УДК 517.956.222, 517.982.27

А. А. Мурач (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Чернигов. технол. ун-т)

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ХЕРМАНДЕРА

In the Hilbert scale of the Hörmander functional spaces given in $\mathbb{R}^n$, a linear system of pseudodifferential equations uniformly elliptic in the sense of Petrovs'kyi is studied. An a priori estimate of a solution of the system is proved and its interior smoothness is investigated in this scale. As an application, a sufficient condition for the existence of continuous bounded derivatives of the solution is found.

У гільбертовій шкалі функціональних просторів Хермандера, заданих у $\mathbb{R}^n$, вивчено рівномірно еліптичну за Петровським лінійну систему псевдодиференціальних рівнянь. Доведено апріорну оцінку розв'язку системи і досліджено його внутрішню гладкість у цій шкалі. Як застосування, знайдено достатню умову існування неперервних обмежених похідних у розв'язку.

1. Введение и постановка задачи. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная система псевдодифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k} u_k = f_j, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{1}$$

в которой $n, p \in \mathbb{N}$, а $A_{j,k}$, $k = 1, \ldots, p$, — скалярные классические (т.е. полиоднородные) псевдодифференциальные операторы (ПДО), заданные в пространстве $\mathbb{R}^n$ [11] (пп. 1.5, 3.1). Символ $a_{j,k}(x,\xi)$ ПДО $A_{j,k}$ является комплекснозначной бесконечно дифференцируемой функцией аргументов $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что для любых мультииндексов α, β существует число $c_{\alpha,\beta} > 0$, для которого

$$\left|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a_{j,k}(x,\xi)\right| \leq c_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{r_{j,k} - |\beta|} \quad \text{для любых} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Здесь $r_{j,k} := \operatorname{ord} A_{j,k}$, $\langle\xi\rangle := (1 + \|\xi\|^2)^{1/2}$, $\|\xi\| := (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}$, $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $|\beta| := \beta_1 + \ldots + \beta_n$ для мультииндекса $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Для классического ПДО $A_{j,k}$ определен также главный символ, положительно однородный по переменной ξ порядка $r_{j,k}$ и не равный тождественно нулю. Положим

$$m_k := \max\{\operatorname{ord} A_{1,k}, \ldots, \operatorname{ord} A_{p,k}\} \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, p.$$

Решение уравнения (1) понимается в смысле теории распределений. Важным примером системы (1) является система линейных дифференциальных уравнений с бесконечно гладкими комплексными коэффициентами, ограниченными со всеми производными в $\mathbb{R}^n$.

Предполагается, что система (1) *равномерно эллиптическая в* $\mathbb{R}^n$ по Петровскому, т. е. [1] (п. 3.2, b) существует число $c > 0$ такое, что

$$\left|\det\left(a_{j,k}^{(0)}(x,\xi)\right)_{j,k=1}^{p}\right| \geq c \quad \text{для любых} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi\| = 1.$$

Здесь $a_{j,k}^{(0)}(x,\xi)$ — главный символ ПДО $A_{j,k}$ в случае, когда $\operatorname{ord} A_{j,k} = m_k$, либо $a_{j,k}^{(0)}(x,\xi) \equiv 0$, если $\operatorname{ord} A_{j,k} < m_k$.

Для общих эллиптических систем известны внутренние априорные оценки решения в подходящих парах пространств Гельдера (с нецелыми индексами) [2] и пространств Соболева [3] (п. 1.0). В случае, когда эллиптическая система задана на гладком замкнутом (компактном) многообразии, эти оценки равносильны тому, что ограниченный оператор, соответствующий системе, является нетеровым (т. е. имеет конечный индекс) [4] (п. 19.5), [1] (п. 3.2, b). Если многообразие не компактно, то на символ равномерно эллиптического ПДО необходимо накладывать дополнительные условия, обеспечивающие нетеровость оператора (см. [4] (п. 3.1, h) и приведенную там библиографию).

В отличие от указанных работ мы изучаем систему (1) в гильбертовой шкале изотропных пространств Хермандера [5] (п. 2.2)

$$H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) := B_{2,\varphi(\langle\cdot\rangle)} = \left\{ w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \colon \varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n_\xi) \right\}, \tag{3}$$

где функциональный параметр $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ является RO-меняющимся на бесконечности по Авакумовичу [6], [7] (приложение 1). В (3), как обычно, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — линейное топологическое пространство Шварца медленно растущих распределений (антилинейных функционалов), заданных в $\mathbb{R}^n$, а $\widehat{w}(\xi)$ — преобразование Фурье распределения w. Отметим, что в гильбертовом случае пространства Хермандера, а значит, и пространства (3) совпадают с пространствами, введенными и изученными Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [8] (§ 2).

