset S_k$.

Теорема доказана.

Теорема 2 (достаточное условие оптимальности). *Пусть справедливы условия предположения* 1, $u^*(\cdot)$ *— допустимое управление и пара* $\big(u^*(\cdot),\ X(T,u^*)\big)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *на* $[0,T]$. *Кроме того, пусть* $X(t,u^*)$ *удовлетворяет усиленному условию трансверсальности на множестве* S_k *с функцией* $\psi(\cdot)$, *т. е. для всех* $t\in[0,T)$ *выполняются неравенства*:

а) *для случая* (4)

$$C\Big(\big[X(t,u^*)\big]^1,\psi(t)\Big) < -C\Big(\big[S_k\big]^1,-\psi(t)\Big); \tag{19}$$

б) *для случая* (5)

$$C\Big(\big[X(t,u^*)\big]^\alpha,\psi(t)\Big) > C\Big(\big[S_k\big]^\alpha,\psi(t)\Big) \tag{20}$$

для любого $\alpha\in[0,1]$;

в) *для случая* (6)

$$C\left(\left[X(t, u^*)\right]^{\alpha}, \psi(t)\right) < C\left([S_k]^{\alpha}, \psi(t)\right) \tag{21}$$

для любого $\alpha \in [0, 1]$.

Тогда $u^*(\cdot)$ — *оптимальное управление*.

Доказательство проведем для случаев (2) и (4) (в случаях (5) и (6) доказательство проводится аналогично с небольшими изменениями). Выполнимость необходимых условий оптимальности очевидна. Докажем дополнительное условие оптимальности.

Заметим, что если условие (19) выполняется для некоторого $\bar{t} \in [0, T)$, то условие $X(\bar{t}, u^*) \cap S_k \neq \varnothing$ не имеет места.

Возьмем произвольное допустимое управление $u^*(\cdot) \in U$ на отрезке $[0, t_1]$, $t_1 < T$, и пусть $X(\cdot, u)$ — соответствующая ему многозначная траектория. Учитывая выполнение условия максимума, получаем неравенство

$$C\left([X(t, u)]^1, \psi(t)\right) \leq C\left(\left[X(t, u^*)\right]^1, \psi(t)\right), \tag{22}$$

которое справедливо для всех $t \in [0, t_1]$.

Пусть теперь задан некоторый момент времени $\tau \leq t_1 < T$. Тогда из (19) и (22) следует, что

$$C\left([X(\tau, u)]^1, \psi(\tau)\right) < -C\left([S_k]^1, -\psi(\tau)\right),$$

т. е. условие $X(\tau, u) \cap S_k \neq \varnothing$ не выполняется.

В силу произвольности выбора допустимого управления $u(\cdot) \in U$ можно утверждать, что не существует ни одной многозначности траектории, удовлетворяющей при $\tau < T$ условию $X(\tau, u) \cap S_k \neq \varnothing$. Тем самым управление $u^*(\cdot)$ оптимально.

Теорема 2 доказана.

Пример. Пусть поведение объекта описывается системой

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1 + v_1, \qquad x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_2 + v_2, \qquad x_2(0) = 0,$$

где (x_1, x_2) — фазовое пространство; $u \in U = S_1(0)$ — вектор управления; $v \in R^2$ — вектор помехи, который принадлежит нечеткому множеству V с характеристической функцией

$$\nu(v) = \begin{cases} \sqrt{1 - 4v_1^2 - 9v_2^2}, & 4v_1^2 + 9v_2^2 \leq 1, \\ 0, & 4v_1^2 + 9v_2^2 > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу быстродействия типа (4), т. е. необходимо найти такие T^* и $u^*(\cdot)$, что $T^* = \min T(u)$, $X(T^*, u^*) \cap S_k \neq \varnothing$, где S_k — нечеткое множество с характеристической функцией