Класс пространств (3) совпадает (с точностью до эквивалентности норм) с классом *всех* интерполяционных гильбертовых пространств для пар гильбертовых пространств Соболева (см. [9, 10]). Благодаря этому интерполяционному свойству пространства (3) занимают особое место среди пространств обобщенной гладкости, которые все активнее исследуются и используются в последние годы (см. обзор [11], работу [12] и приведенную там библиографию). Поскольку при интерполяции наследуется ограниченность линейных операторов, мы можем распространить классическую теорию эллиптических ПДО [1], [4] (гл. 19) на указанные пространства Хермандера.

Линейный оператор, соответствующий системе (1), непрерывно действует из пространства $\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $(H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p$, где $\rho(t) := t$ при $t \geq 1$. В парах этих пространств нами доказана априорная оценка решения системы (1) (п. 3, теорема 1) и исследована его внутренняя гладкость (п. 4, теоремы 2 и 3). В качестве приложения установлено одно достаточное условие существования непрерывных ограниченных производных у решения (п. 5, теорема 4). В п. 2 работы приведены необходимые нам сведения о пространствах Хермандера.

Аналогичные результаты справедливы для эллиптических систем на замкнутых (компактных) гладких многообразиях и будут приведены в другой статье. Для более узкой шкалы пространств Хермандера (уточненной шкалы) эллиптические операторы и эллиптические краевые задачи изучены в работах автора [13 – 22]. Эти пространства привязаны к пространствам Соболева с помощью числового параметра.

2. Пространства Хермандера. Предположим, что измеримая по Борелю функция $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ является весовой в смысле [8, с. 9], т. е. существуют числа $c \geq 1$ и $l > 0$ такие, что

$$\varphi(\tau)\,/\,\varphi(t) \leq c\left(1 + |\tau - t|^{l}\right) \quad \text{для всех} \quad \tau, t \geq 1.$$

Определение 1. *Изотропное линейное пространство Хермандера* $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *состоит из всех распределений* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *таких, что* $\widehat{u}$ *локально суммируемо по Лебегу в* $\mathbb{R}^n$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

В пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение распределений u_1, u_2 по формуле

$$(u_1, u_2)_{\varphi} := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u_1}(\xi)\overline{\widehat{u_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Оно задает на $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ структуру гильбертова пространства и определяет норму $\|u\|_{\varphi} := (u,u)_{\varphi}^{1/2}$.

Пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ полно и сепарабельно. Множество $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями плотно в $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Далее мы ограничимся следующим подклассом весовых функций.

Определение 2. *Пусть* RO — *множество всех измеримых по Борелю функций* $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$, *для которых существуют числа* $a > 1$ *и* $c \ge 1$ *такие, что*

$$c^{-1} \le \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \le c \quad \text{для любых} \quad t \ge 1, \quad \lambda \in [1, a]$$

(*постоянные* a *и* c *зависят от* φ). *Такие функции называют* RO-*меняющимися на бесконечности.*

Класс RO-меняющихся функций введен Авакумовичем [6] в 1936 г. и достаточно полно изучен (см., например, [7], приложение 1). Отметим некоторые его свойства.

Предложение 1. *Справедливо следующее описание класса* RO:

$$\varphi \in \mathrm{RO} \iff \varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int_1^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau}\, d\tau\right), \quad t \ge 1,$$

где вещественные функции β *и* ε *измеримы по Борелю и ограничены на полуоси* $[1,\infty)$.

Предложение 2. *Для любой функции* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *существуют числа* s_0, $s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \le s_1$, *и* $c_1 \ge 1$ *такие, что*

$$c_1^{-1}\lambda^{s_0} \le \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \le c_1 \lambda^{s_1} \quad \text{при} \quad t \ge 1, \quad \lambda \ge 1. \tag{4}$$

Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Положим:

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R}\colon \text{ выполняется } (4)\},$$

$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R}\colon \text{ выполняется } (4)\}.$$

Очевидно, что $-\infty < \sigma_0(\varphi) \le \sigma_1(\varphi) < \infty$.

Если для функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ определен *порядок* изменения $\sigma \in \mathbb{R}$, т. е. $\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) =: \sigma$, то удобно обозначение $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) =: H^{\sigma,\varphi_0}(\mathbb{R}^n)$, где $\varphi(t) = t^{\sigma}\varphi_0(t)$. В случае, когда функция φ_0 медленно меняется по Карамата на бесконечности [7] (п. 1.1), пространство $H^{\sigma,\varphi_0}(\mathbb{R}^n)$ изучено авторами в [14, 19]. Для степенной функции $\varphi(t) = t^{\sigma}$ пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с гильбертовым пространством Соболева $H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Из неравенства (4) при $t = 1$ следуют непрерывные и плотные вложения

$$H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для всех чисел} \quad s_1 > \sigma_1(\varphi), \ s_0 < \sigma_0(\varphi). \tag{5}$$

3. Эллиптическая система в пространствах Хермандера. Следуя [1] (п. 1.1), обозначим через $\Psi^r(\mathbb{R}^n)$, где $r \in \mathbb{R}$, класс всех ПДО G в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно классических) таких, что их символ $g(x,\xi)$ удовлетворяет условию вида (2): для любых мультииндексов α, β существует число $c_{\alpha,\beta} > 0$, для которого

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x,\xi)\right| \leq c_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{r-|\beta|} \quad \text{при любых} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Положим

$$\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \Psi^r(\mathbb{R}^n).$$

Предложение 3. *Пусть* $r \in \mathbb{R}$ *и* $G \in \Psi^r(\mathbb{R}^n)$. *Сужение линейного отображения* $u \to Gu$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *на пространство* $H^\psi(\mathbb{R}^n)$ *является ограниченным оператором*

$$G: H^\psi(\mathbb{R}^n) \to H^{\psi\rho^{-r}}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{для любого} \quad \psi \in \mathrm{RO}. \tag{6}$$

Это предложение доказано в [9] (п. 5, лемма 2). Отметим, что ограниченность оператора (6) следует с помощью интерполяции из ограниченности ПДО G в шкале пространств Соболева.

Запишем систему (1) в матричной форме: $Au = f$. Здесь $A := (A_{j,k})_{j,k=1}^p$ — матричный ПДО, а $u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_p)$, $f = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p)$ — функциональные столбцы. Поскольку $A_{j,k} \in \Psi^{m_k}(\mathbb{R}^n)$, согласно предложению 3 имеем ограниченный линейный оператор

$$A: \bigoplus_{k=1}^p H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n) \to (H^\varphi(\mathbb{R}^n))^p \quad \text{для любого} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{7}$$

Найдем априорную оценку решения уравнения $Au = f$ для оператора (7).

Поскольку система (1) равномерно эллиптическая в $\mathbb{R}^n$, для матричного ПДО A существует параметрикс B, т. е. справедливо следующее предложение [1] (п. 3.2,b).

Предложение 4. *Существует матричный классический ПДО* $B = (B_{k,j})_{k,j=1}^p$ *такой, что* $B_{k,j} \in \Psi^{-m_k}(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$BA = I + T_1, \quad AB = I + T_2, \tag{8}$$

где $T_1 = (T_1^{j,k})_{j,k=1}^p$, $T_2 = (T_2^{k,j})_{k,j=1}^p$ *— некоторые матричные ПДО, состоящие из элементов класса* $\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, *а* I *— тождественный оператор в* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Пусть заданы функция* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *и число* $\sigma > 0$. *Существует число* $c = c(\varphi, \sigma) > 0$ *такое, что для произвольных вектор-функций*

$$u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_p) \in \bigoplus_{k=1}^p H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n), \quad f = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p) \in (H^\varphi(\mathbb{R}^n))^p, \tag{9}$$

удовлетворяющих уравнению $Au = f$ *в* $\mathbb{R}^n$, *справедлива априорная оценка*

$$\left(\sum_{k=1}^p \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k}}\right)^{1/2} \leq c\left(\sum_{j=1}^p \|f_j\|^2_\varphi\right)^{1/2} + c\left(\sum_{k=1}^p \|u_k\|^2_{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим через $\|\cdot\|'_\varphi$, $\|\cdot\|''_\varphi$ и $\|\cdot\|'_{\varphi,\sigma}$ соответственно нормы в пространствах

$$\bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n), \qquad (H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p \qquad \text{и} \qquad \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть вектор-функции (9) удовлетворяют уравнению $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$. В силу первого равенства в (8) запишем $u = Bf - T_1 u$. Отсюда следует оценка (10):

$$\|u\|'_{\varphi} = \|Bf - T_1 u\|'_{\varphi} \le \|Bf\|'_{\varphi} + \|T_1 u\|'_{\varphi} \le c\|f\|''_{\varphi} + c\|u\|'_{\varphi,\sigma}.$$

Здесь c — максимум норм операторов

$$B:\ (H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p \to \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

$$T_1:\ \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k-\sigma}}(\mathbb{R}^n) \to \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n). \tag{12}$$

Операторы (11), (12) ограниченные в силу предложений 3 и 4.