$$\varsigma(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - (x_1 - 2\pi)^2 - (x_2 - 1)^2}, & x \in Q, \quad x_2 \geq 1, \\ \sqrt{1 - (x_1 - 2\pi)^2}, & x \in Q, \quad -1 < x_2 < 1, \\ \sqrt{1 - (x_1 - 2\pi)^2 - (x_2 + 1)^2}, & x \in Q, \quad x_2 \leq -1, \\ 0, & x \notin Q, \end{cases}$$

$$Q = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \left| \begin{array}{l} 2\pi - 1 \le x_1 \le 2\pi + 1, \\ \sqrt{1 - (x_1 - 2\pi)^2} - 1 \le x_2 \le \sqrt{1 - (x_1 - 2\pi)^2} + 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Легко проверить, что оптимальная пара $T^* = 2\pi$ и $u^*(t) = (\cos t, -\sin t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1:

1) $\big(u^*(t),\ \psi(t)\big) = C(U,\ \psi(t))$ для почти всех $t \in [0, 2\pi]$;

2) $C\Big(\big[X(T^*, u^*)\big]^1,\ \psi(T^*)\Big) = -C\Big(\big[S_k\big]^1,\ -\psi(T^*)\Big)$,

где $\psi(t) = (\cos t, -\sin t)$ для почти всех $t \in [0, 2\pi]$, $\big[X(T^*, u^*)\big]^1 = \big(T^* \cos T^*,$ $-T^* \sin T^*\big) = (2\pi, 0)$, $\big[S_k\big]^1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2\pi, -1 \le x_2 \le 1\}$.

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Inf. Control. – 1965. – **8**. – P. 338 – 353.
2. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – **24**, № 3. – P. 301 – 317.
3. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Плотникова Л. И.* Усреднение нечетких дифференциальных уравнений // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2007. – Вып. 1 (27). – С. 185 – 190.
4. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Ω-пространство и его связь с теорией нечетких множеств // Там же. – 2007. – Вып. 2 (28). – С. 182 – 191.
5. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1990. – **35**. – P. 389 – 396.
6. *Kaleva O.* The Peano theorem for fuzzy differential equations revisited // Ibid. – 1998. – № 98. – P. 147 – 148.
7. *Kaleva O.* O notes on fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. – 2006. – № 64. – P. 895 – 900.
8. *Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. – Cambridge Sci. Publ., 2006. – 204 p.
9. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – **22**, № 2. – P. 271 – 279.
10. *Park J. Y., Han H. K.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – № 110. – P. 69 – 77.
11. *Vorobiev D., Seikkala S.* Towards the theory of fuzzy differential equations // Ibid. – 2002. – № 125. – P. 231 – 237.
12. *Aubin J. P.* Fuzzy differential inclusions // Probl. Control and Inform. Theory. – 1990. – **19**, № 1. – P. 55 – 67.
13. *Baidosov V. A.* Differential inclusions with fuzzy right-hand side // Sov. Math. – 1990. – **40**, № 3. – P. 567 – 569.
14. *Baidosov V. A.* Fuzzy differential inclusions // J. Appl. Math. and Mech. – 1990. – **54**, № 1. – P. 8 – 13.
15. *Hullermeier E.* An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems // Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge Based Systems. – 1997. – № 5. – P. 117 – 137.
16. *Lakshmikantham V., Mohapatra R.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions // Ser. Math. Anal. and Appl. – London: Taylor and Francis, Ltd., 2003. – 143 p.
17. *Плотников А. В., Молчанюк И. В.* Линейные системы управления с нечетким параметром // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 63 – 73.
18. *Плотников А. В.* Линейные системы управления с многозначными траекториями // Кибернетика. – 1987. – № 4. – С. 130 – 131.
19. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1983. – № 91. – P. 552 – 558.
20. *Благодатских В. И.* Линейная теория оптимального управления. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 95 с.

Получено 17.09.07,
после доработки — 28.05.08