Теорема 1 доказана.

4. Гладкость решения эллиптической системы. Предположим, что правая часть уравнения $Au = f$ имеет некоторую внутреннюю гладкость на заданном открытом множестве $V \subseteq \mathbb{R}^n$ в шкале Хермандера. Изучим внутреннюю гладкость решения u на этом множестве. Рассмотрим сначала случай, когда $V = \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\varphi\in\mathrm{RO}} H^{\varphi}(\mathbb{R}^n),$$

$$H^{\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\varphi\in\mathrm{RO}} H^{\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Это обозначение корректно в силу (5). В пространствах $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ вводятся топологии соответственно индуктивного и проективного пределов, в каждой из которых ПДО A непрерывен.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Предположим, что вектор-функция* $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ *является решением уравнения* $Au = f$ *в* $\mathbb{R}^n$, *где* $f_j \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $j = 1, \ldots, p$. *Тогда* $u_k \in H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $k = 1, \ldots, p$.

Доказательство. В силу (8), (11) и условия имеем $u = Bf - T_1 u$, где

$$Bf \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n).$$

Кроме того, поскольку $T_1^{jk} \in \Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, то $T_1 u \in H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ и теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда V — произвольное открытое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Положим

$$H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V) := \Big\{ w \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n):$$
$$\chi w \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)\ \forall \chi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp}\chi \subset V,\ \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V) > 0 \Big\}. \tag{13}$$

Здесь $\varphi \in \mathrm{RO}$, а $C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ комплекснозначных функций, у которых любая частная производная ограничена в $\mathbb{R}^n$. Топология в пространстве $H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ задается полунормами $w \to \|\chi w\|_{\varphi}$, где функции χ те же, что и в (13).

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Предположим, что вектор-функция* $u \in \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на открытом множестве* V, *где*

$$f_j \in H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, p. \tag{14}$$

Тогда

$$u_k \in H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{int}}(V) \quad \text{для всех} \quad k = 1, \ldots, p. \tag{15}$$

Доказательство. Покажем сначала, что из условия (14) вытекает следующее свойство повышения внутренней гладкости решения уравнения $Au = f$: для каждого числа $r \geq 1$ справедлива импликация

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k - r}}_{\mathrm{int}}(V) \quad \Rightarrow \quad u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k - r + 1}}_{\mathrm{int}}(V). \tag{16}$$

Выберем произвольно функцию $\chi \in C^{\infty}_{b}(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\operatorname{supp}\chi \subset V \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V) > 0. \tag{17}$$

Для нее существует функция $\eta \in C^{\infty}_{b}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\operatorname{supp}\eta \subset V, \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\eta, \partial V) > 0 \quad \text{и} \quad \eta = 1 \quad \text{в окрестности} \quad \operatorname{supp}\chi. \tag{18}$$

Действительно, мы можем определить указанную функцию с помощью операции свертки $\eta := \chi_{2\varepsilon} * \omega_{\varepsilon}$, где $\varepsilon := \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V)/4$, $\chi_{2\varepsilon}$ — индикатор 2ε-окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$, а функция $\omega_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$\omega_{\varepsilon} \geq 0, \qquad \operatorname{supp}\omega_{\varepsilon} \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon \right\} \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon}(x)\,dx = 1.$$

Непосредственно проверяется, что такая функция η принадлежит классу $C^{\infty}_{b}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условиям (18).

Переставив матричный ПДО A и оператор умножения на функцию χ, запишем

$$\begin{aligned} A\chi u &= A\chi\eta u = \chi A\eta u + A'\eta u = \chi A u + \chi A(\eta - 1)u + A'\eta u = \\ &= \chi f + \chi A(\eta - 1)u + A'\eta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{19}$$

где матричный ПДО $A' = (A'_{j,k})_{j,k=1}^{p}$ — коммутатор ПДО A и оператора умножения на функцию χ. Поскольку $A'_{j,k} \in \Psi^{m_k - 1}(\mathbb{R}^n)$, в силу предложения 3 имеем ограниченный оператор

$$A' : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k - r}}(\mathbb{R}^n) \to (H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n))^p.$$

Следовательно,

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k - r}}_{\mathrm{int}}(V) \Rightarrow A'\eta u \in (H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n))^p. \tag{20}$$

Далее, согласно условию (14) и в силу неравенства $r \geq 1$ имеем

$$\chi f \in (H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p \hookrightarrow (H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n))^p. \tag{21}$$

Кроме того, так как носители функций χ и $\eta - 1$ не пересекаются, ПДО

$$\chi A_{j,k}(\eta - 1) \in \Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для всех} \quad j, k = 1, \dots, p.$$

Это непосредственно следует из формулы для символа композиции двух ПДО: $\chi A_{j,k}$ и оператора умножения на функцию $\eta - 1$ (см. [1], п. 1.2, d). Поэтому

$$\chi A(\eta - 1)u \in (H^{\infty}(\mathbb{R}^n))^p. \tag{22}$$

Теперь из формул (19) – (22) следует импликация

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H_{\text{int}}^{\varphi\rho^{m_k - r}}(V) \Rightarrow A\chi u \in (H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n))^p.$$

Но согласно теореме 2

$$A\chi u \in (H^{\varphi\rho^{-r+1}}(\mathbb{R}^n))^p \Rightarrow \chi u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k - r+1}}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, справедлива импликация (16) вследствие произвольности выбора функции $\chi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию (17).

Теперь с помощью (16) легко вывести свойство (15). В силу (5) существует целое число $q \geq 1$ такое, что

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k - q}}(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку умножение на функцию $\chi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ есть ПДО класса $\Psi^0(\mathbb{R}^n)$, в силу предложения 3

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H_{\text{int}}^{\varphi\rho^{m_k - q}}(V).$$

Далее, применяя импликацию (16) последовательно для $r = q, q-1, \dots, 1$, выводим свойство (15):

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H_{\text{int}}^{\varphi\rho^{m_k - q}}(V) \Rightarrow u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H_{\text{int}}^{\varphi\rho^{m_k - q+1}}(V) \Rightarrow \dots \Rightarrow u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H_{\text{int}}^{\varphi\rho^{m_k}}(V).$$

***Замечание* 1.** Следует различать *внутреннюю* и *локальную* гладкость на открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$. Пространство распределений, имеющих данную локальную гладкость на этом множестве, определяется следующим образом:

$$H_{\text{loc}}^{\varphi}(V) := \left\{ w \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) : \chi w \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \ \forall \chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \ \operatorname{supp} \chi \subset V \right\},$$

где $\varphi \in \mathrm{RO}$. В случае, когда множество V ограничено, пространства $H_{\text{int}}^{\varphi}(V)$ и $H_{\text{loc}}^{\varphi}(V)$ совпадают. Если же V не ограничено, то может быть строгое включение $H_{\text{int}}^{\varphi}(V) \subset H_{\text{loc}}^{\varphi}(V)$. Для локальной уточненной гладкости справедлив аналог теоремы 3, который легко выводится из нее. В ее формулировке следует лишь заменить int на loc в обозначениях пространств.

5. Приложение. Теорема 3 дает возможность установить наличие непрерывных производных у выбранной компоненты u_k решения системы (1). Обозначим через $C_b^r(\mathbb{R}^n)$ банахово пространство всех функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, имеющих непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}^n$ производные до порядка r включительно. Нам понадобится следующий критерий вложения пространств Хермандера в пространство $C_b^r(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 5. *Пусть* $\psi \in \mathrm{RO}$. *Для каждого фиксированного целого числа* $r \geq 0$ *неравенство*

$$\int_1^{\infty} t^{2r+n-1}\psi^{-2}(t)dt < \infty \tag{23}$$

равносильно вложению $H^{\psi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^r(\mathbb{R}^n)$. *Это вложение непрерывно.*

Предложение 5 следует из результата Хермандера [5] (п. 2.2, теорема 2.2.7), согласно которому неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2r}\psi^{-2}(\langle\xi\rangle)d\xi < \infty$$

равносильно вложению $H^{\psi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^r(\mathbb{R}^n)$, и это вложение непрерывно. Переходя к сферическим координатам, получаем, что последнее неравенство равносильно (23).

Теорема 4. *Пусть заданы целые числа* $k \in \{1,\ldots,p\}$, $r \geq 0$ *и функция* $\varphi \in \in \mathrm{RO}$, *удовлетворяющая неравенству*

$$\int_1^{\infty} t^{2r+n-1-2m_k}\varphi^{-2}(t)dt < \infty. \tag{24}$$

Предположим, что вектор-функция $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на открытом множестве* $V \subseteq \mathbb{R}^n$, *где* $f_j \in H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ *для всех* $j = 1,\ldots,p$. *Тогда компонента* u_k *решения имеет на множестве* V *непрерывные частные производные до порядка* r *включительно, причем эти производные ограничены на каждом множестве* $V_0 \subset V$ *таком, что* $\mathrm{dist}(V_0, \partial V) > 0$. *В частности, если* $V = \mathbb{R}^n$, *то* $u_k \in C_b^r(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В силу теоремы 3 $u_k \in H^{\varphi\rho^{m_k}}_{\mathrm{int}}(V)$. Пусть функция $\eta \in \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$\mathrm{supp}\,\eta \subset V, \quad \mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\,\eta, \partial V) > 0 \quad \text{и} \quad \eta = 1 \quad \text{в окрестности } V_0.$$

Эта функция строится так же, как и в доказательстве теоремы 3, если заменить в нем $\mathrm{supp}\,\chi$ на V_0. В силу условия (24) функция $\psi := \varphi\rho^{m_k}$ удовлетворяет неравенству (23). Поэтому согласно предложению 5

$$\eta u_k \in H^{\varphi\rho^{m_k}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^r(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда следует, что все частные производные функции u_k до порядка r включительно непрерывны и ограничены в некоторой окрестности множества V_0. Тогда эти производные непрерывны и на множестве V, поскольку можно взять $V_0 := \{x_0\}$ для любой точки $x_0 \in V$.

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 для $r = m_k$ непосредственно следует достаточное условие *классичности* решения равномерно эллиптической системы *дифференциальных* уравнений. Здесь предполагается, что в системе (1) все $A_{j,k}$ являются линейными дифференциальными операторами с коэффициентами класса $C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Следствие. *Предположим, что вектор-функция* $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ *является обобщенным решением уравнения* $Au = f$ *на открытом множестве* $V \subseteq \mathbb{R}^n$, *где* $f_j \in H^{\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ *для всех* $j = 1,\ldots,p$, *и некоторой функции* $\varphi \in \mathcal{M}$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\int_1^\infty t^{n-1}\varphi^{-2}(t)\,dt \;<\; \infty\,.$$

Тогда решение u *классическое на множестве* V, *т. е.* $u_k \in C^{m_k}(V)$ *для всех* $k = 1,\ldots,p$.

Отметим, что для классического решения u системы (1) ее левые части вычисляются с помощью классических (а не обобщенных) производных и являются непрерывными функциями на множестве V.

1. *Agranovich M. S.* Elliptic operators on closed manifolds // Encycl. Math. Sci., Part. Different. Equat. – Berlin: Springer, 1994. – **63**. – P. 1 – 130.
2. *Douglis A., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1955. – **8**, № 4. – P. 503 – 538.
3. *Hörmander L.* Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems // Ann. Math. – 1966. – **83**, № 1. – P. 129 – 209.
4. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudodifferential operators. – Berlin: Springer, 1985. – 525 p.
5. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p.
6. *Avakumović V. G.* O jednom O-inverznom stavu // Rad. Jugoslovenske Akad. znatn. umjetn. – 1936. – **254**. – P. 167 – 186.
7. *Seneta E.* Regularly varying functions. – Berlin: Springer, 1976. – 112 p.
8. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
9. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 205 – 266.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. Математика, природознавство, техн. науки. – 2009. – № 3. – С. 29 – 35.
11. *Kalyabin G. A., Lizorkin P. I.* Spaces of functions of generalized smoothness // Math. Nachr. – 1987. – **133**. – S. 7 – 32.
12. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisation of function spaces of generalised smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
13. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. I // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 2. – P. 244 – 262.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ibid. – № 3. – P. 398 – 417.
15. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Regular elliptic boundary-value problem for a homogeneous equation in a two-sided improved scale of spaces // Ibid. – № 11. – P. 1748 – 1767.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ibid. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
17. *Murach A. A.* Elliptic pseudodifferential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ibid. – № 6. – P. 874 – 893.
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic operator with homogeneous regular boundary conditions in two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. Bull. – 2006. – **3**, № 4. – P. 529 – 560.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
20. *Murach A. A.* Douglis – Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Ibid. – № 2. – P. 142 – 158.
21. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 4. – С. 497 – 520.
22. *Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису – Ниренбергу системы в пространствах обобщенной гладкости // Укр. мат. вісн. – 2008. – **5**, № 3. – С. 350 – 365.

Получено 10.11.08